

論文

Power Exponential Distribution を需要分布に仮定した Newsvendor Problem

鹿島 浩之

キーワード

Newsvendor Problem
Power Exponential Distribution
推定リスク
不偏推定量

目次

1. はじめに
2. 設定
3. 期待利益
4. パラメータの推定リスク
5. 推定リスクの評価
6. 結論
7. 補足

1. はじめに

近年の SDGs 経営、及び ESG 投資の世界的な広がりを背景に、企業のリスク対応は重要性が高まりつつある。個々の企業は、自社のビジネスモデルが抱えるリスクを把握し、業績に与える影響を分析した上で、それらの情報をステークホルダーに開示することが要請される。各企業が抱えるリスクファクターは様々であるが、中でも需要の不確実性は、ビジネス戦略に直結する重要なリスクファクターの一つと言える。

Newsvendor problem は、需要の不確実性に対し在庫をどの程度確保すべきかを議論する古典的な問題である (e.g. Arrow et al. (1951))。最近では、観測データから需要に対する推測を行い、在庫数量に関する意思決定を行う研究も幾つかの文献で紹介されている (e.g. Huber et al. (2019), Beutel et al. (2012))。その際、需要の不確実性をどのような確率モデルとして捉えるかが重要なポイントの一つとなる。

本稿では、需要の確率分布に Power Exponential Distribution を仮定し、需要の観測データを利用した Newsvendor problem について考察する。ここで、Power Exponential Distribution を仮定する理由は 2 つある。1 つは、実務の状況に鑑み、極力広い分布クラスを対象とする為である。例えば、正規分布は最もポピュラーな分布であるが、負の需要数量についての扱いや解釈が難しくなるケースもある。負の需要を、返品数量が販売数量を超えた場合と解釈することも可能だが、そのような解釈が現実的でないケースもあろう。そこで、Power Exponential Distribution を仮定することで、正規分布を含め、それより急尖的な leptokurtic distribution から、peak が平坦な platykurtic distribution まで議論の対象を広げることができる (e.g. Gómez et al. (1998), Dang et al. (2015))。もう 1 つの理由は、parametric 分布のメリットを享受する為である。分布クラスを広げるだけであれば nonparametric 分布を前提とすれば良いが、その場合、平均や標準偏差等の実務上有用性の高いパラメータによる需要分布の直接的な把握が必ずしも容易ではなくなる。本稿では、このような実務上の問題意識に即した設定の下、Newsvendor problem について議論する。

本稿の構成は次の通りである。先ず、第 2 節で問題の設定を行い、第 3 節で期待利益とこれを最大化する最適解を導出する。第 4 節で過去の観測データを利用した場合の期待利益を導出し、第 5 節で推定リスクが期待利益に与える影響を評価する。第 6 節で結論をまとめ、第 7 節で命題の証明に使用した補助定理を補足する。

2. 設定

本稿では、1 期間における 1 製品の Newsvendor problem を議論する。当該期間の期首時点において、バイヤーはサプライヤーから当該製品を Q 個、1 個につき価格 c にて購入し、期中の販売に備えストックする。そして、バイヤーは顧客に対し同製品を 1 個につき価格 p で販売する ($p > c > 0$)。期中の同製品の需要数量を D で表し、

$$D \sim PE(\mu, \sigma, \beta)$$

即ち, Power Exponential Distribution に従う確率変数と仮定する. 同分布の確率密度関数は, 以下の通りである (e.g. Gómez et al. (1998)).

$$f(x|\mu, \sigma, \beta) := \frac{1}{\sigma} \psi_\beta \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right),$$

ここで, $x, \mu \in \mathbf{R}$, $\sigma, \beta > 0$,

$$\psi_\beta(z) := \frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2\beta}\right) 2^{\frac{1}{2\beta}}} \exp\left\{-\frac{1}{2} z^{2\beta}\right\}, \quad z \in \mathbf{R}.$$

上記から分かる通り, $\beta = 1$ のとき正規分布となる. そして, $\beta > 1$ のとき, platykurtic distribution, $\beta \rightarrow \infty$ のとき一様分布に収束, $0 < \beta < 1$ のとき leptokurtic distribution となる (e.g. Dang et al. (2015)).

