

「分数の乗法」をめざした倍操作の教材系列

A Suggestion of the Sequence of Teaching to the Multiplications of Fractions

しょう だ りょう
正 田 良

1. 分数の乗法の教えにくさ

分数の乗法は、小学校の算数のうちで教えにくい単元のひとつである。その教えにくさは、単元の目標と、課題をつかむための導入とが乖離することにある。冒頭では、例えば、

1dLで、 $1\frac{1}{7}$ m²の壁を塗ることができるペンキが、 $2\frac{1}{4}$ dLあります。これで、 $2\frac{1}{2}$ m²の壁を塗ることはできるでしょうか。

と文章題が提示される。これから扱おうとする計算操作に対応する事象を示し、現実世界と計算とを関連付けるためである。分数の乗法であるので、それには、掛け算を行うべき現実世界の事象で、さらに、乗数・被乗数ともに分数となるものである必要がある。乗数が分数となる例を見出しにくいことや、子どもにとって親しみのもてる事柄であるかといった事象の見つけにくさはあるものの、上の例のような、ペンキ塗りや液肥、作物の収穫量など様々工夫されてきている。

一方、この単元の目標としては、「分数の乗法は、分子どうしの積を分子として、分母どうしの積を分母とする分数である」ことを知り、約分などを含む計算技能を習熟させることが挙げられる。この計算技能は、やや機械的なもので、特に、「分子」というのは、仮分数としてあらわした場合の分子である。和田常雄（1971）は、帯分数と仮分数について、次のように述べている。

帯分数と仮分数には、それぞれ一長一短がある。

	長所	短所
帯分数	数量感がはっきりしている	文字計算にはつながらない
仮分数	理論的で代数計算に結びつく	量感がはっきりしない

いずれを小学校としてとるかは、なかなかむずかしい問題であるが、一般的には、分数をはじめて学ぶという点で、加減では帯分数を主体にして仮分数をその中にふくめる。乗除では、仮分数を中心にして、帯分数をそのあとにつけるというのが妥当であると考える。（pp.63-64）量感を重視して、帯分数を用いた現実世界との関連が感ぜられる導入をしながら、単元のまとめとしては、仮分数に直して、「分子どうしの積を分子として、分母どうしの積を分母とする」というアルゴリズムを確認し、その習熟を行う。このような導入とねらいとの差異がある単元である。

上記の引用にある「文字計算」という言葉には、大きく分けて2点、補う必要な事柄がある。そ

の第1について述べよう。周知のように分数は、数論では、ペアノの公理によって定義される自然数体 $\mathbb{N}$ を用いて次のように定義される。

$$\text{整数: } \mathbb{Z} = \{m - n \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}, \text{ 有理数: } \mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

四則演算に関して閉じている有理数体は、仮分数の形で定義されるものであり、その大きさを示すための便宜的な表し方と帯分数は位置づけられる。ここに量感を重視するという帯分数による導入が、単元の後半では「便宜的な表し方」として扱われ、最終的には数学的な定義に即した形に持って行くという学ぶ対象のブレがみられる。これが、教えにくさの原因でもある。しかし、四則演算に関して閉じているという「体」(field)としての性質を素直に表す記法である。

第2の「文字計算」という言葉の含意として、中学で行われる文字の規約を挙げることができる。この代数での文字の規約とは、

(1) 項の中では、(係数) $\times$ (未知数) の順に書き、乗法記号 $\times$ を省略し、 $3x$ のように書く。

1-1) 小学校の算数では、(1あたりの量) $\times$ (分量) の順に書いて、式の意味を重要視したが、中学の代数では、未知数(で表されたもの)が何個分あるかに注目した方が、未知数の値を求めやすい。

1-2) 請求書で代金総額を求めるときなどの商業での利用の関わりで、乗除先行が行われるが、先に行われる乗除の部分の要素である、同じ項の中の因子の間を、物理的に近く書いた方が式の読み取りがしやすい。

