研究ノート

予算集合の配分のランキング[1)]

宮 城 島　　要[2)]

概要

本稿では，生産経済における予算集合の配分を社会的に評価する方法について考える。予算集合は，個人が労働量と消費バンドルを選択する機会であり，何らかの意味での自由をその個人に与えると考えられる。各個人はそれぞれ異なる予算集合上のランキングと生産スキルを持つと仮定される。これらの情報を集計し，予算集合の配分を機会の平等の観点からランク付ける方法を構築する。本稿では，集計の原理として，弱パレート原理，ハンソン独立性，分離可能性という社会的選択理論の分野においてよく知られているものに加えて，機会の平等に関係した二つの公理を導入する。これらの公理から，二つのランキング方法を導出する。

1.　イントロダクション

本稿では，生産経済において，人々に関する多様な情報を基にして予算集合の配分をランク付ける問題について考える。予算集合は，財空間における個人の機会集合であると考えられる。本稿では，機会集合の配分の評価に関する公平性や効率性などの公理から，予算集合の配分に関するある社会的なランキングを導き出す。

---

1)　本稿は筆者の博士論文第 4 章に基づいている。大学院において指導をしてくださった鈴村興太郎氏，蓼沼宏一氏，吉原直毅氏，坂本徳仁氏に謝意を表する。本稿における誤りは全て筆者の責任である。また，本稿は青山学院大学経済研究所の研究プロジェクトの成果である。

2)　青山学院大学経済学部経済学科

機会集合の内在的価値を考慮した幾つかの研究では，財空間における機会集合として線形予算集合が扱われた（Sen (1993)，Tadenuma and Xu (2002)，Xu (2004)，Kolm (2010)，Miyagishima (2010) を参照)。しかし，Thomson (1994) が議論したとおり，非線形の課税政策，福祉プログラム，数量割引や二部料金制などが原因で，現実の予算集合は線形にならない場合が多く，凸性を満たさないことも稀ではない。そこで本稿では，必ずしも凸性を満たさないような予算集合を機会集合として考える。

本稿では，二つの点において個人間に違いがあると仮定する。第一に，生産スキルに差違があるという仮定である。このことから，労働一単位当たりの賃金率が個人間で異なる状況が生じる。第二に，予算集合の評価基準が異なるという仮定である。また，機会集合のランキングルールに関して，望ましいと思われる公理は人の価値判断によって異なりうるであろう。採用される公理が異なれば，そこから別のランキングルールが導かれうる。この場合，人々の間で異なるランキングルールが用いられる可能性がある。他の関連研究（例えば，Herrero et al. (1998), Bossert et al. (1999), Gotoh and Yoshihara (2003) など）においては，人々の機会集合に関する評価は同一であると仮定された。しかし，人々の機会に関する評価の多様性を考慮すると，異なる予算集合上の評価を集計することは，興味ある問題であるといえるだろう[3)]。

集計に関する原理として，弱パレート原理，ハンソン独立性，分離可能性などの社会的選択理論でよく知られている公理に加えて，機会の平等に関する次の二つの公理を社会的ランキングルールに要求する。第一の公理は，予算集合について同じランキングを持つ二人の個人について，その二人の間で不労所得の違いによる機会の不平等があるとき，その機会の不平等を減少させる所得移転は社会的ランキングによって弱い意味で選好されることを要求する。この公理の含意は，同じランキングを持つ二人の個人が，そのランキングに照らして同程度に価値のある機会を保障しようとする所得移転政策が社会的に受容され

3)　他の関連する研究として，Kolm (2004) と Savaglio and Vannucci (2009) は非線形予算集合のランキング問題を考えた。

るべきだと解釈できる。第二の公理は，全ての個人が同じ生産スキルの下で同じ線形予算集合を持つとき，配分の状態を改善する実行可能な所得移転は存在しないことを主張する。この公理は，Kolm (1973) によって議論された「共通の機会集合」の意味での機会の平等に関する公理である。この原理は，上で述べた先行研究 (Herrero et al. (1998) , Bossert et al. (1999) など) において広く採用されている。

これらの公理から，ある種の個人間比較に基づくマキシミン社会的順序を導き出す。この基準は，参照基準となる賃金率である。本稿のモデルで集計される情報は，自由に関する序数的なランキングのみであり，自由の個人間比較は行っていないことに注意されたい。

本稿の残りは次のように構成されている。2 節で，基本的な表記を導入する。3 節では，社会的ランキングが満たすべき公理を導入する。4 節で，本稿の社会的ランキングルールを提示し，その公理化を示す。5 節において結語を述べる。6 節で，定理の証明を与える。

