倍の発展支援への提案

―累加から拡大へ―

For the Developments of Meaning from “Times” to “Magnification”

正田（しょうだ）　良（りょう）

はじめに

本稿では、有理数倍に関して子どもの実感を伴う把握への支援のために、動的変化を表す図を小学校４年の算数の授業で用いる提案をその目的とする。その範囲の限定や論拠に関して、次の手順によって記す。第１節では、「整数倍」から「小数倍」での意味の発展に関して、第２節では、教育課程上の関連に関して、第３節では特に小５の乗法に関し先行する研究に関して述べ、第４節で教育課程の中にどう位置付けるのかについて提案する。

１．教育の過程としての教育課程

正田良（2015）で、子どもに数学の概念や技能を獲得させる過程に於いて用いる半具体物などの重要性は、必ずしも数学の答案として必要性に一致しないことを述べた。例えば、小学校１年の繰り上がりのある足し算での、10の補数や数の分解に関する補助記号、足し算の筆算などは、抽象的な手順を具体的な図や作業に変えることができるので大変有用である。しかし、それがうまくできるようになれば、書くのが面倒になり、また高学年の答案で、記すことは要求されないものである。

量を数で表すことについて、宮下英明（2011）は、次のように指摘した。［m］や［g］などの単位を定めて、所与の量がそれの何倍であるかによって、量を数であらわしている。そのため、量×量は、それぞれの量を表す数の乗法に帰着される。これは、ここで論じられている量が、スティーブンズ（1946）の言うような「比例尺度」である限り正しい。

しかし宮下自身（2012）が言うように、「教育では、非明証は明証に改まるがよいのではない。実際、教育場面での非明証には、だいたいの場合、理が認められる」。ここで問題としているのは、有理数倍である。この有理数倍に関して、子どもの中に適正な概念がない限り、その目的の達成は難しくなる。ここに、教育の過程としての数学の答案としては不必要なものの有用性が主張される。

前掲の正田（2015）で、有理数倍について述べた。必要な範囲で振り返っておこう。小学校２年生に「倍」という言葉が導入される。ここでの「N 倍」は、「N 個分」の言い換えに過ぎない。これを有理数倍へ拡張するに当たって、3.6などの整数ではない有理数の場合、平均としての表示でもない限り3.6個や、3.6人という表し方は不自然である。藤枝美智子（1983）は次のように、言い換えとしての「倍」や、累加での乗法の意味づけの困難性を述べ、関数の一種として扱うことを主

張した。

> 「倍」は、かけた数が大きくなる２倍以上の場合に使われるのが普通で、１倍、０倍とは何か、が問題となります。また、0.3倍や$\frac{1}{4}$倍して、答えがもとの数より小さくなると、「倍」のイメージとぴったりしなくなります。(p.151)

また、「『倍』は、量の大きさを表わす数ではなくて操作を表わす数なので」(p.151)、

> かけ算は、初めから量×量で導入する方が…（中略）…、適切です。倍は、もともと関数なのです。ですから量×量の乗法の意味がわかり使いこなせるようになってから、…（中略）…とりあげた方がよいのです（p.152）

礒田正美（1987）は、ファン・ヒーレの理論を援用して関数が数よりも抽象度が高いことを指摘した。平林一栄（1980）は、

> あるお金で同じ単価の鉛筆が何本買えるかというような計算を何回くり返していても「関数」の概念は生まれてこないであろう。…（中略）…それを積極的にとり出して意識させるには、…（中略）…ブラック・ボックスあるいは自動販売機の模型が適切

としている。関数という抽象的な対象をより具体的に見えるものとする必要性を指摘したものと理解できるだろう。このような関数としての「倍」を「整数倍」から「有理数倍」へ概念を発展させることが、小学校の算数に求められている。

なお、必ずしも教師が示した図が、子どもの思考にそのまま役立つとは限らない。正田良（2014a）に、「児童が自発的に描く図には、教科書などで指導されている図のタイプとは異なるものが多い。しかし、松下佳代は『教師の伝達と、子どもによる考え方の対立』という図式は、単純化のしすぎと指摘している」(引用中の文献注は略した）と記した。つまるところ、実際の授業で使われた図が、どう子どもを動かしたかという特殊な事実の積み重ねによる「実証」を俟たねばならないところである。

２．小数に関する教育課程

２つの有理数の表現形式には、分数と小数の２種類がある。ここでは、量×量の乗法に注目するために、まず小数に注目する。分数については、前掲正田（2015）で見たように、関数の合成、逆などと総合した扱いをする必要があるためである。

