

論文

Newsvendor Problem における パラメータ推定リスクの影響

鹿島 浩之

キーワード

Newsvendor Problem
Power Exponential Distribution
パラメータ推定リスク
一様分布
売上高総利益率

目次

1. はじめに
2. 設定
3. 平均の推定と期待利益最大化
4. 一様分布の場合
5. 数値的検証
6. 結論
7. 補足

1. はじめに

2020 年はコロナの 1 年となった。感染症対策により消費者ニーズが激変し、外食や旅行関連産業が大打撃を受ける一方、巣ごもり需要は旺盛となった。コロナ後の経済における需要予測は平常時より難化傾向となるであろう。コロナ前のデータが予測情報としての有効性を失うとき、コロナ直後の経済下で展開するビジネスは、限定的な情報に基づく意思決定を余儀なくされる。

パンデミックのみならず、国際紛争や金融危機等、経済産業構造に変化を与える事象はしばしば発生し、消費者需要もその影響を受ける。また、平常時であっても、新商品の投入、新市場の開拓、商品トレンド予測など、需要予測に有効なデータが十分存在せず、僅かな情報から需要を見積り、ビジネス上の意思決定を強いられるケースは少なくない。特に、需要分布の推測に短期の直近データしか利用できない場合、パラメータの推定リスクは無視できないリスクファクターとなり得る。

Newsvendor problem は、需要の不確実性下における在庫戦略を議論する古典的な問題であり (e.g. Arrow et al. (1951)), 最近では、観測データから需要を予測し、在庫数量に関する意思決定を行う研究も幾つかの文献で紹介されている (e.g. Huber et al. (2019), Beutel et al. (2012)). 鹿島 (2020) では、需要分布に Power Exponential Distribution を仮定し、観測データを利用した Newsvendor problem について考察している。Power Exponential Distribution を仮定することで、平均や標準偏差等、実務上扱い易いパラメータにより需要分布を把握することが可能となる上、正規分布を含め、それより急尖的な leptokurtic distribution から、peak が平坦な platykurtic distribution まで広い分布クラスを対象とした議論が可能となる (e.g. Gómez et al. (1998), Dang et al. (2015)). 特に、Power Exponential Distribution は一様分布も含んでおり、負の需要を排除したケースを扱うことができる。正規分布は最もポピュラーであり解析的に扱い易い面もあるが、support が実数全体であるため、確率的に極々微小とは言え、大きな負の需要が期待値計算に影響する可能性は否めない。理論的には Truncated Normal Distribution (Akahira (2017)) 等を利用する方法も考えられるが、実務的には、分布の把握やパラメータ推定等の扱い易さも重要となる。

そこで、本稿では、需要分布に Power Exponential Distribution を仮定し、Newsvendor Problem におけるパラメータ推定リスクの影響について議論する。特に、一様分布の場合にその影響を数値的に検証する。本稿の構成は次の通りである。先ず、第 2 節で問題の設定を行い、第 3 節で Power Exponential Distribution 仮定の下、平均を未知とした場合における期待利益の最大化問題を議論する。そして、第 4 節で一様分布の場合に前節で導出した結果を具体化し、第 5 節でその数値的検証を行う。最後に第 6 節で結論をまとめる。

2. 設定

本節では、鹿島 (2020) に即した形で問題設定を行い、同時に本稿の議論に必要な鹿島 (2020) の結果を概説する。ある製品の第 1 期から第 $T+1$ 期の需要数量は、

$$D_1, \dots, D_T, D_{T+1} \stackrel{iid}{\sim} PE(\mu, \sigma, \beta),$$

即ち、互いに独立に同一の Power Exponential Distribution に従う確率変数であるものとする。同分布の確率密度関数は、以下の通りである (e.g. Gomez et. al. (1998)).

$$f(x|\mu, \sigma, \beta) := \frac{1}{\sigma} \psi_{\beta} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right), x \in \mathbf{R},$$

ここで, $\mu \in \mathbf{R}$, $\sigma > 0$,

$$\psi_{\beta}(z) := \frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2\beta}\right) 2^{\frac{1}{2\beta}}} \exp\left\{-\frac{1}{2} z^{2\beta}\right\}, z \in \mathbf{R}, \beta > 0.$$

今, 第 $T+1$ 期首を現在時点とし, 第 $T+1$ 期における 1 期間の Newsvendor problem を考える. バイヤーは, 第 $T+1$ 期の期首時点において, 同製品のストック数量 Q 個を決定し, 期中の販売に備える. 同製品の調達コストは, 製品 1 個当たり c とする. そして, 期中, バイヤーは 1 個につき固定価格 p で消費者に販売する. 尚, 需要数量は固定売価 p を前提とする ($p \geq c \geq 0$). このとき, 期末時点で明らかとなる第 $T+1$ 期におけるバイヤーの利益は,

$$R(D_{T+1}, Q) = (p - c)Q - p \max(Q - D_{T+1}, 0)$$

と書ける. そして, この期待値は, 以下の通り.