2.　準備

$\mathbb{R}$ を実数の集合とする。$\mathbb{N}=\{1, 2, \ldots\}$ を潜在的な個人の集合とする。人数が 2 以上となる $\mathbb{N}$ の部分集合の集合族を N とする。$I=\{1, \ldots |I|\}\in N$ は，評価対象となる社会における個人の集合を表す。$n\geq 1$ 消費財の数とする。$x=(x_1, \ldots, x_n)\in\mathbb{R}^n_+$ は消費財バンドルを表す。各個人は区間 $[0, 1]$ から労働供給量 l を選ぶ。消費空間を $x=\mathbb{R}^n_+\times[0, 1]$ とする。

本稿では，予算集合を次のように定式化する。まず，

$F\equiv\{f\colon \mathbb{R}^n_+\to\mathbb{R}_+|f$ は連続的かつ非減少的，$f(0, \ldots, 0)=0\}$

$G\equiv\{g\colon [0, 1]\to\mathbb{R}_+|g$ は連続的かつ非減少的，$g(0)=0\}$

を定義する[4)]。このとき，予算集合を

$$B(f, g, t)=\{(x, l)\in X|f(x)\leq g(l)+t\}$$

4)　関数 $f\colon \mathbb{R}^n_+\to\mathbb{R}_+$ が次の性質を満たすとき，f は非減少的であると言う：任意の $(x_1, \ldots, x_n), (x'_1, \ldots, x'_n)\in\mathbb{R}^n_+$ について，$x_j\geq x'_j\ (\forall_j)$ あるとき，$f(x_1, \ldots, x_n)\geq f(x'_1, \ldots, x'_n)$。

とする。本稿で考える予算集合の集合族を

$\beta \equiv \{B(f, g, t) \mid f \in F, g \in G, t \in \mathbb{R}, B(f, g, t)$ はコンパクト集合 $\}$

とする。各個人 i について，$B_i \in \beta$ を各個人 i の予算集合とする。任意の $B_i = B(f_i, g_i, t_i), B'_i = B(f'_i, g'_i, t'_i) \in \beta$ について，$f_i(x) \leq f'_i(x)\ (\forall x \in R^n), g_i(l) \geq g'_i(l)\ (\forall l \in [0, 1]), t_i \geq t'_i$，かつ少なくとも一つの不等号が厳密な意味で成り立つとき，$B_i \supset B'_i$ と表す。また特に，$p_j > 0$ を財 j の価格，$w \in [0, \overline{w}]$ を賃金率とするとき，価格ベクトル $(p, w) = (p_1, \ldots, p_n, w) \in \mathbb{R}^n_+ \times [0, \overline{w}]$ と所得移転 $t \in R$ が与えられたときの線形予算集合を

$$B(p, w, t) = \left\{ (x, l) \in X \mid \sum_{j=1}^{m} p_j x_j \quad \leq wl + t \right\}$$

と表す。$B = (B_1, \ldots, B_{|I|}) = (B(f_i, g_i, t_i))_{i \in I} \in \beta^I$ を社会的な予算集合の配分とする。$\succcurlyeq_i$ を各個人 i の β 上のランキングとする。任意の B_i, B'_i について，$[B_i \succcurlyeq B'_i]$ は「B_i は B'_i と少なくとも同程度の自由を個人 i に与える」と解釈される。$\succ_i$ と $\sim_i$ を，それぞれ$\succcurlyeq_i$ 非対称部分と対称部分とする。本稿では，個人の予算集合上のランキングは完備性，推移性，連続性に加えて次の性質を満たすと仮定する：

任意の $B_i, B'_i \in \beta$ ついて，$B_i \supset B'_i \Rightarrow B_i P_i B'_i$

$\Re$ は上の仮定を満たす全てのランキングの集合とする。個人のランキングのプロファイルを$\succcurlyeq = (\succcurlyeq_1, \ldots, \succcurlyeq_{|I|}) \in \Re^I$ で表す。また，各個人 i にはそれぞれ生産スキル $w_i \geq 0$ が与えられているとする。スキルのプロファイルを $w = (w_1, \ldots, w_{|I|})$ で表す。本稿においては，すべての可能な経済の集合を $E = I \times \Re^I \times \mathbb{R}^I_+$ で表す。$e = (I, \succcurlyeq, w) \in E$ である経済を表す。

$e = (I, \succcurlyeq, w) \in E$ に関する社会的ランキングとは，完備的かつ推移的な β^I 上のランキングである。社会的ランキング関数 R は，各経済 $e = (I, \succcurlyeq, w) \in E$ について，社会的ランキング $R(e)$ を指定する。$BR(e)B'$ は「$e = (I, \succcurlyeq, w) \in E$ において，予算集合の配分 B が B' よりも社会的観点から少なくとも同程度に望ましい」と解釈される。同様に，$I(e)$ と $P(e)$ は社会的な無差別のランキングと厳密なランキングをそれぞれ表している。