という、2つの理由を考えることができる。

(2) 除法記号 $\div$ については、原則として書かない。その項に関しては、必要な部分を分数の形で表し、括線(分数の横棒)の下に除数を書く。

この理由としては、項の中では、乗除法しかないので、その相互の約分によるキャンセルを見つけやすく行いやすくすることが考えられる。

大きく分けて、この2つのことである。この規約は記法として仮分数を支持する。帯分数は仮分数に比べて、乗法記号ではなく加法記号を省いている点で代数の規約の方針とは異なるし、約分のしやすさは仮分数の方が優っている。

2. 小数や分数の導入と乗法

「倍」は小学校2年生でのかけ算の導入の際には、何個分の言い換えとしての意味しか持たない。しかし学年を経るにつれて、次のような意味を取り込んでいくが、このそれぞれについて配慮が必要である。

[1] 関数の初歩、特に比例関係を示す性質の中で

[2] 関数の統辞体系である、合成・逆を扱う具体的な例として

[3] 半端を表しうる同種の量の割合として

[1]について、藤枝美智子（1983）は、

このように、かけ算は、初めから量×量で導入するほうが一般性があり、発展性があるので適切です。倍は、もともと関数なのです。ですから量×量の乗法の意味がわかり使いこなせるようになってから、5、6年生あたりでとりあげた方がよいのです。

と述べている。「5、6年生あたり」という配当学年は当時のものに応じたものである。では、どうすれば「倍」概念をつかむことができるのか。量×量として表される積の量という3種の量の関係から抽象する。具体的な活動の中で、その量的関係を理解することがまず必要である。

[2]については、2つの数に関する関係を対象とするために、抽象的なものとなりやすいので、後に述べる旗の図などの、関係を示す具体物を教具として援用することが必要である。

[3]について、やや詳しく見ておこう。『数と計算の指導』（文部省、1986）は、小数の導入について、「ふつう長さや液量のような連続量を測定する場面が用いられる」（p.223）としながら、「整数の場合の3個、3円、3mなどから直ちに3がわかるのではない…（中略）…小数を数直線に目盛ったり、目盛られた小数を調べたりして、数としての意識化を図ることも大切」（p.224）と主張している。複名数で3L5dLと表される量は、小さな単位を用いて、35dLと単名数で表すことはできるが、大きな単位を用いて表すならば、3.5Lと小数、あるいは、分数を必要とする。

なお、ここでは分数倍の持つ初歩的な関数の合成としての意味を取り出すために、議論を単純にしたい。その意図で小数と分数の教材配列の問題は扱わない。小数の乗法と分数の乗法とを同じ単元で一緒に扱う提案（成城学園初等学校数学研究部、2008）が為されている。重要な論議ではあるが、以下の議論は、一緒に扱ったとしてもその分数の部分を取り出して論じたとしても同様となるものである。一緒に扱うか、別々に扱うかのどちらかを主張するものではない。

中村幸四郎（1981）は、デカルトの業績のひとつとして、液量や重さなどの種々の量を、長さ（座標量としては位置）という代表的な量を用いて表したことを指摘している。数直線はいわば、数としての特徴を引き出す手段として機能する。量の測定に関して、4段階指導として、直接比較、間接比較、任意（個別）単位、普遍単位の段階を経るべきことが有名である（例えば、文部科学省（2008：p.38））。個別単位での数学教育協議会の諸実践（例えば、八島正秋（1982））に見られるように、個数を数える「将棋盤型」の座標から、目盛りに付された数値を読む「碁盤目型」の座標へ発展させる加藤久和（2002）の「マイジョウギ」の実践は、個数を数える離散量（分離量）から、連続量へ発展のきっかけとなる。藤井斉亮他（2011）の、イルカの長さとかジラの長さを比較する際に、イルカを1とした数直線をそれぞれの絵と平行に入れる図からの段階的移行も重要である。これらの経験は、杉山吉茂（1986：p.223）の言う、包含除の割り進みからの半端の意識に発展できる表現とである。

小学校2年での乗法（かけ算）は、「同じ数ずつのものが何こあるとき、ぜんぶの数をもとめる計算」（一松信・他、2011）で、「1あたりの数と、何個分かを表す数とによって、全部の数を求

める」もの（遠山啓・他、1980）である。それを表す「かけわり図」も、棒グラフのように1あたりの数を縦に積み上げて、載せている皿などに、それぞれ一定の個数を載せていることと、その大きさを示している。この2点は、高等学校のグラフと積分へつながる特徴である（増島高敬・石井孝子（2004））。