$$m(Q) := E[R(D_{T+1}, Q)] = p\mu - cQ + p\sigma h_{\beta} \left(\frac{Q - \mu}{\sigma} \right),$$

ここで,

$$h_{\beta}(x) := \int_{-\infty}^x z \psi_{\beta}(z) dz + x(1 - \Psi_{\beta}(x)), \Psi_{\beta}(x) := \int_{-\infty}^x \psi_{\beta}(z) dz, x \in \mathbf{R}.$$

$m(Q)$ を最大にする Q は, Power Exponential Distribution のパラメータが既知である場合, 以下の通りとなる.

$$Q = Q^* := \mu + \sigma u^*, \tag{1}$$

ここで,

$$u^* := \Psi_{\beta}^{-1}(r), r := 1 - \frac{c}{p} \in [0, 1].$$

そして, そのときの期待利益の最大値は, 以下の通り.

$$m(Q^*) = p\sigma \left(\frac{\mu}{\sigma} r + \int_{-\infty}^{u^*} z \psi_{\beta}(z) dz \right).$$

他方, パラメータ μ と σ が未知の場合, 過去の観測情報 $D_1, \dots, D_T$ からこれらを推定し, (1) に即してストック数量を決定することが考えられる. そこで, μ と σ の何らかの推定量

$$\hat{\mu} := \hat{\mu}(D_1, \dots, D_T), \hat{\sigma} := \hat{\sigma}(D_1, \dots, D_T)$$

により,

$$\hat{Q}^* := \hat{\mu} + \hat{\sigma}u^* \quad (2)$$

によって, 第 $T+1$ 期首時点のストック数量を決定するものとする. このとき, 期待利益は, 以下の通りとなる.

$$R(\hat{Q}^*) := E\left[R(D_{T+1}, \hat{Q}^*)\right] = p\sigma\left(\frac{\mu}{\sigma}r + \int_{-\infty}^{u^*} z\psi_{\beta}(z)dz - E[\Delta(\hat{\varepsilon})]\right), \quad (3)$$

ここで,

$$\Delta(\hat{\varepsilon}) := (1-r)\hat{\varepsilon} + h_{\beta}(u^*) - h_{\beta}(u^* + \hat{\varepsilon}), \quad \hat{\varepsilon} = \varepsilon(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) := \frac{\hat{\mu} - \mu + (\hat{\sigma} - \sigma)u^*}{\sigma}.$$

$\Delta(\hat{\varepsilon})$ は, パラメータの推定リスクが利益に課すペナルティと解釈できる. 推定量 $\hat{\mu}$ と $\hat{\sigma}$ が共に一致性を持つ場合,

$$E[\Delta(\hat{\varepsilon})] \rightarrow 0 \quad (T \rightarrow \infty),$$

つまり, $T \rightarrow \infty$ でペナルティの期待値は 0 に収束する. 尚, 一致性は, 最尤推定量がある正則条件を満たす場合に保証される (e.g. Wald (1949), Akahira et al. (1994)). しかしながら, 本稿で想定するような, 僅かなデータしか利用できない状況において, 推定リスクの影響を排除することは困難であり, 実務に与える影響を把握しておく必要がある.

3. 平均の推定と期待利益最大化

本節では, パラメータ μ を未知, σ と β を既知として, 期待利益の最大化について議論する. 需要分布の平均はパラメータの中で, 最も推測が困難, 且つ意思決定に与える影響が大きいものと推察される. スtock 数量は, 標本平均と調整項 $\delta \in \mathbf{R}$ によって, 以下により決定するものとする.

$$\hat{Q}^*(\delta) := \bar{D} + \sigma(u^* + \delta), \quad (4)$$

ここで, $\bar{D}$ は $D_1, \dots, D_T$ の標本平均. (1) より, (4) による意思決定は $\hat{Q}^*(0)$ が自然であるが, 推定リスクのペナルティ構造に δ が如何に作用するか, ここで確認したい. 尚, (4) は, μ の推定量として $\hat{\mu} = \bar{D} + \sigma\delta$ を (2) に当てはめたケースに相当する為, δ の検証は推定量のバイアスの検証と解釈することもできる. ここで,

$$z = \frac{\bar{D} - \mu}{\sigma/\sqrt{T}} \sim PE(0, 1, \beta)$$

とするとき,

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon(\bar{D} + \sigma\delta, \sigma) = \frac{\bar{D} + \sigma\delta - \mu + (\sigma - \sigma)u^*}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{T}}z + \delta,$$