3.　社会的ランキングルールに関する公理

この節では，社会的ランキングルールが満たすべき公理を導入する。第一の公理は，予算集合配分の評価における効率性に関するものであり，弱パレート原理としてよく知られたものである。

弱パレート原理：任意の $e=(I, \succcurlyeq, w)\in E$ と，任意の $B, B'\in\beta^I$ について，全ての $i\in I$ に関して $B_i \succ_i B'_i$ ならば，$BP(e)B'$ となる。

この公理は，二つの配分を比較するとき，全員一致して一方の配分における予算集合を他方よりも高く評価している場合，前者の配分が後者より社会的に高くランクキングされることを要求する。

次に，情報の効率性に関する公理を導入する。

ハンソン独立性：任意の $e=(I, \succcurlyeq, w)$, $e'=(I, \succcurlyeq', w)\in E$ と，任意の $B, B'\in\beta^I$ について，もし全ての $i\in I$ について

$$A \sim_i B_i \Leftrightarrow A \sim_i B_i$$

$$A \sim_i B'_i \Leftrightarrow A \sim_i B'_i$$

となるとき，$BR(e)B' \Leftrightarrow BR(e')B'$ となる。

この公理は，次のような独立性の性質を社会的ランキングに要求する。二つの予算集合配分を比較しているとしよう。このとき，もし各個人のランキングがその二つの配分における予算集合と無差別なものが不変のまま，その他の予算集合についてのランキングが変化したならば，その変化の前後で二つの予算集合配分の社会的評価が変わらないことをを要求する。

次の公理は，社会的ランキングルールが無関心な個人に影響されないことを要求している。

分離可能性：任意の $e=(I, \succcurlyeq, w)\in E$ と任意の $B, B'\in\beta^I$ について，もし $|I|\geq 3$ であり，かつある $i\in I$ について $B_i=B'_i$ ならば，

$$BP(e)B' \Rightarrow B_{\_i}P(e_{\_i})B'_{\_i}$$

となる。ただし，$e_{\_i}$ は個人 i を元の経済 e から除いた経済であるとする。

この公理は，二つの配分において同じ予算集合を持つ個人は社会的なランキングに影響を与えないことを要求する。Fleurbaey and Maniquet（2006）は，この

公理は社会的ランキングルールの構造を単純にしてくれるだけでなく,「無関心な個人が社会的意思決定に介入する必要は無い」という「補完性の原理」として知られる民主主義の一つ基準に関係しているものとして正当化している。

次の公理は，イントロダクションで議論した「同じ価値の予算集合」としての機会の平等に関係している。

所得移転原理：任意の $e=(I,\succcurlyeq,w)\in E$ と任意の $B,B'\in\beta^I$ について，$i,j\in I$ について $\succcurlyeq_i=\succcurlyeq_j$ かつ,

$$B_i'=B(f_i,g_i,t_i)\succ_i B_i=B(f_i,g,t_i-\varepsilon)\succ_i$$
$$B_j=B(f_j,g_j,t_j+\varepsilon)\succ_i B_j'=B(f_j,g_j,t_j)$$

となり，他のすべての $k\in I$ について $B_k=B_k'$ が成り立つとき，$BR(e)B'$ となる[5)]。

この公理は，同じランキングを持つ二人の個人の間で，そのランキングで測った予算集合の価値に不平等があるとき，その不平等が逆転しない程度の所得移転によってその不平等を是正することは，社会的ランキングによって弱い意味で選好されるべきだと要求する。このような所得移転によって，その二人の機会の価値はより平等になるといえるであろう。この公理は，Pigou と Dalton によって考え出され，Fleurbaey and Maniquet (2006) によって採用された公理 Transfer principle のアイデアを，この論文の問題に応用したものだといえる。彼らの公理と同様，この公理における所得移転も，弱い意味で社会的に選好されることに注意されたい。このことから，この公理は機会の不平等を是認するようなランキングとも矛盾しないことになる。

次の公理は,「共通の機会集合」の意味での機会の平等に関する公理である。

同一な線形予算集合：任意の $e=(I,\succcurlyeq,w)\in E$ について，$w_i=w_j(\forall i,j\in I)$ のとき，任意の価格ベクトル p と，$\sum_{j\in I}t_j\leq 0$ となる全ての所得移転プロファイル $(t_1,\ldots,t_{|I|})$ について,

$$(B(p,w_i,0)_{i\in I})R(e)(B(p,w_i,t_i)_{i\in I})$$

が成り立つ。

5)　補題 1 の証明から明らかなように，この公理の条件を $f_i=f_j, g_i=g_j$ に強めたとしても，この論文の結果に影響は無い。

この公理は，すべての個人が同一の生産スキルを持ち，同一の線形予算集合が与えられているとき，政府が所得移転を行って予算集合を再分配することは望ましいことではないと主張している。全ての個人が等しい機会を与えられている場合には，政府がさらに人々の予算に介入する必要はないであろう。この公理は，そのような直観を，線形予算集合の場合のみに限定した弱い形で表している。公理「所得移転原理」と同様に，この公理においても，社会的ランキングは弱い意味で配分を比較していることに注意されたい。よって，この公理も不平等な機会の配分を容認するような社会的ランキングによって満たされることが確認できる。