上記の設定において, バイヤーの利益 $R(D, Q)$ は,

$$R(D, Q) = \begin{cases} pD - cQ & (D \leq Q) \\ (p - c)Q & (D > Q) \end{cases}$$

即ち,

$$R(D, Q) = (p - c)Q - p \max(Q - D, 0)$$

と書くことができる. バイヤーは, 需要数量の確率分布情報を元に, 期待利益, 即ち,

$$E[R(D, Q)]$$

を最大化する Q を期首に決定するものとする.

尚, 以後の議論を簡潔に進めるため, 以下の通り記号を定義する. 先ず, 累積分布関数を以下で表す.

$$F(x|\mu, \sigma, \beta) := \int_{-\infty}^x f(t|\mu, \sigma, \beta) dt, \quad \Psi_\beta(x) := \int_{-\infty}^x \psi_\beta(t) dt.$$

また, 便宜上, 以下の関数を定義する.

$$h(x|\mu, \sigma, \beta) := \int_{-\infty}^x t f(t|\mu, \sigma, \beta) dt + x(1 - F(x|\mu, \sigma, \beta)),$$

$$h_\beta(x) := h(x|0, 1, \beta).$$

尚, 問題をシンプルにするため, 在庫処理や機会損失などの要素は, 本稿では割愛する.

3. 期待利益

本節では、前節の設定の下、期待利益を求め、それを最大にするストック数量を導出する。

命題 1.

ストック数量を Q としたときの期待利益 $m(Q)$ は、以下の通り。

$$m(Q) := E[R(D, Q)] = p\mu - cQ + p\sigma h_\beta\left(\frac{Q - \mu}{\sigma}\right). \quad (1)$$

証明.

$$\begin{aligned} E[\max(Q - D, 0)] &= \int_{-\infty}^Q (Q - D) f(D|\mu, \sigma, \psi) dD \\ &= QF(Q|\mu, \sigma, \psi) - \int_{-\infty}^Q Df(D|\mu, \sigma, \psi) dD. \end{aligned}$$

従って、補助定理 1 より、

$$\begin{aligned} E[R(D, Q)] &= (p - c)Q - p\left\{QF(Q|\mu, \sigma, \beta) - \int_{-\infty}^Q Df(D|\mu, \sigma, \beta) dD\right\} \\ &= ph(Q|\mu, \sigma, \beta) - cQ = p\left\{\mu + \sigma h_\beta\left(\frac{Q - \mu}{\sigma}\right)\right\} - cQ, \end{aligned}$$

即ち、本命題を得る。□

命題 2.

期待利益はストック数量

$$Q^* := \mu + \sigma u^* \quad (2)$$

のとき、以下の最大値を取る。

$$m(Q^*) = \mu(p - c) + \sigma p \int_{-\infty}^{u^*} z \psi_\beta(z) dz, \quad (3)$$

ここで、 $u^* := \Psi_\beta^{-1}\left(1 - \frac{c}{p}\right)$ 。

証明. 関数 h_β の微分は $h'_\beta(z) = 1 - \Psi_\beta(z)$ となる為、

$$\frac{d}{dQ} m(Q) = -c + p\sigma \frac{d}{dQ} h_\beta\left(\frac{Q - \mu}{\sigma}\right) = -c + p\left\{1 - \Psi_\beta\left(\frac{Q - \mu}{\sigma}\right)\right\}.$$

故に

$$\frac{d}{dQ} m(Q) = 0 \Leftrightarrow \frac{Q - \mu}{\sigma} = u^*.$$

従って、 $m(Q)$ は (2) のとき最大値を取る。また、命題 1 より、

$$m(Q^*) = p\mu - cQ^* + p\sigma h_\beta\left(\frac{Q^* - \mu}{\sigma}\right) = (p - c)\mu + \sigma\{ph_\beta(u^*) - cu^*\}.$$

ここで,

$$h_\beta(u^*) = \int_{-\infty}^{u^*} z\psi_\beta(z) dz + u^* \frac{c}{p} \quad (4)$$

より, (3) を得る. $\square$

命題2より, 期待利益の最大値(3)は, μ の増加関数, σ の減少関数となることが分かる. 前者は明白だが, 後者も

$$\int_{-\infty}^{u^*} z\psi_\beta(z) dz = -\int_0^\infty z\psi_\beta(z) dz + \int_0^{u^*} z\psi_\beta(z) dz < 0$$

より, 明らかである. 仮に, 需要分布を何らかの形でコントロールできるとした場合, 需要数量を平均的に増大させることはもちろんであるが, 分布のばらつきを抑制することでも, 期待利益の向上に貢献できることが分かる.