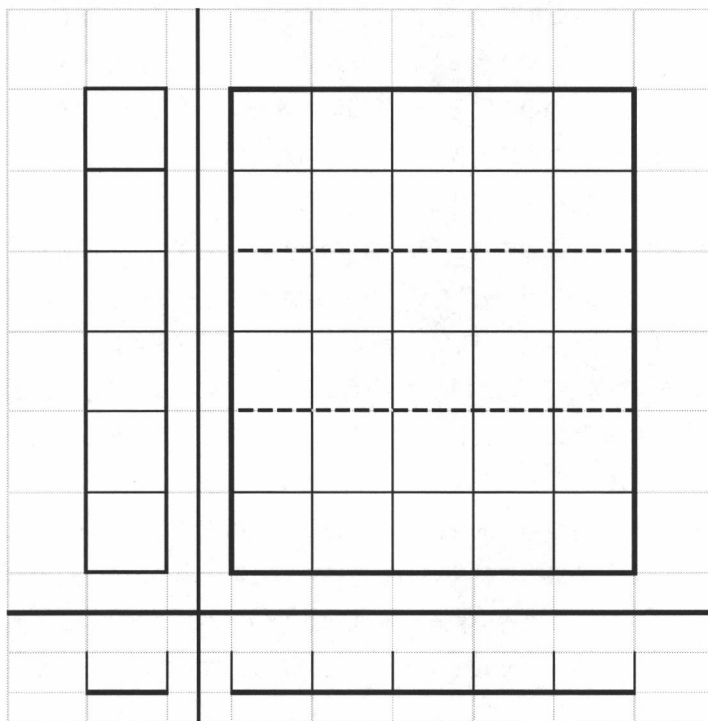


図1 かけわり図の例

例えば、「ひとりにキャラメルを6個ずつ5人に配ります、全部で何個キャラメルを用意するべきですか。」という文章題に対して、

〔ひとつあたり〕 ひとりにキャラメル6個ずつ

〔何個分〕 5人に配る

〔全体〕 キャラメルは全部で？

と文章を3行に分けて書き、図1のような「掛け割図」が書かれる。これは、乗除法での3つの量の関連を示すので、演算決定での助けともなる。なおこの図で太い縦線が縦線では一番長いものであるが、この線よりも左側の部分を「看板」と言っている（例えば、新川雄也（2013））。

宮本忠之（2013）は、看板に書くべきは、土台量（何個分）が1のときにはどんな全体量になるのかを手段として表された内包量であり、手段として書かれた外延量である量と区別すべきことを指摘した。小学校高学年で扱われる速度や密度は、それぞれ距離や質量とは異なる。この違いは

確かに重要なものである。しかし、既に述べたように2年生での乗法は個数を数えることが中心となる。杉山吉茂（2008）は、次のように述べている。

皿に盛ってあったとしても、3個は3個です。この12個は皿がないときの12個ですが、同じものでありながら、この饅頭は3のときは内包量で、12個になると外延量になる。…（中略）…まあ分からないわけではないですからいいんですが、速さなどと違っておかしなところも出てきます。

確かに、[個/皿]と[個]との単位記法の区別が為されていたとしても単なる略記法としての形式と意識される場合もあるだろう。しかし、話を両極端だけに注目することは危険である。1mあたりの値段を知ること、そのリボンを想像しようとする。例えば割り算でその値を出したのだとしたら、その計算が間違えてはいないだろうかと確かめるモニタリング（三宮、2009）に役立つだろう。水を砂場にまいて、1㎡あたり何リットルでは、どのような状態になるか、そのような「ひとつ当たり量」の量の感覚を授業の中で持たせる実践（岩村繁夫・他、2008）や、デジタル秤を使って重さを確かめ、それを図にかいて説明すること（松丸剛、2012）などが求められる。

一般に、割合で現象を見ることは、差で現象をみることよりもしにくい（藤村宣之、1995）。以上に述べたような量×量という現象から、関数の初歩としての「倍操作」を、安野光雅『ふしぎなきかい』のように引き出し、子どもに経験させて慣らし、整数倍から小数倍へ発展しうるアプローチが望まれる。