4.　社会的ランキング

この節では，前節で導入した公理群から導き出される社会的ランキングを導入する。 便宜上，いくつかの表記を導入する p^* を参照価格ベクトルと呼ぶ。また，任意の $\succcurlyeq$ と B について，$B \succcurlyeq B(p^*, 0, 0)$ のとき，$w(\succcurlyeq, B)$ を $B \sim B(p, w(\succcurlyeq, B), 0)$ となる仮想的賃金率とする。このような値が存在することは，$\succcurlyeq$ の完備性と連続性から保証される。

前節で導入した公理から，次の社会的なランキング方法が導き出される。

定理 1：社会的ランキングルール R が弱パレート原理，ハモンド衡平性，同一な線形予算集合としての機会の平等，ハンソン独立性，移転原理，分離可能性を満たす とする。このとき，次のうち一つが成り立つならば，任意の $e=(I, \succcurlyeq, w) \in E$ と任意の $B, B' \in \beta^I$ について $BP(e)B'$ が成り立つ：

(i) 全ての $i \in I$ について $B_i P_i B(p^*, 0, 0)$ と $B'_i R_i B(p^*, 0, 0)$ が成立し，かつ $\min_i w(\succcurlyeq_i, B_i) > \min_i w(\succcurlyeq_i, B'_i)$ となる。

(ii) 全ての $i \in I$ について $E_i(\succcurlyeq_i, B_i)$ が存在し，ある $j \in I$ について $B(p^*, 0, 0) P_j B'_j$ となる。

証明は補論において行う。$B(p^*, 0, 0)$ は，消費財の量は常に 0 しか選べず，労働量のみを選択できる予算集合である。この予算集合を基準として，この定理は二つの条件に分類される。(i) は，二つの配分において，誰も $B(p^*, 0, 0)$ より

も悪い予算集合を持っていない状況を考える。このとき，最小の等価賃金率を基準として，予算集合の配分が比較される。この比較基準は，財バンドルの配分の評価問題において，Fleurbaey and Maniquet (2006) によって提示された社会厚生順序に類似していることに注意されたい。個人が異なるランキングを持っている場合でも，等価線形予算集合を用いることによって個人間比較を行うことが可能になる。このような個人間比較の基準は，定理で用いられる公理群から 導き出されることに注意されたい。(ii) は少なくとも一人の個人が $B(p^*, 0, 0)$ よりも価 値の低い予算集合を持つ配分は，全員が $B(p^*, 0, 0)$ よりも高い価値の予算集合を持つ 配分より低く評価されることを示している。

この定理 1 における社会的ランキングの特徴づけは完全ではない。さらに，定理 1 にあるランキング基準は完備ではなく，(i) のルールは最小の等価賃金率が等しくなる二つの配分については何も判断を下さない。しかし，(i) の社会的ルールについては，次のことが言える。まず，連続性の公理を導入する。

連続性：任意の $e=(I, \succcurlyeq, w)\in E$ と任意の $B, B'\in\beta^I$，そして予算集合の列 $(B^k)_{k=1}^{\infty}$，$(B'^k)_{k=1}^{\infty}$ で $B^k\to B, B'^k\to B'$ となるようなものについて，もし $B^kR(e)B'^k$ が全ての k について成立するなら，$BR(e)B'$ となる。

このとき，この連続性の公理を定理の公理群に追加することにより，任意の $B, B'\in\beta^I$ について，全ての $i\in I$ について $B_i\succ_i B(p^*, 0, 0)$ と $B_i\succcurlyeq_i B(p^*, 0, 0)$ が成立するときには，

$$\min_i W(\succcurlyeq_i, B_i) > \min_i W(\succcurlyeq_i, B_i') \Leftrightarrow BR(e)B'$$

となることが容易に示せる。よってこの場合，(i) の下では，定理にある社会的ランキングは必要十分条件で特徴付けられる。

また，若干の修正を行なうことにより，類似した社会的なランキングの完全な特徴づけも得ることが出来る。次のような公理を導入する。

参照賃金率における同一な線形予算集合：参照賃金率 $w^*>0$ が与えられているとする。このとき，任意の $e=(I, \succcurlyeq, w)\in E$ の下で，もし $w_i=w_j=w^*(\forall i, j\in I)$ ならば，任意の p と，任意の t で $B(p, w^*, t)\in\beta$ となるものと，任意の $(t_1, \ldots, t_{|I|})$ で $\sum_{j\in I}t_j\leq 0$ となるものについて，

$$(B(p, w^*, t)_{i \in I}) R(e) (B(p, w^*, t+t_i)_{i \in I})$$

が成り立つ。

この公理は，全員の生産技術水準が $w^*>0$ の下で等しい予算集合を持つとき，所得移転による再分配を行なって機会を再分配することは社会的によいことではないと判断 することを要求する。前節で導入した公理「同一な線形予算集合」と「参照賃金率に おける同一な線形予算集合」の違いは，前者は全員の所得移転が 0 の場合に適用され るのに対して，後者は生産スキルが w^* になる場合に適用されることである。この二つ の公理は独立である。

