論　文

# 予備的貯蓄と危険回避度

## ——不確実性下における消費・貯蓄行動理論の展望——

後藤　智弘

## 1　はじめに

本稿の目的は，不確実性下の消費・貯蓄行動理論における「予備的貯蓄（precautionary saving)」と危険回避度の関係について整理，検討することである．

近年の不確実性下の消費・貯蓄行動についての理論及び実証研究では，予備的貯蓄に着目した研究が数多く見受けられる．予備的貯蓄の現代的な理論としてZeldes (1989)，Caballero (1990) があげられる．これらの研究は，消費者の効用関数を危険回避度一定型の効用関数として定式化したモデルを用いて分析を行っている．本稿では，危険回避度一定型の効用関数の仮定から導かれる最適な消費・貯蓄行動の性質について極めて単純化されたモデルと図解により明らかにしていくことにする．

以下では，まず，本稿で取り扱う「予備的貯蓄」の定義を明確にし，つづいて危険回避度の定義とその性質について概観する．次に，近年の不確実性下の消費・貯蓄行動の研究における予備的貯蓄の重要性について概観する．そして，効用関数の定式化と予備的貯蓄の関係について検討するための基本モデルを設定し，一般的な効用関数の下での最適な消費・貯蓄行動の条件を導出する．つづいて，基本モデルの効用関数を，2次関数型，絶対的危険回避度一定型，相対的危険回避度一定型に特定化した場合の最適な消費・貯蓄行動ついて順に検討し，予備的貯蓄と危険回避度の関係を明らかにする．最後に，本稿で得られた結論を述べる．

# 2　予備的貯蓄及び危険回避度の概念

## 2．1　予備的貯蓄

本稿では，Leland（1968）の定義を予備的貯蓄と呼ぶことにする．Leland（1968）は予備的貯蓄を以下のように定義している．$C_c$を将来の所得が確実なときの今期の消費とする．これに対し$C_u$を，将来の所得は不確実であるが，その期待値は確実なときと同一であるときの今期の消費とする．Leland（1968）は，このときの（$C_c - C_u$）を予備的貯蓄と定義している．この定義によれば，予備的貯蓄とは，将来の所得の不確実性が存在するが故に「今期の消費を我慢する額」と解釈できる．本稿で参照する先行研究においても，このLeland（1968）の定義と同一のものを採用しているものと思われる．

以上のように，予備的貯蓄は不確実性の有無による消費の差として定義される．以下では，この定義を貯蓄の側面から見ていくことにする．いま，所得を$Y$とし，将来の所得が確実なときの今期の貯蓄を$S_c$，不確実なときの今期の貯蓄を$S_u$とする．このとき$S_c$，$S_u$は，それぞれ$S_c = Y - C_c$，$S_u = Y - C_u$で与えられる．予備的貯蓄（$C_c - C_u$）を$S_p$とすると，$S_u$は以下のように表すことができる．

$$S_u = Y - C_u = (Y - C_c) + (C_c - C_u) = S_c + S_p \tag{1}$$

上の式では，将来の所得が不確実なときの今期の貯蓄が，確実なときの貯蓄と予備的貯蓄との和として表されている．したがって，予備的貯蓄は将来の不確実性が存在するが故に発生する「追加的な貯蓄」とも解釈できる．

## 2．2　危険回避度

ここでは，消費者の不確実性に対する選好の尺度として広く利用されている尺度である危険回避度について概観する．消費者は消費Cから効用を得るとし，効用関数を$u(C)$とする．本稿で扱う消費者は危険回避的な消費者であると仮定する．すなわち，$C$を確率変数としたとき$u(E[C]) > E[u(C)]$が$C$の定義域で常に成立すると仮定する．このような消費者の危険回避の程度の尺度として，リスクプレミアム

がある．リスクプレミアムは以下の式をみたすΠとして定義される．

$$u(E[C]-\Pi)=E[u(C)] \tag{2}$$

上の式は不確実な消費$C$から得られる期待効用は，確実な消費$E[C]-\Pi$から得られる効用と等しいことを示している．つまり，確実な消費であれば不確実な消費の期待値よりもΠだけ低い値で同じ満足を得られることを示している．リスクプレミアムΠは，不確実性（リスク）を避けるためならば支払うことを厭わない最大金額を示しており，消費者の危険回避の程度の尺度として妥当なものである．以下では，このリスクプレミアムの概念から危険回避度が定義されることをみていくことにする．

### 2．2．1　絶対的危険回避度

絶対的危険回避度はリスクプレミアムの近似という観点から定義される尺度である．以下では，この近似について見ていくことにする．ここで$C=\bar{C}+e$，$\bar{C}$は定数，$e$は平均0，分散$\sigma^2$の確率変数とする．$u(C)$ を$E[C]=\bar{C}$のまわりでTaylor展開すると

$$u(C)=u(\bar{C})+u'(\bar{C})e+u''(\bar{C})\frac{e^2}{2}+\cdots$$

であるので

$$\begin{aligned}E[u(C)] &\approx u(\bar{C})+u'(\bar{C})\ E[e]+u''(\bar{C})\frac{E[e^2]}{2}\\ &=u(\bar{C})+u''(\bar{C})\frac{\sigma^2}{2}\end{aligned} \tag{3}$$

と近似できる[1]．同様に$u(\bar{C}-\Pi)$ を$\bar{C}$のまわりで近似すると

$$u(\bar{C}-\Pi)\approx u(\bar{C})-u'(\bar{C})\Pi+u''(\bar{C})\frac{\Pi^2}{2} \tag{4}$$