3. 「分数の乗法」に向けての授業書

3.1 「倍」操作の表象としての取り出し

DIMEプロジェクトでは、「旗の図」という教具を使って関数の初歩の導入が試みられている（正田良、1989）。関数は、

物－（量に注目）→数－（数と数の関係に注目）→関数－（変化に注目）→関数の演算子
と抽象度が上がっていく系列の途中として位置付けられる（磯田正美、1987）が、教具を用いることによってやや抽象度の高い操作を親しみが持てる活動によって導入する工夫が良く為されている。

DIMEの『Operations』では、旗を並べることと、旗を裏返すことで、それぞれ関数の統辞体系である合成と逆とに親しみやすくあらわしている。しかし、扱われている関数は、量との結びつきが乏しい。『Simple Mappings』という授業書は、その欠を補っている。日本での現行の学年配当（文部科学省、2008）で言えば、小学校4年に「数量を□、△などを用いて表し、その関係を式に表したり、□、△などに数を当てはめて調べたりすること」がある。例えば、□個の正方形を横に並べたものを作るには、同じ長さのマッチ棒が△個必要であるとしたときの、△を□を用いた式で表すような問題である。DIMEの授業書では、はじめのいくつかの自然数を入力とした状態の図が描かれており、出力を求めさせ、図の無いその次の出力、並びにやや飛んだ整数値が入力となった場合の出力を求めさせる。そして、入力から出力を求める方法を問い、それを式で表させるという一連

の活動が、1つの課題に対して1頁を割いて提示されている。これを参考にした授業書例を資料Aとして示す。活動の最後を、式を求めさせる代わりに旗の図で、入力と出力との対応関係を答えさせるよう改めた。その方が関数を対象として認識するのに適切な表象となると判断したためである。

1皿に3個ずつまんじゅうを配るとき、皿の枚数を入力として、必要なまんじゅうの個数を出力としている。旗の表示は、 $[\times 3]$ である。ここで、式で表す場合と数の順番が逆になることを注意しよう。皿の枚数を $\triangle$ [枚]とするなら、必要なまんじゅうの個数は、 $3 \times \triangle$ である。しかし、2つの量の対応関係としては、「3倍する」こととなるので、 $\triangle \times 3$ と表される。そのため、このページの最後に、「どうしてそう考えましたか？」を入れた。量 $\times$ 量を表す式は、

$3[\text{個}/\text{皿}] \times \triangle[\text{皿}]$ であるが、乗法の交換法則が成り立つので、 $(\triangle \times 3)[\text{個}]$ でもある。そのため皿の枚数を3倍すれば、まんじゅうの個数が求められるのである。ここで、量 $\times$ 量の乗法から、関数関係である、「入力を3倍することで出力が得られる」が取り出される。

3.2 調査問題から示唆されるもの

「魔法の旗に関するクイズ」という調査問題を作製し（正田、2013）、小学校3年から中学校2年までと大学生の計264名の回答を得た（正田、2014）。その概要を記す。

[調査問題の構成] 表1に記すように、回答者の特徴を調べる6つの小問と、教材本体、そして教材本体に関する感想を聞く4つの小問の、合わせて30問からなる質問紙調査として行った。また、回答者の学年も属性として付与した。

[結果の分析] 主要な結果を箇条書きで記す。

(1) 正答率を、30%未満がC、80%以上をA、AとCの間をBとして、各学年において教材本体に関する20の小問を分類すると、次のように分けることができた。

[あ]：(小問07、08、09、10、11、12：機能が既知の旗について入力から出力を求める問題、あるいはその逆操作の結果を求める問題。) すべての学年でAとなる。