ここで，新たなランキングルールを定義するために次の表記を導入する。上の公理で導入した参照賃金率 w^* が与えられているとする。任意の$\succcurlyeq$と任意の B について，$t(\succcurlyeq, B)$ を $B \sim B(p^*, w^*, t(\succcurlyeq, B))$ となる参照所得移転水準とする。このような値が存在することは，$\succcurlyeq$の完備性と連続性から保証される。

ここで，次のような結果が得られる。

定理 2：社会的ランキングルール R が弱パレート原理，参照賃金率における同一な線形予算集合，ハンソン独立性，所得移転原理，分離可能性 , 連続性を満たすとき そしてそのときのみ，任意の $e=(I, \succcurlyeq, w) \in E$ のと任意の $B, B' \in \beta^I$ について

$$\min_i t(\succcurlyeq_i, B_i) > \min_i t(\succcurlyeq_i, B'_i) \Leftrightarrow BR(e)B'$$

が成り立つ。

この定理のランキングルールが，定理 2 の公理群を満たすことは明らかである。また，定理 2 の公理群をみたす社会的ランキングルールが参照所得移転マキシミン基準になることは，定理 1 と同様の証明に標準的な連続性に関する議論を加えることより示すことが出来る。

このように，賃金水準と所得移転水準のどちらかを固定することにより，異なる社会的ランキングが導き出される。この二つのルールを決定的に分離する公理は「同一な線形予算集合」と「参照賃金率における同一な線形予算集合」である。この二つの公理に共通した理念は，「共通の機会を人々が持つことは望ましい」ということであ る。現時点でまだはっきりした結果は出ていないが，

社会的ランキングが「弱パレート」,「ハンソン独立性」,「分離可能性」を満たすとき，上の公理より強い「共通の機会」に関する公理は「所得移転原理」と共存不可能ではないかと予想される。「所得移転原理」は，等しい価値の機会を人々に与えることが望ましいということを主張する。Fleurbaey (2007) は「等しい価値の機会」の保証を超えて，人々に「共通の機会」を与えようとする場合に困難が生じることを示した。上記の「等しい価値の機会の保証」と「共通の機会の保証」の間の対立が成り立つならば，この困難に関連していると考えられる。今後，この二つの原理の両立可能性について探求することは興味深いテーマだと考えられる。

5.　結語

本稿では，予算集合の配分に関する社会的なランキングルールを幾つかの公理から導き出した。このルールは，等価賃金率による個人間比較を基準としたマキシミンルールである。

本稿で導入された公理は，それほど強く平等主義的ではないことに注意されたい。「所得移転原理」は不平等な機会を是認するようなランキングルールとも両立しうる。また，公理「同一な線形予算集合」も，適用される条件は全ての個人が同一な 生産スキルを持つ場合に限定されている上に，機会の不平等な配分を容認するルール とも両立可能である。このような平等に関する弱い公理から，等価賃金率に基づくマキシミンルールが導き出されたのである。

以下では，今後の研究の方向性について述べたい。第一に，本稿における人々の ランキングは，包含関係に関する弱い単調性しか満たさない。このようなランキングの制約では，例えば予算集合の中で効用を最大化できる財バンドルのみ によってその予算集合を評価するような厚生主義的評価を排除していない[6)]。しかし，この単調性を強めて帰結主義的な評価を排除した場合に，社会的ランキングの構築の可能性はより広がるかもしれない。このことについて，今後調

6)　しかし，この仮定は本稿の結果には影響を与えていないことに注意されたい。

べてみたい。第二に，本稿では，様々な経済における情報を基に予算集合の配分を評価する導き出すことであった。しかし，社会計画者は必ずしもその様な情報を観察することが出来ない。将来の研究として，このような不完備情報化での予算集合の配分に関する研究を行ないたい。

6. 証明

定理を証明するために，まず二つの補題を示す。

補題 1: 社会的ランキングルール R が弱パレート原理，ハンソン独立性，移転原理を満たすとする。このとき，任意の $e \in E$ に関して，もし二人の個人 $i, j \in I$ について $\succcurlyeq_i = \succcurlyeq_j$ かつ $B'_i \succ_i B_i \succ_i B_j \succ_i B_j \succ_i B(p, 0, 0)$ となり，他のすべての $k \in I$ について $B_k \succ_k B'_k$ が成り立つならば，$BP(e)B$ となる。