(3)は, 理想的な期待利益であり, 実際に達成することは困難である. 何故なら, 最適ストック数量 Q^* は, 確率分布のパラメータが既知であることを前提に導出されているからである. パラメータは, 実際には未知であり, 従って, Q^* を得るには, パラメータを推定する必要がある.

4. パラメータの推定リスク

本節では, Power Exponential Distributionのパラメータ μ, σ を未知とし, 過去の需要数量から当期の需要に備えたストック数量を決定する問題を考える. 先ず, 第1期から第 T 期の需要数量 $D_1, \dots, D_T$ を観測済とし, 現在時点を第 $T+1$ 期首, 第 $T+1$ 期末に顕在化する需要数量を D_{T+1} とする. これらは,

$$D_1, \dots, D_T, D_{T+1} \stackrel{iid}{\sim} PE(\mu, \sigma, \beta),$$

即ち, 互いに独立に同一のPower Exponential Distributionに従うものとする. ここで, β は既知とする. もちろん, 現実には β も未知と考えるべきである. ただ, ここでは, 需要数量の平均水準(μ)やそのばらつき(σ)の推測には経験則が通用しない一方, 分布形状(β)については経験則がある程度通用するものと仮定し議論する.

命題2より, 最適なストック数量 Q^* を得るには μ と σ が必要になるが, これらを未知としている今, 観測データから推定することが考えられる. 今, $D_1, \dots, D_T$ による μ と σ の推定量を

$$\hat{\mu} := \hat{\mu}(D_1, \dots, D_T), \quad \hat{\sigma} := \hat{\sigma}(D_1, \dots, D_T)$$

と書き, 命題2に即し,

$$\hat{Q}^* := \hat{\mu} + \hat{\sigma}u^* \quad (5)$$

によって、第 $T+1$ 期首時点のストック数量を決定することを考える。このときの期待利益

$$E\left[R(D_{T+1}, \hat{Q}^*)\right]$$

を求めたいが、まずは、観測情報の条件付き期待値を与える。

命題 3.

$$E\left[R(D_{T+1}, \hat{Q}^*)|D_1, \dots, D_T\right] = m(Q^*) - \sigma\Delta(\hat{\varepsilon}),$$

ここで、

$$\Delta(\hat{\varepsilon}) := c\hat{\varepsilon} + p\left\{h_\beta(u^*) - h_\beta(u^* + \hat{\varepsilon})\right\}, \quad (6)$$

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) := \frac{\hat{\mu} - \mu + (\hat{\sigma} - \sigma)u^*}{\sigma}.$$

証明. 命題 1 より、

$$E\left[R(D_{T+1}, \hat{Q}^*)|D_1, \dots, D_T\right] = m(\hat{Q}^*).$$

ここで、便宜上、

$$\hat{\delta} := h_\beta(u^* + \hat{\varepsilon}) - h_\beta(u^*)$$

と定義するとき、

$$h_\beta\left(\frac{\hat{Q}^* - \mu}{\sigma}\right) = h_\beta\left(\frac{\hat{\mu} + \hat{\sigma}u^* - \mu}{\sigma}\right) = h_\beta(u^* + \hat{\varepsilon}) = h_\beta(u^*) + \hat{\delta},$$

と書くことができる。故に、(1) より、

$$E\left[R(D_{T+1}, \hat{Q}^*)|D_1, \dots, D_T\right] = m(\hat{Q}^*) = p\mu - c(\hat{\mu} + \hat{\sigma}u^*) + p\sigma\left\{h_\beta(u^*) + \hat{\delta}\right\}.$$