[い]：(小問13、14、15：旗の機能を入出力の組から当てる問題。) 小3のみBで、あとはA。

[う]：(小問16：加法操作の合成) 小3がBで、他も少数の例外を除き、B。

[え]：(小問17、18、19、20、21、22：乗法を含んだ操作の合成や逆の旗表示) 小3ではC、他は少数の例外を除き、B。

[お]：(小問23、24、25：合成関数の逆関数) 大学生を除きC。

これらから小学校3年にとっては乗法を含んだ合成を、かなり難しく感じている。

(2) 回答者の特徴を説明変数、教材本体への感想を目的変数として重回帰分析を行った結果、「この教材は、算数・数学が得意で、特に帰一算や濃度などの「倍と割合」に関する能力が高い子どもにとって、見慣れている感じがして、やさしく、面白い」ということがわかった。

(3) 小問01～25について主因子法バリマックス回転による因子分析を行った結果、固有値が1を超える因子が3つ認められ、それぞれ、

表1：回答用紙の回答欄の構成（正田（2014b）による）

小問	問名称	形態	設問目的	質問の内容
01	【1】①	正誤	回答者の特徴	求差の問題。藤村（1995）による
02	②	正誤	回答者の特徴	濃さの問題。前掲の藤村にあるものの類題。
03	③	正誤	回答者の特徴	「時速 30km」が、だいたい何の速さかの把握。
04	④	正誤	回答者の特徴	倍に関する問題（帰一算）
05	⑤	正誤	回答者の特徴	乗法の作問（ 6×3 ）
06	【2】	正誤	教材本体	旗の表示 $[+2]$ から関数の機能を答える。
07	【3】ア	正誤	教材本体	加法を表す旗の入力から出力を答える。
08	イ	正誤	教材本体	加法を表す旗の入力から出力を答える。
09	ウ	正誤	教材本体	加法を表す旗の出力から入力を答える。
10	【4】ア	正誤	教材本体	乗法を表す旗の入力から出力を答える。
11	イ	正誤	教材本体	乗法を表す旗の出力から入力を答える。
12	ウ	正誤	教材本体	乗法を表す旗の入力から出力を答える。
13	【5】ア	正誤	教材本体	旗の表示を入出力の組から答える。
14	イ	正誤	教材本体	旗の表示を入出力の組から答える。
15	ウ	正誤	教材本体	旗の表示を入出力の組から答える。
16	【6】①	正誤	教材本体	2つの加法操作を合成した機能。
17	②	正誤	教材本体	2つの乗法操作を合成した機能。
18	③	正誤	教材本体	乗・加法の合成（1本の旗では表せない）。
19	【7】	正誤	教材本体	3本の旗を並べかえて所与の機能を持たせる。
20	【8】ア	正誤	教材本体	逆関数（逆移動で表示される旗の裏）
21	イ	正誤	教材本体	逆関数（ ）
22	ウ	正誤	教材本体	逆関数。ただし、 $[\times 0]$ の裏。
23	【9】ア	正誤	教材本体	合成関数の逆関数。 $[\times 2] \rightarrow [+ 3]$ の逆が、 $[ア : - 3] \rightarrow [イ : \div 2]$ である。 $[\times 2] \rightarrow [+ 10]$ の逆が、 $[\div 2] \rightarrow [ウ : - 5]$ 。
24	イ	正誤	教材本体	
25	ウ	正誤	教材本体	
26	【10】①	5件法	本体への感想	新奇性（1：よくみる～5：めずらしい）
27	②	5件法	本体への感想	難易度（～5：すごく難しい）
28	③	5件法	本体への感想	算数・数学との関連（～5：すごく関係ある）
29	④	5件法	本体への感想	面白味（～5：すごく面白い）
30	⑤	5件法	回答者の特徴	算数・数学の得意不得意。（～5：かなり得意）

- ・因子1：[あ]、[い] の正答に関する因子。即ち、入力・機能・出力の3者関係の把握。
- ・因子2：[う]、[え] の正答に関する因子。即ち、関数の合成や逆に関する把握。
- ・因子3：[お] の正答に関する反転。

と解釈された。因子2に対して、小問04、05も関連を持っており、0.35には満たないものの、小問02、03にもやや大きな因子負荷量が認められた。また小学校3年では、他の学年に比べて因子2の因子得点が低いことが顕著であった。このことから、小学校3年での乗除に関する基礎的な学習が、こうした教材を扱うには重要であることが分かる。