補題 1 の証明: $e = (I, \succcurlyeq, w) \in E$ と $B, B' \in B^I$ は，この補題の仮定を満たしていると仮定する。R は仮定にある公理を満たす社会的ランキングを表す。

以下では，次のようなランキング $\succcurlyeq_0$ を構築していく。まず，任意の $\succcurlyeq'$ と任意の $B_k \in B$ について，$I(\succcurlyeq', B_k) \equiv \{A \in B | A \sim' B_k\}$ とする。ここで，

$$I(\succcurlyeq_0, B_i) = I(\succcurlyeq_i, B_i),$$
$$I(\succcurlyeq_0, B_i) = I(\succcurlyeq_i, B_i),$$
$$I(\succcurlyeq_0, B_j) = I(\succcurlyeq_j, B_j),$$
$$I(\succcurlyeq_0, B'_j) = I(\succcurlyeq_j, B'_j)$$

とする。$e^0 \in E$ は，個人 i, j のランキングを $\succcurlyeq_0$ に変えて，他は e と同じである経済であるとする。このとき，ハンソン独立性より，$R(e)$ の B と B' に関するランキングは，$R(e^0)$ のものと一致する。

次に，$\overline{w}$ を十分大きな賃金率とする。$\succcurlyeq_0$ に関して，関数 h_i: $[0, \overline{w}] \to \mathbb{R}$ と h_j: $[0, \overline{w}] \to \mathbb{R}$ が存在して，次のことが成り立つと仮定する: ある p について，

$$B_i \succ_0 B(p, w, h_i(w)) \succ_0 B_{-i} \forall \mathrm{w} \in [0, \overline{w}],$$
$$B'_j \succ_0 B(p, w, h_j(w)) \succ_0 B_j \forall \mathrm{w} \in [0, \overline{w}],$$
$$B(p, w, h_i(w)) \sim_0 B(p, w', h_i(w')) \forall \mathrm{w}, \mathrm{w}' \in [0, \overline{w}],$$
$$B(p, w, h_j(w)) \sim_0 B(p, w', h_j(w')) \forall \mathrm{w}, \mathrm{w}' \in [0, \overline{w}],$$

かつ

$B(p, 0, h_i(0)+\in) >_0 B'_i >_0 B(p, w, h_i(\overline{w})+\varepsilon) >_0 B(p, 0, h_i(0)-\in)$

$>_0 B_i >_0 B(p, w, h_i(\overline{w})-\varepsilon)$,

$B_j >_0 B(p, w, h_j(\overline{w})+\varepsilon) >_0 B(p, w, h_j(\overline{w})-\varepsilon) >_0 B(p, 0, h_j(0)+\varepsilon')$

$>_0 B(p, 0, h_j(0)-\varepsilon') >_0 B'_j$

が成立する。

$B^1, B^2, B^3, B^4 \in \beta^I$ を

$B_i^1 = B(p, 0, h_i(0)+\varepsilon'), B_i^2 = B(p, 0, h_i(0)-\varepsilon')$,

$B_i^3 = B(p, w, h_i(\overline{w})+\varepsilon), B_i^4 = B(p, w, h_i(\overline{w})-\varepsilon)$,

$B_j^1 = B(p, 0, h_j(0)-\varepsilon'), B_j^2 = B(p, 0, h_j(0)+\varepsilon')$,

$B_j^3 = B(p, w, h_j(\overline{w})-\varepsilon), B_j^4 = B(p, w, h_j(\overline{w})+\varepsilon)$

として定義する。また，ランキングの性質より，任意の $k \in I$ について，ある所得移転 t_k, t'_k が存在して，$B_k \sim_k B(p, \overline{w}, t_k), B'_k \sim_k B(p, \overline{w}, t'_k)$ となる。このとき，任意の $k \neq i, j$ について，$t_k > t_k^4 = t_k^3 > t_k^2 = t_k^1 > t'_k$ とし，$B_k^i = B(p, \overline{w}, t_k^i)\ (i=1,2,3,4)$ と置く。

$$B(p, \overline{w}, t_i^1) \supset B(p, \overline{w}, t_i^2) \supset B(p, \overline{w}, t_j^2) \supset B(p, \overline{w}, t_j^1)$$

$$B(p, \overline{w}, t_i^3) \supset B(p, \overline{w}, t_i^4) \supset B(p, \overline{w}, t_j^4) \supset B(p, \overline{w}, t_j^3)$$