即ち, 推定誤差を σ に依存せず, z と調整項 $\delta \in \mathbf{R}$ で捉えることができる. 従って, (4) のとき, 推

定リスクのペナルティは、以下の通り.

$$\Delta(\delta) := \Delta(\varepsilon(\bar{D} + \delta\sigma, \sigma)) = (1-r)(T^{-1/2}z + \delta) + h_\beta(u^*) - h_\beta(u^* + T^{-1/2}z + \delta).$$

そして、その期待値は、以下のように書ける.

$$\bar{\Delta}(\delta) := E[\Delta(\delta)] = (1-r)\delta + h_\beta(u^*) - E[h_\beta(u^* + T^{-1/2}z + \delta)].$$

(3) より、期待利益の最大化は、ペナルティ期待値の最小化問題に帰着される. ここで、以下の記号を定義する.

$$\bar{\Psi}_{T,\beta}(x) := E[\Psi_\beta(T^{-1/2}z + x)], x \in \mathbf{R}.$$

このとき,

$$\frac{\partial}{\partial \delta} E[h_\beta(T^{-1/2}z + \delta + u^*)] = 1 - \bar{\Psi}_{T,\beta}(\delta + u^*),$$

故に、 $\bar{\Delta}'(\delta) = 0$ は $1-r - (1 - \bar{\Psi}_{T,\beta}(\delta + u^*)) = 0$ と同値となり、従って、

$$\delta = \delta_{T,\beta}(r) := \bar{\Psi}_{T,\beta}^{-1}(r) - \Psi_\beta^{-1}(r) \quad (5)$$

のとき $\bar{\Delta}(\delta)$ は最小となる. 尚、任意の $x \in \mathbf{R}$ に対し、

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \bar{\Psi}_{T,\beta}(x) = \Psi_\beta(x)$$

であることから、任意の $r \in [0, 1]$ に対し、

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \delta_{T,\beta}(r) = 0, \quad (6)$$

つまり、データが十分に存在しているとき、調整は必要ない. しかし、データが少ない場合、推定リスクを考慮することによる調整が必要になる.

4. 一様分布の場合

本節では、 $\beta = \infty$ 、即ち、一様分布の場合に (5) を具体的に導出する. 以後、表記をシンプルにするため、基本的に ∞ の記号を省略し $\psi := \psi_\infty$, $\Psi := \Psi_\infty$, $\bar{\Psi}_T := \bar{\Psi}_{T,\infty}$, $h := h_\infty$, $\delta_T := \delta_{T,\infty}$ と表すこととする. δ_T を求めるには、 Ψ , $\bar{\Psi}_T$ を特定する必要がある. $\mathbf{1}$ を indicator function とするとき、

$$\psi = \frac{1}{2\Gamma(1)} \mathbf{1}_{(-1,1)} = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{(-1,1)}$$

であることから、 $x \in [-1, 1]$ に対して、 $\Psi(x) = \int_{-\infty}^x \psi(z) dz = \frac{x+1}{2}$, 即ち、以下を得る.

$$\Psi(x) = \begin{cases} 1 & (x > 1) \\ \frac{x+1}{2} & (|x| \leq 1) \\ 0 & (x < -1) \end{cases} \quad (7)$$

従って,

$$u^* = \Psi^{-1}(r) = 2r - 1, \quad r \in [0, 1].$$

以後, u^* を x で表し, $r \in [0, 1]$ に対し $x = 2r - 1 = \Psi^{-1}(r)$ として議論する. 一様分布は, 前述の通り, 負の需要が発生する確率を 0 として議論することができるが, その為には, $\mu \geq \sigma$ を仮定することが必要十分である. 実際, $z \sim PE(0, 1, \infty)$ とするとき,

$$P\{\mu + z\sigma \leq 0\} = \Psi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\mu}{\sigma} \leq -1.$$

尚, σ は Power Exponential Distribution のパラメータであるため, $PE(\mu, \sigma, \infty)$ の標準偏差は $\sigma / \sqrt{3}$ となる (補足参照).