従って、(4) より以下を得る。

$$\begin{aligned} m(\hat{Q}^*) &= p\mu - c(\hat{\mu} + \hat{\sigma}u^*) + p\sigma\left(\int_{-\infty}^{u^*} z\psi_\beta(z)dz + u^* \frac{c}{p} + \hat{\delta}\right) \\ &= (p-c)\mu - c\left\{\hat{\mu} - \mu + u^*(\hat{\sigma} - \sigma)\right\} + p\sigma\left(\int_{-\infty}^{u^*} z\psi_\beta(z)dz + \hat{\delta}\right), \end{aligned}$$

ここで、(3) より、

$$\begin{aligned} m(\hat{Q}^*) &= m(Q^*) - c\{\hat{\mu} - \mu + u^*(\hat{\sigma} - \sigma)\} + p\sigma\hat{\sigma} \\ &= m(Q^*) - \sigma(c\hat{\varepsilon} - p\hat{\delta}), \end{aligned}$$

と書け、本命題を得る。□

命題3より、パラメータの推定リスクは、推定誤差 $\hat{\varepsilon}$ が関数 $\Delta(\hat{\varepsilon})$ の形で利益に作用し、需要分布の σ が大きいほどその影響も大きくなることが分かる。また、期待利益は以下のように書ける。

$$E\left[R\left(D_{T+1}, \hat{Q}^*\right)\right] = m(Q^*) - \sigma E[\Delta(\hat{\varepsilon})].$$

ここで、推定量 $\hat{\mu}$ と $\hat{\sigma}$ が共に一致性を持つ場合、

$$E[\Delta(\hat{\varepsilon})] \rightarrow 0 \quad (T \rightarrow \infty),$$

つまり、推定リスクの期待利益に対するペナルティを0に近づけることができる。これは、命題3と

$$|\Delta(\hat{\varepsilon})| \leq c|\hat{\varepsilon}| + p|h_\beta(u^*) - h_\beta(u^* + \hat{\varepsilon})|, \quad |\hat{\varepsilon}| \leq \frac{|\hat{\mu} - \mu| + |\hat{\sigma} - \sigma|u^*}{\sigma},$$

より明白である。尚、一般に、最尤推定量は、一定の正則条件の下、一致性を持つことが知られている (e.g. Wald (1949), Akahira et al. (1994))。

実際に一致性の恩恵を享受できるのは、長期に亘り iid のデータが確保できる場合であるが、現実には必ずしもそのような状況を想定できるとは限らない。むしろ、需要分布は、経済、社会、自然環境等の変化の影響を受け、長期の iid データが入手できない状況を想定しておく方が無難と言える。従って、必ずしも十分なデータ数が確保できない前提において、推定リスクのペナルティを捉えて置くことも重要である。

命題 4.

推定量 $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$ がそれぞれ μ , σ の不偏推定量のとき、以下が成立する。

$$E[\Delta(\hat{\varepsilon})] > 0.$$

証明. $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$ がそれぞれ μ , σ の不偏推定量のとき、

$$\begin{aligned} E[\Delta(\hat{\varepsilon})] &= cE[\hat{\varepsilon}] + p\{h_\beta(u^*) - E[h_\beta(u^* + \hat{\varepsilon})]\} \\ &= p\{h_\beta(u^*) - E[h_\beta(u^* + \hat{\varepsilon})]\}. \end{aligned}$$

また、

$$h_\beta''(z) = \{1 - \Psi_\beta(z)\}' = -\psi_\beta(z) < 0,$$

即ち、 h は concave function であることから、Jensen の不等式より、

$$E\left[h_{\beta}(u^* + \hat{\varepsilon})\right] < h_{\beta}\left(E[u^* + \hat{\varepsilon}]\right) = h_{\beta}(u^* + E[\hat{\varepsilon}]) = h_{\beta}(u^*),$$