が成立することに注意されたい。各個人のランキングの性質と移転原理より，

$$B^2 R(e^0) B^1, B^4 R(e^0) B^3$$

となる。また，各個人のランキングの推移性と弱パレート原理より，

$$BP(e^0) B^4, B^3 P(e^0) B^2, B^1 P(e^0) B'$$

となり，R の推移性より，$BP(e^0)B'$ となる。□

補題 2：社会的ランキングルール R が弱パレート原理，ハンソン独立性，移転原理，同一な線形予算集合としての機会の平等，分離可能性を満たすとする。このとき，任意の $e=(I, \succcurlyeq, w) \in E$ と任意の $B, B' \in \beta^I$ について，二人の個人 $i, j \in I$ について，

$$w(\succcurlyeq_i, B'_i) > w(\succcurlyeq_i, B_i) > w(\succcurlyeq_j, B_j) > w(\succcurlyeq_j, B'_j)$$

となり，他のすべての個人 $k \in I$ について $B_k = B'_k$ ならば，$BR(e)B'$ となる。

証明[7]：ランキングの性質より，$w(\succcurlyeq_i, B_i) > w > w(\succcurlyeq_j, B_j)$ となる $w>0$ が存在する。a と b を $w_a = w_b = w$ かつ $\succcurlyeq_a = \succcurlyeq_i, \succcurlyeq_b = \succcurlyeq_j$ を持つ新しい個人とする。この二人からなる経済を $e_{\{a,b\}} = (\{a, b\}, (\succcurlyeq_a, \succcurlyeq_b), (w_a, w_b))$ とする。

$\overline{B}_k = B(p^*, w_k, 0)\ (k=a, b)$ とする。$w_a = w_b = w$ より，$\overline{B}_a = \overline{B}_b$ となる。また，配分 (B_a, B_b) を，$B_k = B(p^*, w_k, t_k)\ (k=a, b)$ かつ $t_a + t_b < 0$ とし，さらに，

$$B_i >_i B_a >_i \overline{B}_a \text{ かつ } \overline{B}_b >_j B_b >_j B_j$$

を満たすものとする。このとき，ある $(B''_a, B''_b) = (B(p^*, w, t''), B(p^*, w, t''))$ が存在して $t''_a + t''_b \leq 0$ かつ，$B''_a > B_a, B''_b > B_b$ となる。

同一な線形予算集合より，

$$(\overline{B}_a, \overline{B}_b)\ R(e_{\{a,b\}})\ (B''_a, B''_b)$$

さらに弱パレート原理より，

$$(B''_a, B''_b)\ R(e_{\{a,b\}})\ (B_a, B_b)$$

よって推移性より，

$$(B''_a, B''_b)\ P(e_{\{a,b\}})\ (\overline{B}_a, \overline{B}_b)$$

$e_{\{a,b,i,j\}} = (\{a, b, i, j\}, (\succcurlyeq_a, \succcurlyeq_b, \succcurlyeq_i, \succcurlyeq_j), (w_a, w_b, w_i, w_j))$ とすると，分離可能性より，

$$(B_a, B_b, B_i, B_j)\ R(e_{\{a,b,i,j\}})\ (B_a, B_b, B_i, B_j) \tag{1}$$

となる。B^-, B'^+, B^- を

$$B'^+ >_i B'_i >_i B_i >_i B^- >_i B_a >_i B_a^- >_i B_a$$

が成り立つものとして定義する。同様に，B'^+, B'^{++}, B^- を

$$B' > B > B > B > B'^{++} > B'^+ > B'$$

が成り立つ予算集合として定義する。

$B'^+ >_i B^- >_i B_a^- >_i B_a$ と $B_b^+ >_b B_b, B'^{++} >_j B'^+$ より，補題 1 から，

$$(B_a^-, \overline{B}_b^+, B_i^-, B_j'^{++})\ P(e_{\{a,b,i,j\}})\ (\overline{B}_a, \overline{B}_b, B_i'^+, B_j'^+)$$

となる。同様に，$\overline{B}_b^+ >_j B_b >_j B_j >_j B_j'^{++}$，$B_i >_i B_i^-, B_a >_i B_a^-$ より，

$$(B_a, B_b, B_i, B_j)\ P(e_{\{a,b,i,j\}})\ (B_a^-, \overline{B}_b^+, B_i^-, B_j'^{++})$$

7）　この証明は，Fleurbaey and Maniquet（2006）の補題 2 の証明と同じ論理を用いている。

となる。推移性より，

$$(B_a, B_b, B_i, B_j)\ P(e_{\{a,b,i,j\}})\ (\overline{B}_a, \overline{B}_b, B_i'^{+}, B_j'^{+})$$

を得る。この社会的ランキングと (1) 式と推移性より，

$$(\overline{B}_a, \overline{B}_b, B_i, B_j)\ P(e_{\{a,b,i,j\}})\ (\overline{B}_a, \overline{B}_b, B_i'^{+}, B_j'^{+})$$

