青山国際政経論集 90 号，2013 年 5 月

論　説

ドーフマン＝スタイナー条件導出考

内　田　達　也*

I.　序

Dorfman and Steiner（1954）によって定式化された，広告支出の最適条件であるドーフマン＝スタイナー条件（以降 D-S 条件）は，ビジネススクールを中心に，マーケティングへの経済学的アプローチの一つとして，広く教授されている事項であろう。Bye（2010）や Shy（1995），丸山（2010）など，多くの経営経済学や産業組織のテキストが，D-S 条件をその導出とともに扱っている。しかし，その導出方法の多くは直観的な理解を得にくく，D-S 条件の本来意味するところを伝えきれていないように思える。そこで，本小論では，D-S 条件の導出を再検討し，より直観的に理解を得やすい導出方法を提示する。

II.　本論

D-S 条件とは，α を広告支出弾力性[1)]，η を価格弾力性，A を広告支出，P を価格，Q を生産販売数量とするとき，企業の利益を最大化する広告支出が

$$\frac{\alpha}{\eta} = \frac{A}{PQ} \quad (1)$$

を満たすように決まるというものである。すなわち，広告支出弾力性／価格弾力性の比率が，広告支出／売上高比率に等しい。

この式の導出を，現在最も一般的な Schmalensee（1972）の方法によって確認

*　青山学院大学国際政治経済学部教授

1）　1% の広告支出 A の増加が売り上げ数量 Q を何% 増加させるかを表す値。$(dQ/Q)/(dA/A) = (dQ/dA)(A/Q)$。

しよう。この導出方法は，価格変化を考慮した一般関数による導出で，Bye や丸山・成生もこれに倣っている[2)]。広告支出が需要を増加させるものだとすれば，需要関数は $Q = Q\,(P,A)$ と表され，企業の利益関数は

$$\pi\,(P,A) = PQ\,(P,A) - C\,[Q\,(P,A)] - A$$

となる。ただし，$C[Q]$ は総費用関数である。このとき，利益最大化の一階の条件は

$$\frac{\partial\pi}{\partial P} = \left[P\frac{\partial Q}{\partial P} + Q\right] - \frac{\partial C}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial P} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial A} = P\frac{\partial Q}{\partial A} - \frac{\partial C}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial A} - 1 = 0 \qquad (3)$$

の 2 式となる。(2) 式は広告支出を所与としたときに，価格と数量が満たさなければならない条件であり，(3) 式は価格を所与とした時に，広告支出と数量が満たさなければならない条件である。(1)，(2) 式の $\frac{\partial C}{\partial Q}$ は生産の限界費用であり，(2) 式は

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial Q} &= \left[P\frac{\partial Q}{\partial P} + Q\right]\frac{\partial P}{\partial Q}\\ &= \left[P + Q\frac{\partial P}{\partial Q}\right] = P\left[1 + Q\frac{Q}{P}\frac{\partial P}{\partial Q}\right] = P\left[1 - \frac{1}{\eta}\right] \qquad (2')\end{aligned}$$

と書き換えられる。この式の右辺は限界収入を表しており，$P\left[1 - \frac{1}{\eta}\right]$ はロビンソン＝アモローゾの公式である。この式を (3) に代入すれば，

$$P\frac{\partial Q}{\partial A} - P\left[1 - \frac{1}{\eta}\right]\frac{\partial Q}{\partial A} - 1 = 0$$

$$\frac{1}{\eta}\frac{\partial Q}{\partial A} = \frac{1}{P}$$

となり，両辺に $\frac{A}{Q}$ を掛けることによって $\frac{\alpha}{\eta} = \frac{A}{PQ}$ が得られる。

2) 価格一定の場合の導出は丸山 (2010)，コブ＝ダグラス型の需要関数からの導出は Shy (1995) に掲載されている。なお，価格一定のケースは Dorfman and Steiner 以前に Rasmussen (1952) が示している。

この導出方法は明快ではあるが，次の二つに難点がある。

第1の難点は，D-S 条件を導出する際に（2），（3）の両式を使わなければならないという点である。このことは，D-S 条件が，最適な数量（Q），価格（P），広告支出（A）が同時に決定される時に限って成り立つ条件であるかのように理解されるだろう。しかし，本来 D-S 条件は最適な数量の決定を前提としない。この点は，Dorfman and Steiner（1954）によるオリジナルの導出方法からも明らかである。