命題 1. $x \in \mathbf{R}$ に対し,

$$\bar{\Psi}_T(x) = \begin{cases} 1 & (1 + T^{-1/2} < x) \\ \bar{\Psi}_h(x) & (x \in J_h) \\ \frac{x+1}{2} & (x \in J) \\ \bar{\Psi}_l(x) & (x \in J_l) \\ 0 & (x < -1 - T^{-1/2}) \end{cases},$$

ここで,

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_h(x) &:= 1 - \frac{1}{8} T^{1/2} (1 - x + T^{-1/2})^2, \quad \bar{\Psi}_l(x) := \frac{1}{8} T^{1/2} (1 + x + T^{-1/2})^2, \\ J_l &:= [-1 - T^{-1/2}, -1 + T^{-1/2}], \quad J := (-1 + T^{-1/2}, 1 - T^{-1/2}), \quad J_h := [1 - T^{-1/2}, 1 + T^{-1/2}]. \end{aligned}$$

証明. $\Omega(x) := \int_{-1}^1 \Psi(T^{-1/2}z + x) dz$ とするとき,

$$\bar{\Psi}_T(x) = \int \Psi(T^{-1/2}z + x) \frac{1}{2} \mathbf{1}_{(-1,1)} dz = \frac{1}{2} \Omega(x).$$

(7) より,

$$\Psi\left(T^{-1/2}z+x\right)=\begin{cases} 1 & \left(T^{-1/2}z+x>1\right) \\ \frac{T^{-1/2}z+x+1}{2} & \left(\left|T^{-1/2}z+x\right|\leq 1\right). \\ 0 & \left(T^{-1/2}z+x<-1\right) \end{cases}$$

今,

$$I_z:=\left[i_D, i_U\right]=\left[-T^{1/2}(1+x), T^{1/2}(1-x)\right]$$

とすると、区間の幅は $i_U-i_D=2T^{1/2}\geq 2$ であり、また、

$$\left|T^{-1/2}z+x\right|\leq 1 \Leftrightarrow z\in I_z$$

であるため、 $I_z\supset[-1,1]$ 、即ち、 $-1+T^{-1/2}\leq x\leq 1-T^{-1/2}$ のとき、

$$\Omega(x)=\int_{-1}^1\Psi\left(T^{-1/2}z+x\right)dz=\int_{-1}^1\frac{T^{-1/2}z+x+1}{2}dz=x+1.$$

他方、 $i_D=-T^{1/2}(1+x)\in[-1,1]$ 、即ち、 $-1-T^{-1/2}\leq x\leq -1+T^{-1/2}$ のとき、

$$\Omega(x)=\int_{-T^{1/2}(1+x)}^1\frac{T^{-1/2}z+x+1}{2}dz=\frac{1}{4}T^{1/2}\left(1+x+T^{-1/2}\right)^2.$$

更に、 $i_U=T^{1/2}(1-x)\in[-1,1]$ 、即ち、 $1-T^{-1/2}\leq x\leq 1+T^{-1/2}$ のとき、以下を得る。

$$\Omega(x)=\int_{T^{1/2}(1-x)}^1dz+\int_{-1}^{T^{1/2}(1-x)}\frac{T^{-1/2}z+x+1}{2}dz=\frac{1}{4}\left\{8-T^{1/2}\left(1-x+T^{-1/2}\right)^2\right\}.$$

尚、 $i_D=-T^{1/2}(1+x)>1$ 、即ち、 $x<-1-T^{-1/2}$ のとき、

$$\Omega(x)=\int_{-1}^1\Psi\left(T^{-1/2}z+x\right)dz=0.$$

また、 $i_U=T^{1/2}(1-x)<-1$ 、即ち、 $x>1+T^{-1/2}$ のとき、

$$\Omega(x)=\int_{-1}^1\Psi\left(T^{-1/2}z+x\right)dz=\int_{-1}^1dz=2.$$

以上より、本命題を得る。□

以下、議論を簡潔に進めるため、次の記号を定義する。

$$I_{l,T}:=\left[0, T^{-1/2}/2\right], I_T:=\left(T^{-1/2}/2, 1-T^{-1/2}/2\right), I_{h,T}:=\left[1-T^{-1/2}/2, 1\right].$$

これらの区間は、以下の対応関係にある。

$$\Psi^{-1}(r)\in J_l\Leftrightarrow r\in I_{l,T}, \Psi^{-1}(r)\in J\Leftrightarrow r\in I_T, \Psi^{-1}(r)\in J_h\Leftrightarrow r\in I_{h,T}.$$

命題1より、以下の通り、一様分布の場合の(5)が導出できる。

命題 2. $r \in [0, 1]$ に対し

$$\delta_T(r) = \begin{cases} \delta_{h,T}(r) := \left(\sqrt{2(1-r)} - T^{-1/4} \right)^2 & (r \in I_{h,T}) \\ 0 & (r \in I_T) \\ \delta_{l,T}(r) := -\left(\sqrt{2r} - T^{-1/4} \right)^2 & (r \in I_{l,T}) \end{cases}.$$