連続量を数で表すことは、算数の現行の教育課程（文部科学省、2008）では、小学校１年から２年にかけて、量の４段階指導が位置づけられている。長さを直接比較で比べることを端緒とするが、小学校２年では、鉛筆１本分の長さなど、基本となる長さのいくつ分かで大きなものの長さを表す個別単位（任意単位）で、数を用いて量を表す活動を行う。これは間接比較を行うときに必要となる一方の長さのコピーを作ることができないときでも、比較ができる優位性がある。直接比較によってＮ個に関して、それぞれの特性として持つ量の大きさの順に並べる場合の、比較回数を考える。最良の場合は、大きさの順の予想をし、それが当たっていた場合である。予想の順に隣とな

る関係の比較をすれば、間接比較によって隣接する以外の大小関係も知られるので、（N－1）回で済む。一方、最大値は、比較される個数Nの2乗のオーダーで増加する。しかし量を数で表しておけば、その数の大小で並べればよい。そこにこの良さを認めることができる。ここでは、整数個分が表現の主流であって、ときとして「3個分よりちょっと大きい」のように言葉で補足することもある。また小学校2年では、3cm 6mmのような補助単位を使って半端な量を表すことを扱う。補助単位によって基本単位よりも小さな量を表すことができる。

一方、小数の導入は小学校3年で為される。例えば1L 2dLと複名数で表される液量は、小さな単位dLで表せば、単名数の12dLと表すことができる。大きな単位Lを使って単名数で表すには、1.2Lと小数を必要とする。この小数の導入によって既存の補助単位がない場合でも、はしたや小さな量を表すことが可能となる。小学校4年では、小数×整数の乗法、小学校5年では小数×小数が扱われる。

倍という言葉は、学習指導要領では、［用語・記号］としての記載はなく、小学校3年の「2. 内容　A数と計算（1）イ」に、10倍、100倍、$\frac{1}{10}$の大きさの数及びその表し方について知ること」とあるだけである。それに準拠した教科書についてみておこう。算数の教科書を発行しているのは6社であるが、そのうち占有率が比較的高い3社について調べた結果を表1として示す。

低学年の児童への記述であるので、いたずらに数学的な厳密性を避けて、例を挙げてそれについての具体的な記述をし、一般的な場合は類推させる書き方となっているが、「～個分」の言い換えとして、「～倍」を説明してあり、既に見たように乗数が小数となったときの困難が内包されている。

表1：小学校2年での倍の定義

使用開始＼発行所	2・東京書籍	11・学校図書	61・啓林館
平成23年	3cmの2つ分のことを、3cmの2ばいといいます。 3cmの2ばいの長さをもとめるときも、3×2のかけ算のしきになります。（テープ） 3つ分、4つ分のことを、3ばい4ばいといいます。1ばいは1つ分のことです。（下p.10）	1こ分、2こ分、3こ分のことを、1ばい、2ばい、3ばいともいいます。（下p.14）	6cmの2つ分のことを、6cmの2ばいともいいます。（電車）6の1つ分のことを6の1ばいといい、6×1としきにかきます。（下p.7）
平成27年	同上（下p.10）	同上（下p.13）	4cmの2つ分のことを、4cmの2ばいともいいます。（下p.8）

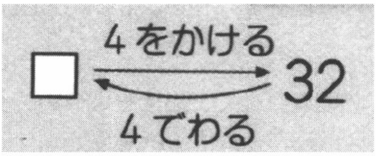
これ以降の教科書の記述に、「関数としての倍操作」に関して各社の工夫を見ることができる。【発行所番号・使用開始年度：巻名・ページ】の要領で書誌事項を略記して記す。

①【61・H23：３年上・p.100】 ２ｍを３倍して２倍することを、それぞれの倍操作を「 → 」で表示した図。

②【61・H27：３年上・p.110】 図鑑１冊の厚さの９倍が本立ての幅の54cm であることを、９倍を「 → 」で表示し、□として記されている図鑑１冊の厚さを求める。

③【61・H23：４年上・p.34】【61・H27：４年上・p.40】学校の校舎の高さの２倍がデパートで、さらにその３倍がテレビ塔であることをそれぞれの倍の関係を「 → 」で表示し、テレビ塔の高さ90m から、学校の校舎の高さの何倍がテレビ塔の高さか、また学校の校舎の高さは何かを求める。