Dorfman and Steiner が提示したオリジナルフォームは，

$$\frac{\partial Q}{\partial A}P = \eta \tag{4}$$

であり，（4）式のに両辺に A/Q をかけることによって，

$$\frac{\partial Q}{\partial A}\frac{A}{Q}P = \eta\frac{A}{Q}$$

となり，（1）式が導出できるが，Dorfman and Steiner は（4）式を次のように導出している。まず需要関数を

$$Q = Q\,(P,A)$$

とし，これを全微分して

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial P}dP + \frac{\partial Q}{\partial A}dA$$

を得る。$dQ = 0$ の下では，

$$0 = \frac{\partial Q}{\partial P}dP + \frac{\partial Q}{\partial A}dA$$

が成り立ち，これを変形すると

$$dP = -\frac{\left[\dfrac{\partial Q}{\partial A}\right]}{\left[\dfrac{\partial Q}{\partial P}\right]}dA$$

となる。したがって，ある生産量 Q のときに生産量不変のまま広告支出を dA

だけ増加させれば

$$QdP - dA = -Q\frac{\left[\dfrac{\partial Q}{\partial A}\right]}{\left[\dfrac{\partial Q}{\partial P}\right]}dA - dA$$

$$= -\left[Q\frac{\left[\dfrac{\partial Q}{\partial A}\right]}{\left[\dfrac{\partial Q}{\partial P}\right]} + 1\right]dA$$

だけ利益が増加することになり，利益最大のときには

$$-\left[Q\frac{\left[\dfrac{\partial Q}{\partial A}\right]}{\left[\dfrac{\partial Q}{\partial P}\right]} + 1\right] = 0$$

あるいは変形して

$$-Q\frac{\left[\dfrac{\partial Q}{\partial A}\right]}{\left[\dfrac{\partial Q}{\partial P}\right]} = 1$$

が成り立っていなければならない。この式の両辺に価格弾力性 $-\dfrac{\partial Q}{\partial p}\dfrac{P}{Q} = \eta$ をかければ (4) 式を得る。このように，D-S 条件は生産量の最適決定とは無関係に導出されるが，Schmalensee の方法ではその点が隠れてしまう[3)]。

第 2 の難点は教育上の不都合である。D-S 条件は，通常，価格と広告支出の最適決定というマーケティングミックスの問題として扱われる。つまり，企業が価格決定力を持つことを前提としているので，前段として企業の価格決定問題が教授されるはずである。その際には，通常，利潤関数を

$$\pi(Q) = P(Q)\,Q - C(Q)$$

のように Q の関数にし，ここから一階の条件 $P + \dfrac{\partial P}{\partial Q}Q = C'(Q)$ を導いて，こ

3） つまり，Schmalensee の方法は，(2’) 式を (3) に代入することによって，(3) 式を価格一定での最適数量・広告支出の決定問題から，数量一定での最適価格・広告支出の決定問題に変換しているのである。

の条件式が，限界収入（左辺）と限界費用（右辺）が等しいという限界原理であることを説明する。そして，場合によっては左辺を $P\left[1-\frac{1}{\eta}\right]$ に変形するという手順を踏むであろう。しかし，現在一般的である Schmalensee の導出方法は利益関数を P と A の関数として使うので，(2) 式はそのままでは MR = MC を意味しておらず，最適価格決定問題から最適マーケティングミックス問題に移行する時の連続性が損なわれる。この点は，需要関数を $Q=Q\,(P,A)$ として条件を導いた Dorfman and Steiner と通じている。

そこで，こうした二つの難点を解消すべく，利益関数を次のように，Q と A の関数として表し，そこから D-S 条件を導いてみよう。

$$\pi\,(Q,A)=P\,(Q,A)\,Q-C\,(Q)-A$$

つまり，通常の独占モデルで想定するように，価格を数量（と広告支出）の関数として定式化するのである。このとき，利益最大化の一階の条件は，

$$\frac{\partial\pi}{\partial Q}=\left[P+Q\frac{\partial P}{\partial Q}\right]-\frac{\partial C}{\partial Q}=0 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial A}=Q\frac{\partial P}{\partial A}-1=0 \qquad (6)$$