3.3 演算規則と分数の表現

3.2 で見たように、関数の合成に関しては、学年や倍に関する得意不得意が影響し、それがこの教材への興味関心にも影響する。3.1 で見たようにともすれば抽象的でわかりにくく思われる内容であるので、「旗の図」やそれに準ずるもので表象の具体化を図るとともに、いくつかの数値例を入力させるなどの実験を行って、その予想をさせたり、原因について話し合わせたりする活動が必要である。

資料Bとして、自然数倍をする機能を持つ2本の旗を1本の旗に置き換えることや、順番の入れ替えに関する授業書例を示す。具体的な数値による入力による出力を観察して、その機能を予想させ、入力を□として、一般化することによって、小学校4年で学習する乗法の結合法則に関わらせて根拠づけている。

四則演算の合成や逆操作を考える上で、関数という数に比べて抽象度は高い対象を、半具体物である教具「旗」の入れ替えで、手作業にふさわしいものとすることができる。ここでは、加減乗除という四則演算が扱われるが、加法で成り立った性質が、乗法でも成り立つかの類推をさせる面白味がある。授業書の概略を、表2として記す。なお、表2ではスペースの浪費を避けて、旗の図やその合成を次のように略記する。旗の表示を、[+2]などと“l”と、“j”とではさんで記し、[+2]→[+3] と→で並べることによって、旗が左右に並んで、操作が合成されていることを示している。[+2]→[+3] = [+5] は、この2本の旗で表わされた操作が、1本の旗、[+5]で置き換えられることをあらわしている。表2の(8)によって、

$$[\times 3] \rightarrow [\div 4] = [\div 4] \rightarrow [\times 3] \text{ で、これを、} \left[\times \frac{3}{4}\right] \text{ と書く}$$

と説明される。しかしこれは操作の合成を記したものであって大小関係を有する分数としては資料Cの授業書による作業で、はじめて数としての認識が得られる。

表2：旗の入れ替えと置き換えから、商分数へ

整理番号	メニュー項目	具体例	その根拠
(1)	どちらも+の2枚	$[+2] \rightarrow [+3] = [+5]$	加法の結合法則。
(2)	どちらも-の2枚	$[-2] \rightarrow [-3] = [-5]$	減法は加法の逆と（1）。
(3)	+ と - の混在 ※数の大小の場合によつて、 $[+M]$ になったり $[-M]$ になったりする。	$[+5] \rightarrow [-3] = [+2]$	$[+5]$ を $[+2]$ と $[+3]$ に分けて、後者を $[-3]$ とキャンセルする。
		$[+5] \rightarrow [-9] = [-4]$	$[-9]$ を $[-5] \rightarrow [-4]$ とみて、前者を $[+5]$ とキャンセル。
(4)	どちらも×の2枚	$[\times 2] \rightarrow [\times 3] = [\times 6]$	乗法の結合法則
(5)	どちらも÷の2枚	$[\div 2] \rightarrow [\div 3] = [\div 6]$	除法は乗法の逆と（4）。
(6)	× と ÷ の混在 (1)	$[\times 12] \rightarrow [\div 4] = [\times 3]$ $[\div 3] \rightarrow [\times 12] = [\times 4]$	$[\times 12]$ を、 $[\times 3] \rightarrow [\times 4]$ とみなして、キャンセル。
(7)	× と ÷ の混在 (2)	$[\div 12] \rightarrow [\times 4] = [\div 3]$ $[\times 3] \rightarrow [\div 12] = [\div 4]$	上と同様。
(8)	× と ÷ の混在 (3) 割り切れない場合	$[\div 3] \rightarrow [\times 2] = ?$ (資料C参照)	$[\div 3] \rightarrow [\times 2]$ とはものを3等分したものを、2倍することです。 これを分数で、『 $\frac{2}{3}$ にする』と言いました。また、2倍にしてから3等分した結果です。

そこで、

$$\begin{aligned}
 \left[\times \frac{A}{B} \right] &\rightarrow \left[\times \frac{C}{D} \right] = [\times A] \rightarrow [\div B] \rightarrow [\times C] \rightarrow [\div D] \\
 &= [\times A] \rightarrow [\times C] \rightarrow [\div B] \rightarrow [\div D] \\
 &= [\times (A \times C)] \rightarrow [\div (B \times D)] \\
 &= \left[\times \frac{A \times C}{B \times D} \right]
 \end{aligned}$$