証明. $r \in I_T$ のとき $x \in J$ であるため, 命題 1 より $\bar{\Psi}_T(x) = \Psi(x)$, 従って, $\delta_T(r) = 0$. $r \in I_{h,T}$ のとき, $x \in J_h$ であるため, 命題 1 より $\bar{\Psi}_T(x) = \bar{\Psi}_h(x)$. この逆関数は,

$$\bar{\Psi}_h^{-1}(r) = 1 + T^{-1/2} - 2T^{-1/4} \sqrt{2(1-r)}.$$

実際,

$$\bar{\Psi}_h(\bar{\Psi}_h^{-1}(r)) = 1 - \frac{1}{8} T^{1/2} \left\{ 1 - \left(1 + T^{-1/2} - 2T^{-1/4} \sqrt{2(1-r)} \right) + T^{-1/2} \right\}^2 = r.$$

従って, 以下を得る.

$$\delta_T(r) = 1 + T^{-1/2} - 2T^{-1/4} \sqrt{2(1-r)} - (2r - 1) = \left(\sqrt{2(1-r)} - T^{-1/4} \right)^2.$$

他方, $r \in I_{l,T}$ のとき, $x \in J_l$ であるため, 命題 1 より $\bar{\Psi}_T(x) = \bar{\Psi}_l(x)$. この逆関数は,

$$\bar{\Psi}_l^{-1}(r) = 2\sqrt{2r} T^{-1/4} - 1 - T^{-1/2}.$$

実際,

$$\bar{\Psi}_l(\bar{\Psi}_l^{-1}(r)) = \frac{1}{8} T^{1/2} \left\{ 1 + \left(2\sqrt{2r} T^{-1/4} - 1 - T^{-1/2} \right) + T^{-1/2} \right\}^2 = r.$$

従って, 以下を得る.

$$\delta_T(r) = 2\sqrt{2r} T^{-1/4} - 1 - T^{-1/2} - (2r - 1) = -\left(\sqrt{2r} - T^{-1/4} \right)^2.$$

以上で本命題を得る. $\square$

上記の導出結果において (6) が成立していることは, $I_{h,T}$, $I_{l,T}$ がそれぞれ $\{1\}$, $\{0\}$ の 1 点に収束する為,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \delta_{h,T}(r) = \lim_{T \rightarrow \infty} \delta_{h,T}(1) = 0, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \delta_{l,T}(r) = \lim_{T \rightarrow \infty} \delta_{l,T}(0) = 0,$$

より確認できる.

5. 数値的検証

本節では, 前節で導出したストック数量の調整 (命題 2) が, 実務に与える影響を計測する. 表記

を簡略化するため、

$$Q_\delta := \hat{Q}^*(\delta_T(r)), Q_0 := \hat{Q}^*(0)$$

と表し、推定リスクを考慮したストック数量 Q_δ と、考慮しないストック数量 Q_0 の相違を数値的に検証する。 Q_0 は、通常の Newsvendor problem における期待利益最大化の解に対応したストック数量である。更に、以下の記号を定義する。

$$dQ := \frac{Q_\delta - Q_0}{Q_0} = \frac{\delta_T(r)}{\frac{\bar{D}}{\sigma} + 2r - 1}.$$

dQ は、推定リスクを考慮することで、ストック数量に何割の相違が生じるかを計測するものである。尚、ここで $Q_0 > 0$ 、及び $\bar{D} > \sigma$ とする。前者は、 dQ の定義に必然の前提であり、後者は、前節で言及した $\mu \geq \sigma$ の仮定に即したものである。

命題2にある通り $\delta_T(r)$ の定義域は $I_{h,T}$ 、 I_T 、 $I_{l,T}$ の3つに分かれ、それらは T に依存して変化する。その様子をグラフ化したものが Fig. 1 である。