であるので，(2) 式の両辺を (3)，(4) 式のそれぞれの第2項目までで近似すると，リスクプレミアムⅡは

$$\Pi \approx -\frac{u''(\bar{C})}{u'(\bar{C})}\frac{\mathrm{var}[e]}{2}$$

と近似される．この式はリスクプレミアムが効用関数の形状により決定される-u''$(\bar{C})$ /$u'(\bar{C})$ と不確実性の程度であるvar[$e$]/2の積で近似されることを示している．この観点から消費者の不確実性に対する選好の尺度として，以下のように絶対的危険回避度A$(\bar{C})$ が定義される．

$$\mathrm{A}(\bar{C}) \equiv -\frac{u''(\bar{C})}{u'(\bar{C})}$$

絶対的危険回避度$A(\bar{C})$ は$\bar{C}$の関数であるが，効用関数の形状によっては$\bar{C}$によらず一定の値となるケースも考えられる．そのような性質を持つ効用関数は「絶対的危険回避度一定（Constant Absolute Risk Aversion）の効用関数」と呼ばれる．簡単にCARA型効用関数とも呼ばれる．CARA型の効用関数をもつ消費者は不確実性の程度であるvar[$e$] /2が一定であれば，消費水準によらず不確実性に対して一定のリスクプレミアムを持つことになる．

### 2．2．2　相対的危険回避度

絶対的危険回避度はリスクプレミアムの近似からえられる尺度として定義された．これまで検討してきたリスクプレミアムは絶対水準で測った尺度であったが，リスクプレミアムをE[$C$] に対する比率，つまりⅡ/$E$[C] として測ることも考えられる．比率でみたリスクプレミアムを$\hat{\Pi} = \Pi/E[C]$ と定義する．

絶対的危険回避度によるリスクプレミアムの近似と同様にして，$\hat{\Pi}$ は以下の式で近似される．

$$\hat{\Pi} \approx -C\frac{u''(\bar{C})}{u'(\bar{C})}\frac{1}{2}\,\mathrm{var}\left[\frac{C}{\bar{C}}\right]$$

この式は比率でみたリスクプレミアムが，効用関数の形状により決定される$-\bar{C}$

$u''(\bar{C})$ $/u'(\bar{C})$ と不確実性の程度であるvar[C/$\bar{C}$] /2の積で近似されることを示している．水準で測ったリスクプレミアムの近似式とは異なり，var[C/$\bar{C}$] /2の部分も$\bar{C}$に依存する値であることに注意されたい．相対的危険回避度R(C) は以下のように定義される．

$$R(\bar{C}) \equiv -C\frac{u''(\bar{C})}{u'(\bar{C})}$$

絶対的危険回避度と同様に相対的危険回避度$R(C)$ は$C$の関数であるが，効用関数の形状によっては$C$によらず一定の値となるケースも考えられる．そのような性質を持つ効用関数は「相対的危険回避度一定（Constant Relative Risk Aversion）の効用関数」と呼ばれる．簡単にCRRA型効用関数とも呼ばれる．一定の相対的危険回避度を$\rho = -Cu''(C)$ $/u'(C)$ とおくと

$$\hat{\Pi} \approx \frac{\rho}{2}\mathrm{var}\left[\frac{C}{\bar{C}}\right] = \frac{\rho}{2}\frac{\mathrm{var}\,[e]}{\bar{C}^2}$$

であるので，var［$e$］が一定であれば，$\hat{\Pi}$は$\bar{C}$の増加とともに減少することになる．また，絶対水準で測ったリスクプレミアム$\Pi$も$\bar{C}$の増加とともに減少することになる．

# 3　不確実性下の消費・貯蓄行動理論と予備的貯蓄

不確実性下での消費・貯蓄行動の研究において現在でも有用なベンチマークとされているのは，Hall（1978）において定式化されたモデルである．本節では，このHall（1978）以降の研究において，予備的貯蓄と危険回避度の概念がどのように扱われているか展望していくことにする．

## 3．1　Hallのランダムウォーク仮説

Hall（1978）のモデルは以下のような時間に関して加法分離的な効用関数であらわされる生涯期待効用の最大化問題として定式化されている．

$$\max \quad E_t \sum_{\tau=0}^{T-t} (1+\delta)^{-\tau} u(C_{t+\tau})$$

$$\text{s.t.}\quad E_t \sum_{\tau=0}^{T-t} (1+r)^{-\tau} (C_{t+\tau} - \omega_{t+\tau}) = A_t$$

ここで，$\delta$は主観的時間選好率，$u(\cdot)$は単位期間の効用関数，$C_t$は$t$期の消費水準，$r$は実質利子率（時間を通じて一定を仮定），$\omega_t$は$t$期の労働所得，$A_t$は$t$期の非人的資産，$Et$は$t$期に利用可能な情報にもとづく条件付期待値である．将来の不確実性は労働所得$\omega_t$についてのみである．

Hallは，この最大化問題の解の一階の条件は以下の式で与えられることを示した．

$$E_t[u'(C_{t+1})] = [(1+\delta)/(1+r)]u'(C_t) \tag{6}$$

この式は，$t$期においての最適な消費水準$C_t$と$C_t+1$の限界効用の期待値の関係には$Ct$以外の$t$期以前の変数は影響を与えないことを示している．ここで（$1+\sigma$）/$(1+r)=1$と仮定し，さらに効用関数$u(\cdot)$が消費$C_t$の２次関数で与えられると仮定すると

$$E_t[C_{t+1}] = C_t \tag{7}$$

となり，$C_t$が$C_{t+1}$の合理的期待値となることが示される．従って消費水準の時系列の動きは

$$C_{t+1} = C_t + \varepsilon_{t+1} \tag{8}$$

と表される．ここで$\varepsilon_{t+1}$は系列相関の無い平均0，分散が一定の撹乱項であり，$t$期には予測不可能な$t+1$期におけるショックを表す．また，$\varepsilon_{t+1}$は合理的期待の仮定の下では$t$期以前の全ての情報に対して独立となる．従って（8）式はこれまでの仮定の下で消費水準がランダムウォーク[2]となることを示している．これが通常「Hallのランダムウォーク仮説」と呼ばれるものである．