つまり、本命題を得る。□

命題 4 より、不偏推定量の利用により、推定誤差の線形部分は期待利益に平均的影響を与えないが、非線形部分がネガティブに作用する構造が明らかとなった。

5. 推定リスクの評価

本節では、前節までの議論を受け、推定リスクを解析的に評価する。簡単の為、 $\beta = 1$ 、即ち、需要分布が正規分布の場合に議論する。そして、 $\psi = \psi_1$ 、 $\Psi = \Psi_1$ 、 $h = h_1$ と表すこととする。 μ の推定量としては、標本平均 $\bar{D}$ を想定する。

$$\bar{D} := \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T D_t \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{T}\right).$$

他方、 σ の推定量としては、以下を想定する。

$$\hat{\sigma}_U := \frac{\sqrt{T}}{\kappa_{T-1}} S,$$

ここで、

$$S^2 := \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (D_t - \bar{D})^2, \quad \kappa_{T-1} := \sqrt{2} \frac{\Gamma\left(\frac{T}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{T-1}{2}\right)}.$$

実際、 $TS^2/\sigma^2 \sim \chi^2(T-1)$ であることから、

$$E\left[\frac{\sqrt{T}}{\sigma} S\right] = \kappa_{T-1},$$

即ち、 $\hat{\sigma}_U$ は σ の不偏推定量であることが分かる (e.g. Johnson et al. (1994), p421)。

命題 5.

$\hat{\mu} = \bar{D}$ 、 $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_U$ とするとき、以下が成立する。

$$E[\Delta(\hat{\varepsilon})] = p \left\{ \bar{\psi}(u^*) - \psi(u^*) + u^* \left(\bar{\Psi}_{\chi, z}(u^*) - \Psi(u^*) \right) \right\}, \quad (7)$$

ここで、

$$\bar{\psi}(u^*) := \sqrt{\frac{1}{T}+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ 1 + \frac{\left(\frac{u^*}{\kappa_{T-1}} \right)^2}{\frac{1}{T}+1} \right\}^{\frac{T-1}{2}},$$

$$\bar{\Psi}_{\chi, z}(u^*) := E \left[\Psi \left(u^* \frac{\chi_T}{\kappa_{T-1}} + \frac{1}{\sqrt{T}} z \right) \right], \quad (8)$$

更にここで, χ_T と z は互いに独立で, それぞれ $\chi_T^2 \sim \chi^2(T)$, $z \sim N(0,1)$.

証明. $T\hat{\sigma}^2/\sigma^2 \sim \chi^2(T-1)$ より,

$$\hat{\sigma}_U = \frac{\sigma}{\kappa_{T-1}} \chi_{T-1}$$

と書ける. また,

$$z := \frac{\bar{D} - \mu}{\sigma/\sqrt{T}}, \quad a := \frac{1}{\sqrt{T}}, \quad b := \frac{u^*}{\kappa_{T-1}},$$

とするとき, $z \sim N(0,1)$,

$$\hat{\varepsilon} + u^* = \frac{\bar{D} - \mu + \hat{\sigma} u^*}{\sigma} = az + b\chi_{T-1},$$

従って, 以下の様を書くことができる.

$$\begin{aligned} h(u^* + \hat{\varepsilon}) &= \int_{-\infty}^{az+b\chi_{T-1}} z\psi(z)dz + (az+b\chi_{T-1}) \{1 - \Psi(az+b\chi_{T-1})\} \\ &= -\psi(az+b\chi_{T-1}) + az + b\chi_{T-1} - (az+b\chi_{T-1})\Psi(az+b\chi_{T-1}). \end{aligned} \quad (9)$$

今, 需要分布に正規分布を仮定しているため, $\bar{D}$ と S^2 は独立, よって z と χ_{T-1} も独立である. (9) より χ_{T-1} の条件付き期待値は以下の通りとなる.

$$\begin{aligned} E_z[h(u^* + \hat{\varepsilon})|\chi_{T-1}] &= b\chi_{T-1} - E_z[\psi(az+b\chi_{T-1})|\chi_{T-1}] \\ &\quad - aE_z[z\Psi(az+b\chi_{T-1})|\chi_{T-1}] - b\chi_{T-1}E_z[\Psi(az+b\chi_{T-1})|\chi_{T-1}]. \end{aligned}$$

従って, 補助定理 2 より, 以下を得る.