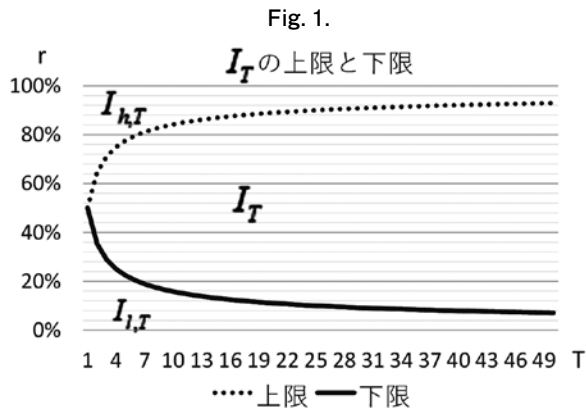


Fig. 1 は、横軸を T 、縦軸を r とし、区間 I_T の上限（点線）と下限（実線）をそれぞれプロットしている。観測データ数 T の増加と共に I_T の幅は拡大し、逆に $I_{h,T}$ と $I_{l,T}$ の幅は縮小する。命題2から明らかな通り、推定リスクの影響が現れるのは $I_{h,T}$ と $I_{l,T}$ においてである。Fig. 1 の状況に鑑み、本節では $T \leq 12$ を更なる検証の対象とする。理由は、 $T \leq 12$ のとき、一定程度の r のレンジで推定リスクの影響が現れる為である。実際、 $T=1$ では 0%～100% 全ての r で推定リスクの影響が現れ、 T の増加と共にそのレンジは制限されるが、 $T=12$ であれば、0%～14% 及び 86%～100% の r で推定リスクの影響が残される。他方、実務的観点から、1 期間を 1 ヶ月と見なしたとき、monthly data を 1 年分まで利用できる状況に対応させることができることも $T \leq 12$ を検証対象とする理由となっている。

次に、 r の実際の水準についてまとめておく。 r はその定義から、売上高総利益率に相当するものと見ることができる。その算出に必要な売上原価比率が 2019 年経済産業省企業活動基本調査から報告されており、そこから、売上高総利益率の平均水準が把握できる。Table 1 は、従業員 50 人以

上かつ資本金又は出資金 3000 万円以上の 3 万を超える企業を調査対象として集計された売上原価率であり、Table 2 は Table 1 の数値を基に算出した結果である。

Table 1. 売上原価率（出典：2019 年経済産業省企業活動基本調査）

売上原価率	平成 26 年度	平成 27 年度	平成 28 年度	平成 29 年度	平成 30 年度
製造業	81.0%	80.5%	79.5%	79.5%	80.4%
卸売業	89.3%	88.7%	88.3%	88.6%	88.6%
小売業	72.0%	71.3%	71.4%	71.7%	72.0%

Table 2. 売上高総利益率（Table 1 を基に算出）

売上高総利益率	平成 26 年度	平成 27 年度	平成 28 年度	平成 29 年度	平成 30 年度	平均
製造業	19.0%	19.5%	20.5%	20.5%	19.6%	19.8%
卸売業	10.7%	11.3%	11.7%	11.4%	11.4%	11.3%
小売業	28.0%	28.7%	28.6%	28.3%	28.0%	28.3%

Table 2 より、卸売業の売上高総利益率の水準は 11%前後であり、これは、 $T=12$ のときに推定リスクの影響が現れる r のレンジ（14%未満）に含まれる。この実状に鑑み、本節では、10%前後の r を検証の対象とする。他方、製造業と小売業の売上高総利益率の値は 14%を大きく上回る水準となっている。ただ、これらは数万を超える企業の集計値であり、言うまでもなく、14%未満の r を持つ企業が存在すれば、推定リスクは無視できない。

他方、個人企業においては、 r が高くなる傾向が中小企業庁より報告されている。

Table 3. 個人企業の売上高総利益率（出典：中小企業実態基本調査令和元年速報）

個人企業	生活関連サービス業、娯楽業	運輸業、郵便業	不動産業、物品賃貸業	学術研究、専門・技術サービス業
母集団企業数（社）	303,650	16,071	138,669	102,113
売上高（百万円）	1,634,638	139,154	1,406,469	1,965,286
売上原価（百万円）	310,514	15,602	109,417	93,362
売上総利益（百万円）	1,324,124	123,552	1,297,052	1,871,924
売上高総利益率	81.0%	88.8%	92.2%	95.2%

Table 3 の集計対象となっている個人企業には、本稿が想定している Newsvendor Problem に即したビジネスを展開していない企業も含まれているものと思われる。しかしながら、多くの企業が集計対象となっており、本稿の想定に適合する企業も含まれている可能性は十分にあるものと思われる。そこで、Fig. 1 及び Table 3 に鑑み、高い r については 92%前後を検証の対象とする。

dQ を計測するには、データの標本平均と σ を与える必要がある。ここでは、標本平均を100とし、 $\sigma=25,50$ の2パターンを検証する。以下のグラフは、 r の高低2パターンに σ の高低2パターンを掛け合わせた4パターンのグラフとなっている。

Fig. 2.

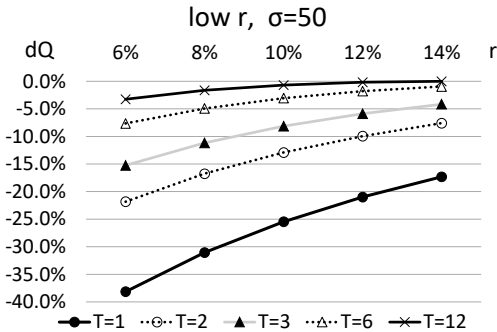


Fig. 3.