このHallのランダムウォーク仮説は，効用関数を２次関数として定式化したモデルから導かれている．２次関数の絶対的危険回避度，相対的危険回避度はどちらも

一定ではない．また，4.2節でみるように，効用関数を2次関数として定式化したときには予備的貯蓄は発生しない．Hallの仮説は，予備的貯蓄の発生しないモデルに基づいて生み出された仮説なのである．以下では，このHallのランダムウォーク仮説について実証研究をおこなったものを展望していくことにする．

### 3．2　Hallのランダムウォーク仮説の反証

Flavin（1981）は，Hall（1978）のモデル[3]の所得の系列を自己回帰過程として定式化している．この定式化の下での分析では，消費の変化は所得の予測不可能な変化と相関をもつが，予測可能な所得の変化とは相関をもたないことが示された．Flavin（1981）は，この点について実証研究をおこなった．実証結果では消費の成長率と予測可能な所得の成長率とが有意に相関をもっており，Hallのランダムウォーク仮説は統計的に棄却されている．

Hall and Mishkin（1982）では，Hall（1978）のモデルに所得の一時的な変化，つまり変動所得を明示的に取り入れたモデルを定式化している．この定式化では所得の一時的な変化が今期の消費水準に与える影響は極めて小さくなる．しかしながら，彼らの実証研究では，所得の一時的な変化に対しての今期の消費水準の反応は，理論が想定するよりもはるかに大きな値として推定されている．したがって，この点においてもHallのランダムウォーク仮説は現実のデータとの整合性が低いことが指摘された．

Campbell and Mankiw（1989）では，独自の定式化のもとでHallのランダムウォーク仮説の検証が行われている．彼らの実証研究では，消費の成長率に対して過去の所得の成長率が有意に説明力を持つ結果となっており，Hallの仮説はここでも統計的に棄却されている[4]．

その他にもHall（1978）のモデルから得られるインプリケーションと現実のデータとの矛盾を指摘した研究として，Deaton（1986），Carroll and Summers（1991）等が挙げられる．このように多くの実証研究でHall（1978）のモデルに対する反証が挙げられたことから，Hall（1978）のモデルを変更，拡張して現実のデータの動きを説明しようという様々な試みがなされている[5]．以下では，それらの中でも特に，予備的貯蓄に着目した研究についてみていくことにする．

### 3．3　予備的貯蓄の理論と実証

Blanchard and Mankiw（1988）も，効用関数を2次関数として定式化したときには予備的貯蓄は発生しない点を改めて指摘している．さらに，予備的貯蓄が発生しないモデルによる分析は，不確実性が消費・貯蓄行動にあたえる影響の重要な側面を捉えていない可能性があると述べ，予備的貯蓄の影響を分析することの重要性を主張している．しかしながら，2次関数以外の効用関数の定式化では，モデルの解析的な取り扱いが極めて困難となるという問題点も指摘している．Blanchard and Mankiw（1988）は，解析的な扱いが比較的容易なCARA型の効用関数を用いて分析を行うことで，効用関数の定式化によっては予備的貯蓄が発生し，消費・貯蓄行動に大きな変化が起こることを示している．

Zeldes（1989）は効用関数をCRRA型の効用関数とし，予備的貯蓄が発生するモデルを構築した．このモデルでの所得の一時的な変化が消費に与える影響は，予備的貯蓄が発生しないモデルよりも大きいことが示された．したがって，Hall and Mishkin（1982）の実証結果と矛盾しない結果となっている．

Caballero（1990）は，効用関数をCARA型の効用関数としたモデルにより不確実性下の消費・貯蓄行動の分析を行っている．この分析では予測可能な所得の成長率が消費の成長率に影響を与えることが示された．この点は Flavin（1981）の実証結果とも矛盾しないことになり，現実のデータにおける消費の成長率と所得の成長率の関係について一つの説明を与えるものとなっている．

Carroll（1992）は，Zeldes（1989）のモデルを一部変更した「緩衝在庫モデル（Buffer-stock model)」を提示している．この「緩衝在庫モデル」もCRRA型の効用関数が仮定されたモデルであり，予備的貯蓄が発生するモデルとなっている．Carroll（1992），Carroll（1997）では，「緩衝在庫モデル」から得られるインプリケーションは、様々な現実のデータの動きと整合性が高いことが示されている．

以上のような経緯から不確実性下の消費・貯蓄行動の分析における予備的貯蓄の概念の重要性が認識され，近年でも更なる理論的，実証的分析が行われている[6]．

危険回避度一定の効用関数を仮定したモデルは，予備的貯蓄が消費・貯蓄行動にあたえる影響の分析を可能なものとしている．これらのモデルの難点は，最適な消費水準の一階の条件を解析的に解くことが困難である点である．そのため，Carroll（1997），Zeldes（1989）等の研究では，モデルのインプリケーションの多くを数値

計算や数値シュミレーションによって得ている．しかしながら，いくつかの基本的なインプリケーションは極めて単純なモデルからでも確認できる．次節では，これまでみてきたHall（1978）以降のモデルを極めて単純化された基本モデルにより順に検討し，効用関数の定式化と予備的貯蓄及び消費の成長率の関係について明らかにしていくことにする．

## 4　2期間モデルによる消費・貯蓄行動の比較

本節では，主に効用関数の定式化と予備的貯蓄及び消費の成長率の関係にのみ着目していくことにする．効用関数の定式化の違いによる消費・貯蓄行動の違いをより明確な形で検討するために，以下のような極めて単純化された消費・貯蓄行動のモデルを基本モデルとする．