④【61・H23：４年上・p.56】【61・H27：４年上・p.102】



のように、乗法と除法との関係を示した図。

⑤【２・H23：３年上・p.35】 等分除・包含除の次に、割り算の第３の種類として「何倍かを求める計算」の節を設けていた。H27使用開始版ではなくなっている。「～倍」が「～個分」の言い換えである立場では、包含除として分類される計算であるからだろうか。

また、学校図書（【11】）では、『みんなと学ぶ小学校算数　編集の趣旨と特色』http://www.gakuto.co.jp/web/h27/junsansu/pdf/h27junsansu.pdf にあるように、「４ます関係図」として、比例する２量の関係を倍操作の矢印で示す図も採用している。

３．５年の小数の乗法

3.1　掛け算の意味づけ

中村享史（2008）は、それまでに行われた議論をバランスよく紹介し、「一般に掛け算の意味づけには、次のものがある」と、（ア）累加、（イ）基準量×割合（倍）、（ウ）言葉の式（公式）、（エ）量×量の４通りの分類を示した。これに多くを負いながら議論の概要を見ることにしたい。

数学教育協議会（以下「数教協」と略す）では、掛け算を次の３通りに分類する。①２ｍ × ３ ＝６ｍの「倍」、②２ｍ × ３ｍ ＝ ６ m^2の「面積」、③２ｍ／秒× ３秒＝６ｍの「量と量との積」である。後２者相互の関係を「掛け割図」の利用として次のように解釈することができる。数教協では「掛け割図」として、２つの量を長方形の縦・横の長さ、長方形の面積を２量の積として表すことを推奨している。これは前掲の正田（2015）で述べた中村幸四郎のデカルトの業績の紹介によって、「長さをすべての間隔尺度を表す典型量として表示する行為」と解釈することができる。これは、上記の分類で言えば、（エ）によって乗法の意味づけが行われると言える。また、それぞれの量の個性を捨象した掛け割図によって積の数値を求めることになる。

しかし前掲の中村享史は、これについて疑問を呈している。杉山吉茂（2008）には、その疑問が

明確に提示されている。

> 皿に盛ってあったとしても、３個は３個です。この12個は皿がないときの12個ですが、同じものでありながら、この饅頭の３のときは内包量で、12個になると外延量になることです。１当たり量、１皿あたりと言っているので、まあ分からないわけでもないですからいいんですが、速さなどと違っておかしなところも出てきます。(p.140)

確かに、内包量として外延量としての１当たり量と区別できる、(速度、距離)、(密度、質量）での２量の乗法と、タイル図あるいはアレイ図の１列のコピーを作っていく作業とは区別が必要であろう。しかし、その一方で、小数の割り算の導入では、例えば、

> ２L 入りが390円、1.6L 入りが320円で売られているジュースがある。どちらを買う方がお得だろうか。(【11・H23：５年上・p.66】)

などのように、量の導入とはいかないまでも、同じ分量に揃えて比較するなどの「なぜその割り算を行う必要があるか」という、商を計算する目的を理解させることも大切だろう。このような中間的な意味付けの程度も学年によってはあり得る。量としての定式化が為されるかどうかは問わず、小数の乗除について現実世界での関連する事態を適切に提示することは、授業の導入として特別なことではない。

分類の「(ア）累加」に関しては、既に１.でみたように掛ける数が小数になると、意味の拡張が必要となる。しかし多くの教科書は、「(１m の値段）×（長さ）＝（代金)」のような言葉の式が示され、それに当てはめる、つまり（ウ）によって掛ける数が小数になっても公式が使えるとして立式を行わせている。しかし、これだけでは積の値を求めることは困難である。

前掲の中村享史は、「かけ算の意味は数直線を用いて割合で行う」ことを提案する。なぜ数直線を用いるか。「数直線は、数量の関係が比例関係にあることを直観的に捉えることができるものである。かけ算では、比例関係をもとに立式する」(p.31）とある。この「直観的に」の部分を考察するのはやや難しい。杉山吉茂（1986）は、ともすれば循環論法になってしまいそうな論理関係を次のように整理している。

> 現実の問題の場では、たとえば、１m300円の布地の１/100m の代金や１/1000m の代金などは無視するに違いない。しかし、乗法を使う場合は、そのような小さい数の場合にも必ず比例すると仮定する、あるいは、約束する必要がある。…この段階では、比例するということばを学習していないので、その表現を用いることはできないが、一方が２倍、３倍になれば、他方が２倍、３倍になるということが、どんな数の間にも成り立つことが前提になっている。(p.221)