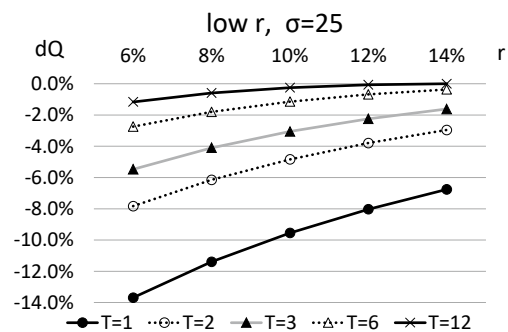


Fig. 4.

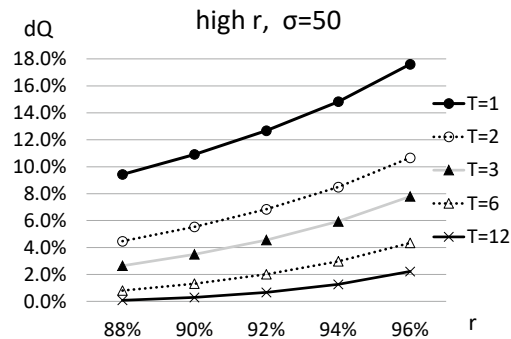
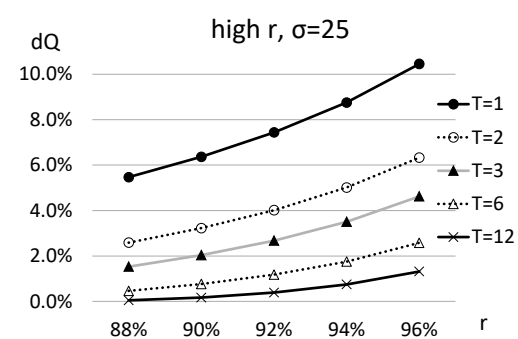


Fig. 5.



それぞれのグラフで r （横軸）に対応した dQ （縦軸）が、 $T=1, 2, 3, 6, 12$ の5パターンプロットされている。

Fig. 2とFig. 3は、低い r の検証結果であり、全ての dQ が負値となっている。これは、ストック数量を削減する方向への調整を意味する。例えば、Fig. 2の $r=10\%$ 、 $T=1$ の場合であれば、 $dQ \approx -25\%$ 、つまり、通常のNewsvendor problemにおける解に対応したストック数量を25%減らすことで、推定リスク考慮後の期待利益を理論上、最大化できることを意味している。Fig. 3はFig. 2の σ を半減させ25にした場合であり、Fig. 2に比べ縦軸 dQ のメモリが縮小されていることが分かる。リスクの小さい確率分布の場合、推定リスクも小さくなる為、推定リスクを考慮することで生じるストック数量の調整も相対的に小さくて済むことを示している。

Fig. 4とFig. 5は、高い r の検証結果であり、全ての dQ が正値となっている。これは、ストック数量を増加させる方向への調整を意味する。例えば、Fig. 4の $r=92\%$ 、 $T=1$ の場合であれば、 $dQ \approx 12.7\%$ 、つまり、通常のNewsvendor problemにおける解に対応したストック数量を13%程度増やすことで、推定リスク考慮後の期待利益を理論上、最大化できることを意味している。Fig. 5はFig. 4

の σ を半減させ25にした場合であり、Fig. 4に比べ縦軸 dQ のメモリが縮小され、前述同様、リスクの小さい確率分布の場合、推定リスクも小さくなり、その調整も小規模となることを示している。

6. 結論

本稿では、需要分布に Power Exponential Distribution を仮定し、Newsvendor Problem におけるパラメータ推定リスクの影響を検証した。具体的には、先ず、需要分布の平均を未知とし、観測データの標本平均を基に (4) のクラスからストック数量を決定することを前提に期待利益最大化問題を考察した。その結果、古典的な Newsvendor Problem の解に基づくストック数量 Q_0 より高い期待利益を与える方法 Q_δ の存在が確認された。次に、Power Exponential Distribution の中で、負の需要が発生する確率を排除できる一様分布の場合に、 Q_δ を特定する調整項を命題2で導出した。大きな T において Q_δ は Q_0 にほぼ等しくなるが、 T が小さく利益率 r が 0% 若しくは 100% に近い場合 (Fig. 1 の双曲線の外側)、 Q_δ は Q_0 と異なることを確認した。最後に、 Q_δ が Q_0 に比べ実務に影響するレベルの相違を示すことを、日本の卸売業や個人企業における平均的な売上高総利益率の場合に確認した (Fig. 2 ~ 5)。