### 4．1　基本モデル

期間は第0期，第1期の2期間のみとする．消費者は各期の消費$C_t$から効用を得るとし，効用関数は$U(C_0, C_1) = u(C_0)+u(C_1)$ で与えられるものとする[7]．初期資産は無いものとし，所得は各期の所得$Y_t$のみとする．ただし，$Y_t$は$t$期の期初に実現する確率変数であるとする．個人は第0期に意思決定を行うとする．第0期では$Y_0$は実現した値であるが来期の所得$Y_1$は次のような確率変数$Y_1$であるとする．すなわち，$Y_1 = Y+e$とし，$Y$は定数，$e$は平均0，分散$\sigma^2$の確率変数である．個人は利子率0で自由に貸し借りが可能とするが，第1期の期末に資産，負債は残さないものとする．したがって，第1期の消費$C_1$も確率変数となり，$E[C_1] = Y_0 - C_0+E[Y_1]$，$\mathrm{var}[C_1] = \mathrm{var}[Y_1] = \sigma^2$である[8]．

消費者はこれらの条件のもとで2期間の消費の期待効用を最大化するものとする．期待効用関数$EU(C_0, C_1)$ は$EU(C_0, C_1) = E[U(C_0, C_1)]$ で与えられるとすると，個人の最適な消費・貯蓄行動は以下のような制約条件付きの最大化問題の解として定式化される．

$$\max_{C_0, C_1} \quad EU(C_0, C_1) = u(C_0) + E[u(C_1)]$$
$$s.t. \quad Y_0+Y_1 = C_0+C_1$$

この制約付の最大化問題は目的関数に制約式を代入することで以下のような制約無しの最大化問題として考えられる．

$$\max_{C_0} \; u(C_0)+E[u(Y_0+Y_1-C_0)]$$

この問題の最大化のための１階の条件は

$$u'(C_0)=E[u'(C_1)] \tag{9}$$

で与えられる[9]．以下では，この基本モデルの効用関数$u(C)$の関数形を特定化して，それぞれの関数形から導出される最適な消費・貯蓄行動について比較，検討することにする．

## 4．2　２次関数のケース

ここでは各期の効用関数をHall（1978)，Flavin（1981）と同様の以下のような２次関数とした場合について検討する．

$$u(C_t)=-\frac{\alpha}{2}(C_t-B)^2,\quad \alpha>0 \tag{10}$$

ここで，$B$は効用の至福点（bliss point）となる定数である[10]．この効用関数の絶対的危険回避度，相対的危険回避度は$1/(C_t-B)$，$C_t/(C_t-B)$である．

第０期の最適な消費水準を$C_0^*$，第１期の最適な期待値での消費水準を$E[C_1]^*$とあらわすことにすると，(9)の条件式から$C_0^*=E[C_1]^*$である．予算制約式から$C_0^*$について解くと

$$C_0^*=\frac{1}{2}(Y_0+E[Y_1])$$

がえられる．この式は今期の所得$Y_0$と今期の消費$C_0^*$の関係である消費関数$C_0^*=C(Y_0)$とみなせる．この消費関数は切片が$E[Y_1]/2$の直線となる．したがって，限界消費性向は一定である．また，最適な消費・貯蓄行動は期待値でみた生涯所得

$(Y_0+E[Y_1])$ を各期の消費に均等に割り当てるという行動となっていることがわかる．ここで注目すべき点は消費関数が将来の不確実性からは独立である点である．すなわち，$Y_0+E[Y_1]$ が一定である限り0期の消費・貯蓄行動は変化しないことになる．特に $\mathrm{var}[Y_1]=0$ つまり不確実性が存在せずに $E[Y_1]$ が確実に実現するときと，$\mathrm{var}[Y_1]>0$ で将来の所得 $Y_1$ について不確実性が存在するときで個人の行動は変化しないことになる．したがって，以上の定式化のもとでは予備的貯蓄は発生しないことになる．

ここからは，以上のような結果が得られる背景について図解により考察することを試みる．各期の効用関数が（10）式のように与えられるとき

$$E[u(C_1)]=u(E[C_1])-\frac{\alpha}{2}\mathrm{var}[C_1]$$

であるので，上記の2期間モデルでの期待効用関数 $EU$ は以下のように $E[C_1]$，$C_0$，$\mathrm{var}[C_1]$ の関数としてあらわすことができる．

$$EU=u(C_0)+u(E[C_1])-\frac{\alpha}{2}\mathrm{var}[C_1] \qquad (12)$$

$\mathrm{var}[C_1]$ は外生的に与えられているので，消費者の選択できる変数は $E[C_1]$，$C_0$ のみである．所与の $\mathrm{var}[C_1]$ のもとで，$C_0-E[C_1]$ 平面上に一定の期待効用 $EU$ を得られる $C_0$ と $E[C_1]$ の組み合わせの軌跡を描くことができる．この軌跡は，$C_0$ と $E[C_1]$ についての無差別曲線と考えられる．本稿では，これを「等期待効用曲線」と呼ぶことにする．図1には，この等期待効用曲線が描かれている．図1は横軸を $C_0$，縦軸を $[C_1]$ とした $C_0-E[C_1]$ 平面である．

目的関数を（12）式，予算制約式を期待値の形で表すと最大化問題は

$$\begin{aligned}&\max \quad EU=u(C_0)+u(E[C_1])-\frac{\alpha}{2}\mathrm{var}[C_1]\\&\mathrm{s.t.} \quad E[C_1]=Y_0-C_0+E[Y_1]\end{aligned}$$

のように，制約の下で $EU$ を最大化する $E[C_1]$，$C_0$ を選択する問題としてあらわせる．この問題の最大化の1階の条件は

$$\frac{\partial EU}{\partial C_0} \Big/ \frac{\partial EU}{\partial E[C_1]} = 1 \tag{13}$$

である．この条件は「$E[C_1]$，$C_0$の等期待効用曲線の傾き＝期待値で評価した予算線の傾き」を意味している．したがって最適な消費の組み合わせは$C_0-E[C_1]$平面上で等期待効用曲線と予算線の接点であるという図による解釈が可能となる．この様子を示したものが図１である．ここでの期待効用の$E[C_1]$と$C_0$についての等期待効用曲線の傾きの大きさ（＝限界代替率）は以下の式であたえられる．

$$-\frac{dE[C_1]}{dC_0} = \frac{u'(C_0)}{u'(E[C_1])} = \frac{C_0 - B}{E[C_1] - B}$$