$$\begin{aligned} E_z[h(u^* + \hat{\varepsilon})|\chi_{T-1}] &= \frac{u^*}{\kappa_{T-1}} \chi_{T-1} - \sqrt{\frac{1}{T}+1} \psi \left(\frac{\frac{u^*}{\kappa_{T-1}} \chi_{T-1}}{\sqrt{\frac{1}{T}+1}} \right) \\ &\quad - \frac{u^*}{\kappa_{T-1}} \chi_{T-1} E_z \left[\Psi \left(\frac{1}{\sqrt{T}} z + \frac{u^*}{\kappa_{T-1}} \chi_{T-1} \right) \middle| \chi_{T-1} \right]. \end{aligned}$$

次に χ_{T-1} について期待値を取る．Moment generating function より以下を得る．

$$E \left[\psi \left(\frac{\frac{u^*}{\kappa_{T-1}} \chi_{T-1}}{\sqrt{\frac{1}{T}+1}} \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E \left[\exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{u^*}{\kappa_{T-1}} \right)^2 \chi_{T-1}^2}{\frac{1}{T}+1} \right\} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ 1 + \frac{\left(\frac{u^*}{\kappa_{T-1}} \right)^2}{\frac{1}{T}+1} \right\}^{-\frac{T-1}{2}}.$$

また、 $\chi^2(T)$ の確率密度関数を $f_T(x)$ とするとき、

$$\sqrt{x} f_{T-1}(x) = x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^{\frac{T-1}{2}} \Gamma\left(\frac{T-1}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{T-1}{2}-1} = \kappa_{T-1} f_T(x)$$

となることから、以下を得る．

$$E \left[\frac{\chi_{T-1}}{\kappa_{T-1}} \Psi \left(u^* \frac{\chi_{T-1}}{\kappa_{T-1}} + \frac{1}{\sqrt{T}} z \right) \right] = E \left[\Psi \left(u^* \frac{\chi_T}{\kappa_{T-1}} + \frac{1}{\sqrt{T}} z \right) \right].$$

従って、以下を得る．

$$E \left[h(u^* + \hat{\varepsilon}) \right] = u^* - \bar{\psi}(u^*) - u^* \bar{\Psi}_{\chi,z}(u^*).$$

今、 $x\psi(x) = -\psi'(x)$ であることから、以下を得る．

$$h(u^*) = -\psi(u^*) + u^* \{1 - \Psi(u^*)\} = u^* - \psi(u^*) - u^* \Psi(u^*).$$

従って、(6) より、本命題を得る．□

命題 5 の結果から (7) により推定リスクの影響を評価することができる．具体的には、過去のデータから最適ストック数量を推定することによるリスクが、期待利益に与えるネガティブな影響を、(7) によって数値的に計測することが可能となる．

6. 結論

本稿では、1 期間における 1 製品の Newsvendor problem において、需要分布に Power Exponential Distribution $PE(\mu, \sigma, \beta)$ を仮定し、パラメータの推定リスクが期待利益に与える影響を明らかにした．具体的には、まず、パラメータ既知の前提で最適ストック数量 Q^* を導出し、期待利益を向上させる為には、需要分布の平均 (μ) を引き上げることはもちろん、そのばらつき (σ) を抑制することでも貢献できる構造を明らかにした．次に、 μ と σ を未知とし、これらを過去のデータから推定することを前提に期待利益を導出、推定リスクが期待利益にペナルティを与える構造を明示した．最後に、需要分布に正規性を仮定し、パラメータの不偏推定量によって最適ストック数量を推定する場合に、推定リスクペナルティの大きさを計測するための評価式を与えた．本稿の議論により、データによる

推測に基づきビジネス上の意思決定をする場合、期待利益の見積もりに推定リスクを考慮しなければならないという直感的に明らかな構造が論理的に確認された。

7. 補足

命題の証明に必要な補助定理を以下で与える。

補助定理 1.