となる。分離可能性より，

$$(B_i, B_j)\ P(e_{\{i,j\}})\ (B'^{+}, B'^{+})$$

となる。弱パレート原理と推移性より，

$$(B_i, B_j)\ P(e_{\{i,j\}})\ (B_i', B_j')$$

を得る。分離可能性より，$BR(e)B'$ を得る。□

定理 1 の証明[8)]：

(i) $B, B' \in \beta^I$ について，全ての $i \in I$ について $w(\succcurlyeq_i, B_i)$ と $w(\succcurlyeq_i, B_i')$ が存在し，かつ $\min_{i\in I} W(\succcurlyeq_i, B_i) > \min_{i\in I} W(\succcurlyeq_i, B_i')$ が成り立つとする。このとき，ランキングの仮定より，次の条件を満たす二つの配分 B^a, B^b が存在する：

(1) 全ての i について，$B_i \succ_i B_i^a, B_i^b \succ_i B_i'$;

(2) ある i_0 が存在して，全ての $i \neq i_0$ について，

$$w(\succcurlyeq_i, B_i^b) > w(\succcurlyeq_i, B_i^a) > w(\succcurlyeq_{i0}, B_i^a) > w(\succcurlyeq_{i0}, B_i^b)$$

となる。

$(B^k)^{m+1}$ を次のような配分の列とする：

　任意の $i \neq i_0$ について，

$B_i = \ldots = B_i^1 = B_i^a, B^{m+1} = \ldots = B^{i+1} = B^b, B^a = B^{m+1} \succ B^m \succ \ldots \succ B^1 = B$

とする。このとき，全ての $k \neq i_0$ について，

$$w(\succcurlyeq_k, B_k) > w(\succcurlyeq_k, B^{k+1}) > w(\succcurlyeq_{i_0}, B_i^k) > w(\succcurlyeq_{i_0}, B^{k+1})$$

かつ，任意の $i \neq i_0, k$ について，$B^{k+1} = B_i^k$ となる。よって補題 2 より，すべての $k \neq i_0$ について $B^{k+1}R(e)B^k$ となる。i_0 の場合については，$B^{i_0+1} = B^{i_0}$ とが成り立つ。さらに，弱パレート原理より，$B^1P(e)B'$ かつ $BP(e)B^{n+1}$ が得られる。推移性より $BP(e)B'$ を得る。

8) この証明は，Fleurbaey and Maniquet (2006) の定理 1 の証明と同じ論理を用いている。

(ii) 全ての $i \in I$ について $B_i \succ_i B(p^*, 0, 0)$ あり，ある $j \in I$ について $B(p^*, 0, 0) \succ_j B'_j$ であるとする。B'' を次のような予算集合の配分とする：j については $B'' = B(p^*, 0, 0)$ となり，他の $i \in I$ については $B'' \succ B'$ となるとする。弱パレート原理より $B''P(e)B'$ となり，(i) の結果より $BP(e)B''$ となる。よって，推移性より $BP(e)B'$ となる。□

参考文献

［1］ Bossert W., Fleurbaey, M., Van de gaer, D., (1999), "Responsibility, talent, and compensation: A second-best analysis," *Review of Economic Design,* 4, 35–56.

［2］ Fleurbaey, M., Maniquet, F., (2006), "Fair income tax," *Review of Economic Studies,* 73, 55–83.

［3］ Gotoh R., Yoshihara, N., (2003), "A class of fair distribution rules a la Rawls and Sen," *Economic Theory* 22, 63–88.

［4］ Herrero C., Iturbe-Ormaetxe, I., Nieto, J., (1998), "Ranking opportunity profiles on the basis of the common opportunities," *Mathematical Social Sciences* 35, 273–289.

［5］ Kolm S. (2004) *Macrojustice, the political economy of fairness*. Cambridge University Press, New York, NY

［6］ Kolm, S. (2010) "On real economic freedom," *Social Choice and Welfare,* 35–3, 351–375.

［7］ Miyagishima, K., (2010) "Ranking linear budget sets," *Social Choice and Welfare,* 35–1, 163–173.

［8］ Savaglio, E., and Vannucci, S., (2009) "On the volume-ranking of opportunity sets in economic environments," *Social Choice and Welfare* , 33–1, 1–24.

［9］ Sen, A. K., (1993), "Markets and freedom," *Oxford Economic Papers,* 45, 519–541.

［10］ Thomson, W., (1994), "Notions of equal, or equivalent, opportunities," *Social Choice and Welfare,* 11, 137–156.

［11］ Tadenuma, K., Xu, Y., (2002), "The fundamental theorems of welfare economics," Unpublished manuscript. in a non-welfaristic approach," Mimeograph. Hitotsubashi University.

［12］ Xu, Y., (2004), "On ranking linear budget sets in terms of freedom of choice," *Social Choice and Welfare,* 22–1, 281–289.