したがって限界代替率は不確実性（$\mathrm{var}[C_1]$）からは独立である．つまり，不確実性の程度（$\mathrm{var}[C_1]$ の大きさ）が異なっていても，他の条件が変わらなければ消費者は同一の形状の等期待効用曲線を持つことになる[11]．ここでの予算制約線も$\mathrm{var}[Y_1]$ からは独立であるので，$E[Y_1]$ が一定であれば，$\mathrm{var}[Y_1]$ が変化しても個人の選択する$C_0-E[C_1]$ は変化しない．したがって，上述の各期の効用関数を二次関数としたときには予備的貯蓄が発生しないという結論は，ここでの図による分析からも確認できたといえる．特に等期待効用曲線が不確実性の程度から独立であるために予算線との接点は変化しないという視覚的な解釈がえられた．

また，限界代替率＝1となるのは$C_0=E[C_1]$（45度線上）であるので，与件である$Y_0$，$E[Y_1]$ が変化し予算制約線がシフトしても$C_0=E[C_1]$ が最適な消費の組み合わせとなる．したがって，期待値で評価した所得-消費曲線は，この平面での45度線となっている．所得-消費曲線と予算線の交点と原点を結ぶ直線の傾きは最適な消費水準での消費の成長率の期待値$E[C_1/C_0]-1$に１を加えたものとなっている．したがって消費の成長率の期待値が所得の水準によらず一定となっていることも確認できる．

### 4．3　近似式による分析

上の分析では効用関数を２次関数として特定化したときには予備的貯蓄が発生しない点を確認した．以下では，予備的貯蓄が発生する効用関数の条件を図による分

析によって検討していくことにする.ここで$C_1=\bar{C}_1+e$, $\bar{C}_1$は定数, $e$は平均0, 分散$\sigma^2$の確率変数とする.

一般的な効用関数$u(C_1)$を$E[C_1]=\bar{C}_1$のまわりで (3) 式と同様にして近似すると

$$E[u(C_1)] \approx u(\bar{C}_1)+u''(\bar{C}_1)\frac{\sigma^2}{2}$$

となる. ここで

$$EU=u(C_0)+u(\bar{C}_1)+u''(\bar{C}_1)\frac{\sigma^2}{2} \tag{14}$$

とすると$E[C_1]$と$C_0$についての限界代替率は以下のようになる.

$$-\frac{dE[C_1]}{\mathrm{d}C_0}=\frac{u'(C_0)}{u'(\bar{C}_1)+u'''(\bar{C}_1)\sigma^2/2}$$

したがって, $u'''(C)>0$であれば$C_0-E[C_1]$ 平面上の等期待効用曲線の傾きは$\mathrm{var}[C_1]=0$のときと比較して$\mathrm{var}[C_1]>0$のときの方が緩やかになる. この状況を図示したものが図2である. 図2では, $\mathrm{var}[C_1]=0$のときの等期待効用曲線は点線で, $\mathrm{var}[C_1]>0$のときの等期待効用曲線は実線で描かれている.

$\mathrm{var}[C_1]>0$となると, $\mathrm{var}[C_1]=0$のときの最適点では等期待効用曲線と予算線が交わってしまうので最適な点ではなくなる. $\mathrm{var}[C_1]>0$のときの最適点は$\mathrm{var}[C_1]=0$の点から予算線上の左上の点となることが図から容易に確認される. つまり, 危険回避的な消費者で$u'''(C)>0$であれば, 将来の不確実性が存在するときには, 今期の確実な消費の主観的な価値は相対的に低下して, より高い将来の期待値を好むようになるのである[12]. $\mathrm{var}[C_1]=0$のときの最適な点は45度線上であるのに対して, $\mathrm{var}[C_1]>0$の時の最適点は45度線より上の点 ($C_0<E[C_1]$) であることは図から容易に確認される. したがって, 危険回避的な消費者で$u'''(C)>0$であれば予備的貯蓄が発生することが確認できる. 上で検討した効用関数を2次関数として定式化した例では$u'''(C)=0$であったために, 不確実性の変化による選好の変化は発生していなかったのである.

### 4．4　絶対的危険回避度一定のケース

ここでは各期の効用関数をCaballero（1990），Caballero（1991）と同様の以下のようなCARA型効用関数としたときの消費・貯蓄行動について検討していくことにする．

$$u(C_t)=-\frac{1}{\alpha}\exp(-\alpha C_t),\alpha>0 \tag{15}$$

この効用関数の絶対的危険回避度は$\alpha$となっている．また，$u'''(C_t)$の符号は$u'''(C_t)=\alpha^2\exp(-\alpha C_t)>0$であるので，前節の分析から予備的貯蓄が発生することが予想される．(9)の条件式と予算制約式から

$$C_0^*=\frac{1}{2}(Y_0+E[Y_1])-\frac{V}{2\alpha},\quad V=\log(E[\exp(-\alpha e)]) \tag{16}$$

が得られる．$V$は外生的に与えられるeの分布により決定される値である[13]．var$[e]=0$したがってvar$[Y_1]=0$のときには$V=0$であるので，生涯所得を各期の消費に均等に割り当てることになる．不確実性が存在し$V>0$のときには，不確実性の存在しないときと比較して今期の消費が$V/2\alpha$の大きさだけ減少することになる．つまり，$V/2\alpha$の大きさだけ予備的貯蓄が発生することになる．$V$の大きさは生涯所得の大きさからは独立であるので，生涯所得の大きさによらず一定の予備的貯蓄が発生することになる．したがって，このときの消費関数$C_0^*=C(Y_0)$は効用関数が2次関数のときのものを$V/2\alpha$だけ下方にシフトさせたものになる．2.2.1節でみた，絶対的危険回避度一定の効用関数を仮定することは定額のリスクプレミアムを生じさせるという観点からは，ここで得られた最適な消費・貯蓄行動の性質は自然な結論といえる．