この前提は、現実世界の具体的な量的な設定の解釈として認められるものである。つまり、(エ）量×量　での意味づけにも通用する。そこで、「(イ）基準量×割合（倍)」と（エ）との関係について、量の４段階指導の立場から次に詳しくみることにしよう。

3.2　図化から積を求める操作へ

3.2.1　長さの連続量化

東京書籍（【２】）は、

https://ten.tokyo-shoseki.co.jp/text/shou/sansu/files/web_s_sansu_kaisetu_37.pdf（2015.9.27採取）にあるように、『演算決定に関わる図の取り扱いと系統』として、２本の平行な数直線の図を系統的に抽象化している。例えば、次のような記述がある。

⑥ 【２・H23：４年上・p.44】【２・H27：４年上・p.52】おとなのクジラの体長（15m）が子どものクジラ（３m）の状態を、絵で示し何倍であるかを求めさせる。その際に何倍かを示す数直線が添加されている。

この「求めさせる課題」は、２.⑤でみたように、「包含除として分類される計算」である。しかし単に計算を行うのではなく、図として「何倍かを示す数直線が添加」が行われている。「子どものクジラの体長」という任意単位によって「おとなのクジラ」の体長が測定されている。このような作業は、学習指導要領では「B：量と測定」領域となるが、この測定に便利なものさしが準備されたことになる。

加藤久和（2004）は、ナットの幅や、ゼムクリップの長さを任意単位として、ものの長さを測る活動を行う。そこで、１個ずつ並べる動作を楽にする道具として、マイ定規を作らせている。両面テープでクリップなどの実物を厚紙に貼るのだが、ここではものの個数を数えることがはかる動作となる。ここでの数は、いわゆる「将棋盤型」であるが、次に長さに対応した個数を「碁盤型」の目盛として記すことによって、連続量としての長さが生じ、２個分と３個分との間の長さを把握することが可能となる。そのような一連の活動の結果として、上述の「測定に便利なものさし」が準備されることとなる。

しかし測定をすることと、何倍かを求めることとは異なる。前者は目盛を読み取る際の誤差を許容するのに対して、後者は計算によって必要とされる有効数字の桁数を求めることが要求される。そして、その計算は上述のように、「包含除として分類される計算」なのである。ここの過程は、整数個分の場合にはある程度触れられているものの、小数倍の場合には明示されている例をあまり見ることはない。杉山吉茂（1986：p.223）に見られるように、包含除の割り進みから半端の意識へ発展させる過程を大切に扱いたい。

3.2.2　長さの代表量化

既に3.1で触れたように、液量や重さなどの種々の量は、長さという典型的な量を用いて表すことができる。またそのような表し方は、棒グラフや折れ線グラフを作るときに必須な考え方である。教育課程上でも、「簡単なグラフ…（中略）…から、数が最も多いなどの特徴を読み取ったりすることができるようにする。…（中略）…それぞれ大きさが比べやすくなり、違いを読み取りやすくなるのである」（文部科学省、2008：第３章２.第２学年の内容、D（３）簡単な表やグラフ）

このような動作が当然、より高学年での、グラフを用いて表すことや、グラフを読み取ることを通じて、連続量を表すことについても敷衍されていく。それらの長さの比較において、何倍かを調べる活動が行われる。ここでの「倍」という言葉は、全体の量に対する部分の「割合」という言葉の意味を包含する。また「割合」という言葉は、基準より大きなものを表すための「倍」の意味を包含させて考えることによって、２つの言葉は同じものとしてとらえることとする。

さて、この「小数倍」の指導と、割り算の商や掛け算の積を求める計算の指導は、どちらが先行するべきだろうか。何倍かを計算するのに、包含除を行うことになる。そのとき、小数が商となる計算結果、並びに掛け算の積を求める方法が既習である必要がある。そこで、後者（割り算の商を求める）を前者（小数倍）に先行させるべきである。そして後者の導入には、3.1で述べたように、「『なぜその割り算を行う必要があるか』という、商を計算する目的を理解させる」ための発問が必要となる。

秋田敏文（2004）は、異種の量の割合を分類し、密度型と速度型とに分けた。密度型は土台となる量が見えやすいので、速度型よりも先に教えるべきであるとした。原万里子（2007）は、同種の量の割合を（A）２つの部分を比べたときの割合、(B) 全体の中のどれだけにあたるかという問題、(C) 確率的な問題との３つに分類し、この順に教えるべきであることを主張している。板垣賢二による割合定規（例えば、市川良（2004））は、典型的な量としての長さを扱うものであって、上述の（A）のための教具として位置付けることができる。