任意の $x \in \mathbf{R}$ に対し、以下が成立する。

$$h(x|\mu, \sigma, \beta) = \mu + \sigma h_{\beta}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

証明. 変数変換 $z = \frac{t-\mu}{\sigma}$ により、以下を得る。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x t f(t|\mu, \sigma, \beta) dt &= \sigma \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} z \psi_{\beta}(z) dz + \mu \Psi_{\beta}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \\ \int_{-\infty}^x f(t|\mu, \sigma, \beta) dt &= \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma} \psi_{\beta}(z) \sigma dz = \Psi_{\beta}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

故に、

$$\begin{aligned} h(x|\mu, \sigma, \beta) &= \sigma \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} z \psi_{\beta}(z) dz + \mu \Psi_{\beta}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) + x \left(1 - \Psi_{\beta}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right) \\ &= \sigma \left\{ \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} z \psi_{\beta}(z) dz + \frac{x-\mu}{\sigma} \left(1 - \Psi_{\beta}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right) \right\} + \mu. \end{aligned}$$

従って、本補助定理は証明された。□

補助定理 2.

$z \sim N(0,1)$, $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$ のとき、以下が成立する。

$$E[\psi(a_1 z + a_2)] = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + 1}} \psi\left(\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + 1}}\right), \quad E[z \Psi(a_1 z + a_2)] = a_1 E[\psi(a_1 z + a_2)].$$

証明. 変数変換の為、

$$t = \sqrt{a_1^2 + 1} z + \frac{a_1 a_2}{\sqrt{a_1^2 + 1}}$$

とするとき、

$$(a_1 z + a_2)^2 + z^2 = t^2 + \frac{a_2^2}{a_1^2 + 1}.$$

故に、以下が成立する。

$$\psi(a_1 z + a_2) \psi(z) = \psi\left(\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + 1}}\right) \psi(t).$$

従って,

$$\begin{aligned} E[\psi(a_1 z + a_2)] &= \int_{\mathbf{R}} \psi(a_1 z + a_2) \psi(z) dz = \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(a_1 z + a_2)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{a_2^2}{a_1^2 + 1}} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + 1}} dt = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + 1}} \psi\left(\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + 1}}\right). \end{aligned}$$

他方, 以下が成立する.

$$\begin{aligned} E[z \Psi(a_1 z + a_2)] &= \int_{\mathbf{R}} z \Psi(a_1 z + a_2) \psi(z) dz = \int_{\mathbf{R}} \Psi(a_1 z + a_2) \{-\psi(z)\}' dz \\ &= \left[-\Psi(a_1 z + a_2) \psi(z) \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbf{R}} a_1 \psi(a_1 z + a_2) \psi(z) dz \\ &= a_1 \int_{\mathbf{R}} \psi(a_1 z + a_2) \psi(z) dz = a_1 E[\psi(a_1 z + a_2)]. \end{aligned}$$

以上で本補助定理が証明された. $\square$

参考文献

- Akahira, M., & Kashima, H. (1994), "On the consistency of the maximum likelihood estimator through its uniform consistency", *Statistics*, **25**, 333–341.
- Arrow, K., Harris, T., & Marshak, J. (1951), "Optimal Inventory Policy," *Econometrica*, **19**, 250–272.
- Beutel, AL & Minner, S. (2012), "Safety stock planning under causal demand forecasting," *International Journal of Production Economics*, **140**, 637–645.
- Dang, U.J., Browne, R.P., & McNicholas, P.D. (2015), "Mixtures of Multivariate Power Exponential Distributions," *Biometrics*, **71**, 1081–1089.
- Gómez, E., Gómez-Vilegas, M.A., & Marín, J.M. (1998), "A multivariate generalization of the power exponential family of distributions," *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **27**, 589–600.
- Huber, J., Müller, S., Fleischmann, M., & Stuckenschmidt, H. (2019), "A data-driven newsvendor problem: From data to decision," *European Journal of Operational Research*, **278**, 904–915.
- Johnson, N. L., Kotz, S., & Balakrishnan, N. (1994), *Continuous Univariate Distributions Vol.1* Second edition, Wiley Inter-science.
- Wald, A. (1949), "Note on the consistency of the maximum likelihood estimate," *Ann. Math. Statistics*, **20**, 595–601.

謝辞

本研究は, 2019 年度青山学院大学経営学会からの研究助成を受け実施した研究の成果である. ここに感謝の意を表したい.