$e$の分布を仮定せずに$V$の大きさについて検討することは困難なので，ここでは$e\sim N(0,\ \sigma^2)$と仮定することにする[14]．この仮定の下では$\exp(-\alpha e)$は平均$\exp(\alpha^2\sigma^2/2)$の対数正規分布に従うので，$V=\alpha^2\sigma^2/2$であり（16）式は

$$C_0^*=\frac{1}{2}(Y_0+E[Y_1])-\frac{\alpha\sigma^2}{4} \tag{17}$$

となる．この式では，$\sigma^2$が増加すると予備的貯蓄が増加する点が確認できる．また，$\sigma^2$が同一であっても絶対的危険回避度$\alpha$が高い個人ほど予備的貯蓄額が高くなる点も確認できる．

2次関数のケースと同様にこれまでの結果を図解していくことにする．ここでも$e$の分布を正規分布と仮定すると，第1期の効用の期待値は

$$E[u(C_1)] = -\frac{1}{a}\exp\left(-\alpha\bar{C}_1 + \frac{\alpha^2\sigma^2}{2}\right) \tag{18}$$

とあらわせるので，期待値でみた限界代替率は以下のようになる．

$$-\frac{dE[C_1]}{\mathrm{d}C_0} = \frac{\exp(-\alpha C_0)}{\exp(-\alpha\bar{C}_1 + (\alpha^2\sigma^2)/2)}$$

var$[e]=0$のときには等期待効用曲線と予算線が接するのは$C_0 = E[C_1]$の時であるので最適な点は45度線上である．var$[e]>0$のときには，等期待効用曲線の傾きはvar$[e]=0$のときよりも緩やかになるので最適な点は予算線上の左上方に移動することになる．var$[e]>0$のときの様子を図示したものが，図3である．等期待効用曲線と予算線が接する点は以下の式で与えらる．

$$C_0^* = E[u(C_1)]^* - \frac{\alpha\sigma^2}{2}$$

したがって期待値で評価した所得-消費曲線は45度線を$\alpha\sigma^2/2$だけ上方にシフトさせた直線となる．図3の点線がこの直線を描いたものである．所得-消費曲線と予算線の交点と原点を結ぶ直線の傾きは予算線が上方にシフトするほど，緩やかになっていくことが図から容易に確認される．したがって消費の成長率の期待値は所得の水準に依存することが確認できる．

## 4．5　相対的危険回避度一定のケース

ここでは，Zeldes（1989），Carroll（1992）と同様の以下のような相対的危険回避度一定型とした場合について検討する．

$$u(C_t)=\frac{C_t^{1-\rho}}{1-\rho},\rho>1 \tag{19}$$

この効用関数の相対的危険回避度は$\rho$となっている．また，$u'''(C_t)=\rho(1+\rho)C_t^{-2-\rho}>0$であるので，予備的貯蓄が発生することが予想される．

(9) の条件式と予算制約式から

$$C_0^{*-\rho}=E[(Y_0+Y_1-C_0^*)^{-\rho}] \tag{20}$$

である．この式を$C_0^*$について解くことは一般には不可能であるので，(14) の近似式と図解により分析することにする．近似式を用いたときの期待効用は

$$EU=\frac{C_0^{1-\rho}}{1-\rho}+\frac{\bar{C}_1^{1-\rho}}{1-\rho}-\frac{\rho\sigma^2}{2}\bar{C}_1^{-1-\rho} \tag{21}$$

で与えられる．このときの限界代替率は

$$-\frac{dE[C_1]}{\mathrm{d}C_0}=\frac{\bar{C}_0^{-\rho}}{\bar{C}_1+\sigma^2\rho(1+\rho)\bar{C}_1^{-2-\rho}/2}$$

となるので，$C_0-E[C_1]$ 平面上で限界代替率＝1となる最適な点の軌跡，つまり期待値で評価した所得-消費曲線は以下の式で表される．

$$C_0^{*-\rho}=\bar{C}_1^{*-\rho}+\frac{\sigma^2}{2}\rho(1+\rho)\bar{C}_1^{*-2-\rho} \tag{22}$$

この式を$C_0^*$について解くと，

$$C_0^*=\bar{C}_1^*\left(1+\frac{\sigma^2}{2}\rho(1+\rho)\bar{C}_1^{*-2}\right)^{-\frac{1}{\rho}} \tag{23}$$

となる．図4の点線は$\sigma^2=2$，$\rho=2$のときの (23) 式で与えられる所得-消費曲線を示したものである．したがって，絶対的危険回避度一定のケースと同様に消費

の成長率の期待値は所得の水準に依存することが確認できる．

予算線と45度線の交点が所得が確実なときの最適点であり，予算線と所得-消費曲線の交点が不確実なときの最適点である．したがって，予備的貯蓄は二つの交点の$C_0$の差として表されている．図4では，予算線の上方へのシフトにしたがって予備的貯蓄が減少していくことが示されている．したがって，ここでの消費関数$C_0^* = C(Y_0)$は直線ではなく，所得の増加にしたがって傾きが逓減していく曲線となることが類推できる[15]．絶対的危険回避度一定のケースと異なり，限界消費性向は所得水準に依存することになる．2.2.1節では，相対的危険回避度一定の効用関数では期待値の水準が増加すると，リスクプレミアムの額は減少していくことを確認した．この観点からは，ここで得られた予備的貯蓄と所得の関係は自然な結論といえる．

## 5　結論

効用関数の定式化と消費・貯蓄行動の関係について4節の分析で得られた結論をまとめると以下のようになる．

- 効用関数を2次関数としたときには予備的貯蓄は発生しない．

- 効用関数をCARA型としたときは，予備的貯蓄が発生するが，その額は所得の水準によらず一定額である．限界消費性向は所得の水準によらず一定である．消費の成長率の期待値は所得に依存する．