3.2.3 小数倍の積を求める方法

上述のように、小数倍を考える前に、そうした倍操作の結果としてどのような値になるかを計算する方法が必要となる。長さを、各種の量を図として表す典型的な量ととらえる。このような図化において、次の２つが代表的な表し方であることを3.1で見てきた。第１は、平行な２本の数直線による方法で、第２は「掛け割図」による方法である。

小数×小数の積を考える際に、大きく分けて次の３つの考え方を想定することができる。例として、1.2×2.3という計算を考えるための文章問題として、次の枠内のものを考えよう。

１Lあたり1.2kgのスープの原液が2.3Lあります。この原液全体の重さは何kgですか。

（甲）単位をLとかkgにしたので小数を扱うことになったが、単位を変えれば整数倍にすることができる。１Lあたり1.2kgであるとは、１dLあたり0.12kgで、これは120gである。2.3Lとは、23dLであるので、求める重さは、120×23＝2760［g］。つまり、2.76［kg］

（乙）2.3Lとは、0.1Lが23個分あるということである。また、0.1Lの重さは、1.2kgを10等分した0.12kgなので、既習の（小数）×（整数）を使って、0.12×23。

（丙）1.2kgを10倍、また、2.3Lも10倍すると、12×23＝276kg。これはそれぞれ10倍したもので、積全体では100倍したことになる。

（甲）は、量を背景とした単位の置き換えによる方法である。この場合kgよりも小さな重さの単位で既知のものが、gのみであったので、120gとしたが、kgを100等分した単位［dag］（デカグラム）を用いれば、桁数を１つ減らした計算となったので、不効率な計算であった。またいつも量を仲立ちとして計算するのも効率が悪い。

（丙）は、いわゆる「計算のきまり」を用いている。式で書けば、

$$1.2 \times 2.3 = (12 \div 10) \times (23 \div 10) = 12 \times 23 \div (10 \times 10) = 12 \times 23 \div 10^2$$

となる。これは、後に筆算の方法としてまとめられる原理に一致するものであるが、「計算のきまり」は、形式的操作に関わるものであるので、必ずしもすべての子どもがすぐに理解できるものとは言えないだろう。（乙）は両者の中間的なものである。

最終的には、どの方法も子どもに理解させたいところだ。（甲）をとっかかりとしてこの問題を扱えた子どもが、授業での集団解決の中で、（乙）や（丙）の考えを聞き自分のものとし、（丙）での理解を示している子どもが（甲）の考え方を聞いて、より根本的な手順を知る。こうした交流ができる授業が望まれるところだ。

そこで再び図の役割について考察したい。掛け割図を用いる授業に関してこのような段階を考えたことがある（注）。

現実世界で解決するべき問題状況	→	折り紙）1kgをはっきりさせるための同型な状況	→	実はグチャグチャ）理想をノートに数値化	→	各次元での最小単位をもとに「細胞」への注目	→	普遍化）計算の算法
		作業（試行錯誤）から				数値化		論理へ

上述の枠内の問題で言えば、初めの問題から掛け割図に行く前に、１×１を意味する折り紙を、10等分を意味する線で切りながら、台紙に示された、1.2×2.3を意味する長方形に貼る作業が挿入される。このような作業を通じて、0.1×0.1を意味し、数としては0.01と見ることができる小さな正方形がいくつあるかという計算として、手作業では不正確になりやすい作業の理想化として数値化が行われる。

一方２本の平行な数直線の場合では、10等分の操作をやや抽象的な図解として示す必要があり、積を求める手順としてもせいぜい（乙）の考えにとどまり、（甲）でいう0.01の個数を考えるところまで図が思考を想起させない心配がある。むしろ、この例題で言えば、10等分して23倍するといった合成操作を、２．で「関数としての倍操作」として紹介した方法で示すことが（丙）の理解に有効となるだろう。

3.3　比例的推論と関数の考え

藤村宣之（1995）によれば、「ＡとＢを同じ濃さにするには、Ｂにオレンジカルピスを何杯いれ

るとよいか」という問題を、実際の水とオレンジカルピスを材料として、比例的推理による予測や操作を子どもに行わせ、しばらくしてから事後テストを実施したところ、小学校４・５年には有効であったが、３年生については、当初は理解を示していても事後テストでは事前の状態に戻ってしまうことが多かったという。