の二式となる。

(5) 式は通常の独占と同様の式であり，$\left[P+Q\frac{\partial P}{\partial Q}\right]$ が MR，$\frac{\partial C}{\partial Q}$ が MC である。この式は (2') 式と同じ形に変形できるが，(5) は広告支出を所与とした時の最適な価格と数量の関係を表しているので，もちろん偶然ではない。これで，難点の 2 は解決される。

(6) 式は，数量を所与としたときの，最適な価格と広告支出との関係を表している。(6) 式は

$$Q\frac{\partial P}{\partial A}=1 \qquad (7)$$

と変形でき，両辺に価格弾力性を掛けることによって，$Q\frac{\partial P}{\partial A}\left[\frac{-\partial Q}{\partial P}\frac{P}{Q}\right]=\eta$ とすることができるので，これを $\frac{\partial Q}{\partial A}\left[\frac{PQ}{Q}\right]=\eta$ のように整えることができる。さらに，

両辺にAを掛ければ，$\frac{\partial Q}{\partial A}\frac{A}{Q}(PQ) = A \cdot \eta$となるので，これを整理すると$\frac{\alpha}{\eta} = \frac{A}{PQ}$となって，D-S 条件が導出できる。

以上の導出方法は，D-S 条件が (6) 式のみから導かれることを示しており，Dorfman and Steiner のオリジナルの導出方法と同様，数量を所与としたときの最適な価格と広告支出であることを意味している。これで難点の 1 が解決される。

われわれの導出方法は Dorfman and Steiner のオリジナルと同じ意味を持っているが，Dorfman and Steiner の分析が (4) 式を基本にするのに対し，(7) 式を基本にすることで D-S 条件の意味がより明確になる。つまり，(7) 式の左辺は追加的な 1 単位の広告支出によって得られる追加的な収入であり，右辺は追加的な費用である。ということは，これを変形して作った$\frac{\alpha}{\eta} = \frac{A}{PQ}$をさらに

$$\frac{\left(\frac{\alpha}{\eta}\right)}{\left(\frac{A}{PQ}\right)} = 1$$

のように変形すれば，(7) 式より，

$$Q\frac{\partial P}{\partial A} = \frac{\left(\frac{\alpha}{\eta}\right)}{\left(\frac{A}{PQ}\right)}$$

であることがわかる。つまり，広告支出に関する限界収入が，弾力性の比を売上高広告支出比率で除すことで得られるということである。最適な広告支出がなぜ D-S 条件で表されるのか，それは，広告支出の追加的な 1 単位の投入が，$\frac{\left(\frac{\alpha}{\eta}\right)}{\left(\frac{A}{PQ}\right)}$だけの収入を産み，それが費用 (= 1) と一致するからなのである。

III.　結論

本稿が示したのは，ドーフマン＝スタイナー条件を導く際に，利益関数を価格と広告支出の関数として定式化せずに，数量と広告支出の関数として定式化

することで，より直観的な理解が可能になるということである。なぜなら，この定式化によって，一階の条件の二式のうち，一つが MR (Q) = MC (Q) を意味し，もう一つが D-S 条件を意味することが明確になるからである。前者は「広告支出一定の下での最適数量・価格が満たす条件」であり，後者は「数量一定の下での最適価格・広告支出が満たす条件」である。つまり，D-S 条件は，最適数量の決定を前提としない，最適価格と最適広告支出の組み合わせ（マーケティングミックス）を意味しており，われわれの導出方法はその点をより明快に示すことができるのである。

文献リスト

Baye, M. (2009), *Managerial Economics and Business Strategy*, 7th Ed., New York: McGraw-Hill/Irwin.

Dorfman, R. and P. O. Steiner (1954), "Optimal Advertising and Optimal Quality," *American Economic Review*, 44, PP. 826–36.

Rasmussen, A. (1952), "The Determination of Advertising Expenditure," Journal of Marketing, 16, PP. 439–446

Schmalensee, R. (1972), *The Economics of Advertising*, Amsterdam-London: North-Holland.

Shy, O. (1995), *Industrial Organization: Theory and Applications*, Massachusetts: MIT Press.

丸山雅祥 (2010)『経営の経済学　新版』有斐閣

丸山雅祥・成生達彦 (1997)『現代のミクロ経済学：情報とゲームの応用ミクロ』創文社