- 効用関数をCRRA型としたときは，予備的貯蓄が発生する．予備的貯蓄の額は所得の水準が上昇すると減少する．限界消費性向は所得に依存する．消費の成長率の期待値は所得に依存する．

- 効用関数を危険回避度一定としたとき，所得と予備的貯蓄との関係は，所得とリスクプレミアムとの関係に対応している．

脚注

1 この近似が有効であるためには$u'''$が有界であり，$e$の分布の3次以上のモーメントが分散と比較して十分小さくなければならない．ここでは，これらの条件は満たされているも

のとする．詳しくはSamuelson（1970）を参照されたい．

2 Hall（1978）では，（8）式ををさして，消費水準が“exact regression”に従うと表現しており，ランダムウォークという表現は用いられていない．その後の多くの文献では，（8）式をランダムウォークと呼んでおり，Mankiw（2003），Romer（2001）等の現在の標準的なマクロ経済学の教科書でもランダムウォークと呼んでいる．本稿では，これらにならって（8）式をランダムウォークと呼ぶことにする．

3 以下では（8）の定式化において効用関数を2次関数としたものを「Hall（1978）のモデル」と呼ぶことにする．

4 後藤（2004）は，近年の日米のデータについてCampbell and Mankiw（1989）と同様の手法を用いてHallの仮説を検証している．この後藤（2004）の実証結果でもHallの仮説は統計的に棄却されている．

5 このような研究としては，習慣形成仮説，流動制約仮説，耐久財支出の影響等を取り入れたモデルによるものがある．これらについての詳細は，Deaton（1992）を参照されたい．

6 最近の研究としてはGourinchas and Parker（2002），Wang（2003），Carroll, Dynan and Krane（2003）等が挙げられる．

7 簡単化の為に主観的割引率は0としている．

8 本節では，期待値Eは第0期の情報にもとづく条件付き期待値をあらわす．

9 ここでは,微分と期待値の順序交換は可能であるものとする

10 $C_t$ >Bでは，消費者は危険回避的ではなくなる．ここでは，$Y_0+Y_1<B$が常に成立すると仮定する．したがって，常に$C_t<B$である．

11（12）では，var[$C_1$]の変化は期待効用をシフトさせるだけである．期待効用は正のアフィン変換に対して一意的であるので，不確実性の程度が変化しても選好が変化しないことは（12）式からも確認される．

12 このような$u'''$の重要性から，Kimball（1990）では$u'''$までの影響を考慮した慎重度（prudence measure）という尺度が提示されている．

13 Jensenの不等式より$E[\exp(-\alpha e)] \geq \exp(-\alpha E[e])=1$なので$V\geq 0$である．

14 正規分布を仮定すると，負の所得が起こりうるなどモデルの現実妥当性が失われてしまう．ここでの仮定は一定のインプリケーションを得るための便宜的な仮定である．

15 Carroll and Kimball（1996）では，CRRA型を含むHARA型とよばれる関数型について，消費関数$C_0^*=C(Y_0)$が厳密な凹関数となることを証明している．

## 参考文献

Arrow, K. J.(1951) Alternative Approaches to the Theory of Choice in Risk-Taking Situations, *Econometrica*, Vol. 19, No. 4.

Blanchard, O. J. and N. G. Mankiw(1988) Consumption: Byond Certainty Equivalence, *American Economic Review*, Vol. 78. No. 2, Paper and Proceedings.

Caballero, R. J.(1990) Consumption Puzzles and Precautionary Savings, *Journal of Monetary Economics*, Vol. 25. No.1.

Caballero, R. J.(1991) Earnings Uncertainty and Aggregate Wealth Accumulation, *American Economic Review*, Vol. 81, No. 4.

Campbell, J. Y. and N. G. Mankiw(1989) Consumption, Income, and Interest Rates: Reinterpreting the Time Series Evidence, in Blanchard, O. J. and S. Fischer. eds. *NBER Macroeconomics Annual* 1989, Cambridge, Mass. and London: MIT Press.

Carroll, C. D.(1992) The Buffer-Stock Theory of Saving: Some Macroeconomic Evidence, *Brookings Papers on Economic Activity*, 1992.

Carroll, C. D.(1997) Buffer-Stock Saving and The Life Cycle/Permanent Income Hypothesis, *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 112. Issue 1.

Carroll, C. D., and M. S. Kimball(1996) On The Concavity of the Consumption Function, *Econometrica*, Vol. 64, No. 4.

Carroll, C. D., and L. H. Summers. (1991) Consumption Growth Parallels Income Growth: Some New Evidence, in Bernheim, B. D. and J. B. Shoven eds. *National Saving and Economic Performance*, University of Chicago Press.

Carroll, C. D., K. E. Dynan, and S. D. Krane(2003) Unemployment Risk and Precautionary Wealth: Evidence from Households' Balance Sheets, *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 85, No. 3.

Deaton, A. S. (1986) Life-cycle Models of Consumption: Is the Evidence Consistent with the Theory?, *NBER Working Paper*, No. 1910.

Deaton, A. S.(1991) Saving and Liquidity Constraints, *Econometrica*, Vol. 59, No. 5.

Deaton, A. S.(1992) *Understanding Consumption*, Oxford University Press.

Flavin, M. A.(1981) , The Adjustment of Consumption to Changing Expectations About Future Income, *The Journal of Political Economy*, Vol. 89, No. 5.

Gourinchas, P. O. and J. A. Parker(2002) Consumption over The Life Cycle, *Econometrica*, Vol. 70, No. 1.

Hall, R. E.(1978) Stochastic Implications of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence, *The Journal of Political Economy*, Vol. 86, No. 6.

Hall, R. E. and F. S. Mishkin(1982) Sensitivity of Consumption to Transitory Income: Estimates from Panel Data on Households, *Econometrica*, Vol. 50, No. 2.