例えば下道成人（2006）のように、「『差』の見方から離れられず、『倍』の見方で比べる割合のよさを感じることが難しい」と指摘されることがある。動的な操作としての「倍」を導入したとしても、子どもの発達上の基盤を欠いていては適切な支援とは言えない。

また、乗法を含んだ関数の合成や逆については小学校３年では困難であることを正田良（2014b）に報告した。小数の認識や、倍という操作、図への表現と読み取りなどの教材の適切な系列を子どもに提供することが求められるところである。

４．まとめとして

以上に述べてきたことに従って、教育課程へ特に付加的に配置するべき教材を考えたい。紙幅の関係で、表２へまとめることによって記す。

表２：倍の発展支援のための教育課程

学年	2008年告示での学年配当	量の４段階指導	動的な倍操作
小２	かけ算九九、 個別単位と普遍単位	典型量としての長さ	
小３	かけ算の筆算、割り算、0.1	離散量の掛け割図	
小４	割り算の筆算、0.01、 小数×整数	個別単位の小数への拡張← 小数÷整数の量的意味付け（２者の比較）	・何倍かを示す割り算（整数倍） ・合成と逆（整数倍）
小５	小数×小数、分数×整数、 密度型内包量	連続量の掛け割図	・小数×小数の合成倍操作としての解釈
小６	分数×分数、速度型内包量	正比例のグラフの活用 ４ます関係図	・分数×分数の合成倍操作としての解釈 ・比例的な量関係

左にあるものを右に書くことは省いた。また、各行において項目は同時に行われるものではなく、「←」を除き左の内容を受けて右の内容が準備される。

［注］：明星学園小学校の公開研究会（2015年11月28日）での協議並びに、その準備のための研究会で、先生方から示唆に富む論議を戴いた。ここに記して謝意を表したい。

[参考引用文献]

秋田敏文（2004）『いきいき算数６年の授業』ひまわり社

藤枝美智子（1983）「かけ算の導入」Ⅱ第１階梯　§４、日本教職員組合（1983）『さんすうの授業』一ツ橋書房

藤村宣之（1995）『認知心理学からみた　数の理解』北大路書房

原　万里子（2007）「文章題からの立式と割合としての量」『初等教育論集』第８号、国士舘大学初等教育学会、pp.65-80。http://bungakubu.kokushikan.ac.jp/shotoukyouiku/Ronshu/shotrn/shotrn08.pdf

平林一栄（1980）「教具論」、赤摂也（編著）『算数・数学教育の理論と構造』（教育学講座11）学習研究社、p.301

礒田正美（1987）「関数の思考水準とその指導についての研究」『日本数学教育学会誌』第69巻第３号

市川　良（2004）『いきいき算数５年の授業』ひまわり社

加藤久和（2004）『いきいき算数２年の授業』ひまわり社

宮下英明（2011）「数と量の関係は、〈数は量の比〉であって〈数は量の抽象〉ではない」『日本数学教育学会誌』Vol.93（2011）No.８　pp.２-11

宮下英明（2012）「『数直線でかけ算』指導の明証性の構造」『日本数学教育学会誌』Vol.94　No.８　pp.２-11

文部科学省（2008）『小学校　学習指導要領解説　算数編』東洋館出版社

中村享史（2008）『数学的な思考力・表現力を伸ばす算数授業―教材の本質を問い、学び合いを通して』明治図書出版

下道成人（2006）「第５学年　割合の指導を考える」（第２回関西算数授業研究会（於：大阪教育大学附属池田小学校　８月29日）当日配布資料）

スティーブンズ（1946）「測定尺度の理論について」『サイエンス』（http://www.sciencemag.org/content/103/2684/677）

杉山吉茂（1986）『公理的方法に基づく算数・数学の学習指導』東洋館出版社

杉山吉茂（2008）『初等科数学科教育学序説』東洋館出版社

正田　良（2014a）「『魔法の旗についてのクイズ』の作製」青山学院大学教育学会紀要『教育研究』第58号、pp.１-17

正田　良（2014b）「『魔法の旗についてのクイズ』の試行報告」『学芸大数学教育研究』第26号、pp.39-48

正田　良（2015）「『分数の乗法』をめざした倍操作の教材系列」青山学院大学教育学会紀要『教育研究』第59号、pp.１-22