本稿の議論を、産業構造変化や新市場開拓など、限られたデータで意思決定せざるを得ない状況下における在庫戦略に応用するべく、更に発展させたい。

7. 補足

本節では、Power Exponential Distribution のパラメータと一様分布の分散について、整理しておく。先ず、 $D \sim PE(\mu, \sigma, \infty)$ とするとき、 $V[D] = \sigma^2/3$ となることを確認する。 $z \sim PE(0, 1, \infty)$ とするとき $D = \mu + z\sigma$ と書けるので、 $V[z] = 1/3$ を示せば十分。これは、以下の通り明らか。

$$V[z] = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \psi_{\infty}(z) dz = \frac{1}{3}.$$

他方、一般論からも確認しておく。先ず、Gómez et al. (1998) より、

$$V[z] = \omega_{\beta} := \frac{2^{\frac{1}{\beta}} \Gamma\left(\frac{3}{2\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2\beta}\right)}.$$

実際、

$$V[z] = 2 \int_0^{\infty} z^2 \psi_{\beta}(z) dz = 2 \int_0^{\infty} \frac{z^2 \exp\left\{-\frac{1}{2} z^{2\beta}\right\}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2\beta}\right) 2^{\frac{1}{2\beta}}} dz,$$

ここで、 $t = z^{2\beta}/2$ と変数変換するとき、 $z = (2t)^{\frac{1}{2\beta}}$ より、 $dz = \frac{1}{\beta} (2t)^{\frac{1}{2\beta}-1} dt$ 、故に、

$$V[z] = 2 \int_0^\infty \frac{(2t)^{\frac{1}{\beta}} e^{-t}}{\frac{1}{2\beta} \Gamma\left(\frac{1}{2\beta}\right) 2^{\frac{1}{2\beta}} \beta} \frac{1}{\beta} (2t)^{\frac{1}{2\beta}-1} dt = \frac{2^{\frac{1}{\beta}} \Gamma\left(\frac{3}{2\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2\beta}\right)} = \omega_\beta.$$

$\omega_\beta \rightarrow 1/3 (\beta \rightarrow \infty)$ であることは、任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\Gamma(\varepsilon + 1) = \varepsilon \Gamma(\varepsilon)$ 、故に任意の $k \in \mathbf{N}$ に対し、

$$\frac{\Gamma(k\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)} = \frac{1}{k} \frac{\Gamma(k\varepsilon + 1)}{\Gamma(\varepsilon + 1)} \rightarrow \frac{1}{k} (\varepsilon \rightarrow 0),$$

従って、 $\varepsilon = 1/2\beta$ とすることで、以下の通り確認できる。

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \omega_\beta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2^{2\varepsilon} \Gamma(3\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)} = \frac{1}{3}.$$

参考文献

- Akahira, M. (2017), Statistical Estimation for Truncated Exponential Families, Springer Briefs in Statistics.
- Akahira, M., & Kashima, H. (1994), "On the consistency of the maximum likelihood estimator through its uniform consistency", *Statistics*, **25**, 333-341.
- Arrow, K., Harris, T., & Marshak, J. (1951), "Optimal Inventory Policy," *Econometrica*, **19**, 250-272.
- Beutel, AL & Minner, S. (2012), "Safety stock planning under causal demand forecasting," *International Journal of Production Economics*, **140**, 637-645.
- Dang, U.J., Browne, R.P., & McNicholas, P.D. (2015), "Mixtures of Multivariate Power Exponential Distributions," *Biometrics*, **71**, 1081-1089.
- Gómez, E., Gómez-Viilegas, M.A., & Marín, J.M. (1998), "A multivariate generalization of the power exponential family of distributions," *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **27**, 589-600.
- Huber, J., Müller, S., Fleischmann, M., & Stuckenschmidt, H. (2019), "A data-driven newsvendor problem: From data to decision," *European Journal of Operational Research*, **278**, 904-915.
- Wald, A. (1949), "Note on the consistency of the maximum likelihood estimate," *Ann. Math. Statistics*, **20**, 595-601.
- 鹿島浩之 (2020), "Power Exponential Distribution を需要分布に仮定した Newsvendor Problem," 青山経営論集, 第 55 巻, 第 1 号, 2-13.
- 中小企業庁 (2020), 中小企業実態基本調査令和元年速報 (平成 30 年度決算実績).
- 経済産業省 (2020), 大臣官房調査統計グループ企業統計室 2019 年経済産業省企業活動基本調査 (2018 年度実績).

謝辞

本研究は、2020 年度青山学院大学経営学会からの研究助成を受け実施した研究の成果である。ここに感謝の意を表したい。