Kimball, M. S.(1990) Precautionary Saving in the Small and in the Large, *Econometrica*, Vol. 58, No. 1.

Leland, H. E.(1968) Saving and Uncertainty: The Precautionary Demand for Saving, *Quarterly Journal of Economics* Vol. 82.

Mankiw, N. G.(2003) *Macroeconomics*, 5th ed. Worth Publishers.

Pratt, J. W.(1964) Risk Aversion in the Small and in the Large, *Econometrica*, Vol. 32. No. 1-2.

Romer, D.(2001) *Advanced Macroeconomics*, 2nd ed., McGraw-Hill.

Samuelson, P. A.(1970) The Fundamental Approximation Theorem of Portfolio Analysis in terms of Means, Variances and Higher Moments, *The Review of Economic Studies*, Vol. 37, No. 4.

Zeldes, S. P.(1989) Optimal Consumption with Stochastic Income: Deviations from Certainty Equivalence, *Quarterly Journal of Economics* Vol. 104, No. 2.

Wang, N.(2003) Caballero Meets Bewley: The Permanent-Income Hypothesis in General Equilibrium, *American Economic Review*, Vol. 93, No. 3.

後藤智弘（2004）「ライフサイクル・恒常所得仮説の検証及び一試論―Campbell and Mankiwモデルに基づく実証分析-―」『青山社会科学紀要』第33巻　第2号.

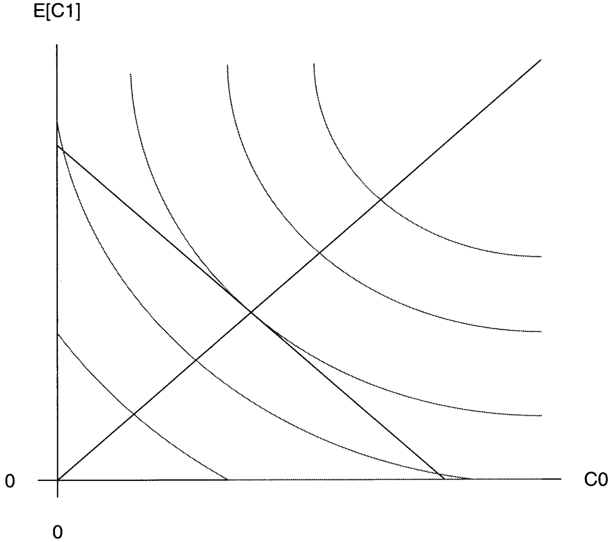


図１　２次関数のケース

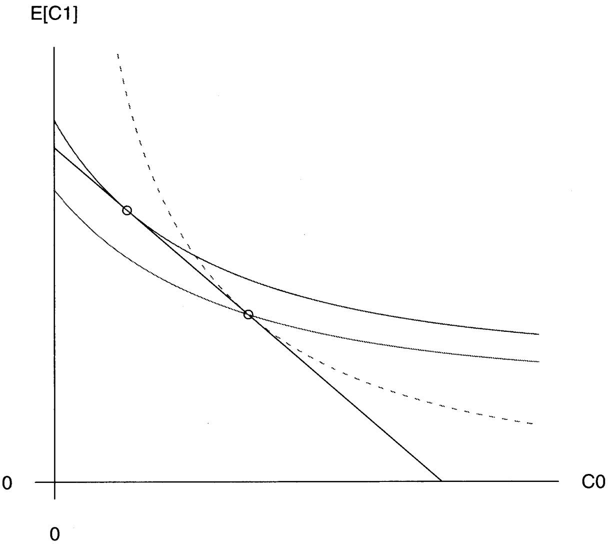


図２　不確実性の影響

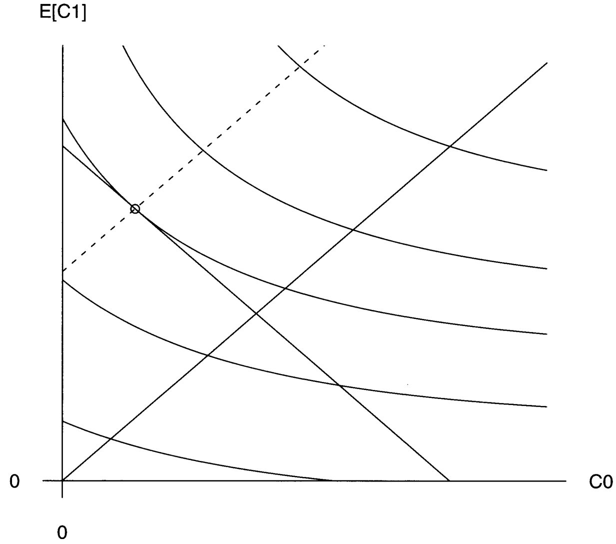


図 3　CARA型のケース

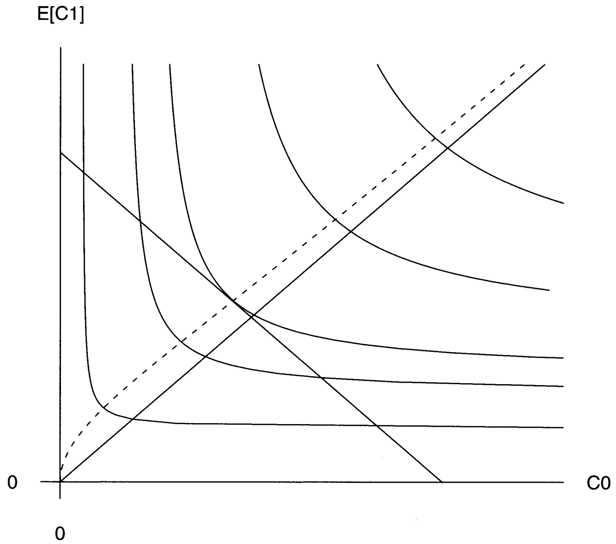


図 4　CRRA型のケース