を示すことができる。

3.4 学年配当と教材の系列

現行の学習指導要領（文部科学省、2008）の学年配当と基準に、以上に述べてきたプランを位置付けるとともに、その間の内容について補完を試みる。これまでに授業書の作製を中心に子どもの発達支援を行うプランを考えてきた。「関数の初歩」を早期に導入し、通常のアプローチとは異なる工夫が為されるが、そこでも既習事項が何であるかは重要な要素である。表3に授業書全体の構想を記す。これは連続して使用するものではなく、学年配当による正規の内容とに関連させて扱う。

表3-1：授業書全体の構想（その1）

	配当時数	主な内容	表1などとの関連	先習を要する内容
I 関数の初歩				
1. 数の対応	(2H)	・ 入力と操作から出力を当てる ・ 出力と操作から入力を当てる	06 ～ 12	等分除
		・ {入力・出力の組} から四則の1回で表わされる操作を選ぶ。	13 ～ 15 資料 A	包含除
II 関数の合成と関数の逆				
2. 操作の合成	(1／1)	・ 「2倍してから5を足す」というような操作を扱う。 ・ 入力と旗の並びから、出力、旗の並びと出力から、入力を当てる ・ 入力と出力の組と、一か所を欠いた旗の並びから、欠けた旗を当てる。	16 ～ 19	

表3-2：授業書全体の構想（その2）

	配当時数	主な内容	表1での 関連小問	先習を要 する内容
II 関数の合成と関数の逆（承前）				
2. 操作の合成	(1 / 1)	・入力と出力の組となるように、並べるべき旗の組を、適切に並べ直す。		
3. 逆操作	(1 H)	・逆移動で表示される旗の裏。	20, 21	
4. 合成関数の逆	(2 H)	・ $[\times 2]$ してから $[+ 3]$ の逆は、 $[- 3]$ してから $[\div 2]$ すること。	23 ~ 25	
III 複数の旗を1本にまとめる				
5. 加法と減法の旗の並び	(3 H)	・$[+ 6]$と$[- 2]$とを並べる。それと同等な機能を持つ1本の旗を求める。 ・並びから、それと同等な1本を当てる。 ・同等な1本と、並びのうちの1本から、残りの1本を当てる。 ・旗の並びが、$[+ M]$と$[- N]$の形のもののみのときには、旗の順を自由に入れ替えることができること。	表2の (1) ~ (3)	加法の交換法則・結合法則
6. 乗法と除法の旗の並び（整数の範囲で割り切れる場合）	(4 H)	(資料Bの授業書)	表2の (4) ~ (7)	乗法の交換法則・結合法則
7. 乗除法の旗の並びと商分数	(2 H)	・分数の形式でまとめて、見通しよく約分のような操作を行う。 ・資料Cの授業書	表2の (8)	同じ大きさの分数
8. 分数倍の合成	(1 H)			
9. 恒等変換	(1 H)	・$[\times M]$は、$[\times \frac{M}{1}]$と扱え、$[\div M]$は、$[\times \frac{1}{M}]$と扱える。		

4. 「分数の乗法」に関する学習指導計画

4.1 式の意味

乗法は、「1あたりの数と、何個分かを表す数とによって、全部の数を求めるもの」であった、操作の合成とは異なるものである。そこで、分数の乗法、つまり（分数）×（分数）の計算を扱うには、その計算を必要とする文章問題を提示する。

「1m140円のリボン0.7mの値段は何円か。」という文章問題を提示して、その答えを考えさせた後、式を答えさせると、「 $140 \div 10 \times 7$ 」と計算の方法を示したと言う。子どもにとっての式は、乗法が為される際の2つの量を乗法で結び付けたものでは必ずしもなく、時として計算の方法のメモではない。

そこで、授業では文章問題を示したあと、すかさず「式は何ですか」と問い、数値も、例えば、「1m150円のリボン2.1mの値段」などとし、2.1mは大体2mに近いから、その値段は、

$150 \times 2 = 300$ （円）に近いだろうと見通しを立てさせ、 150×2.1 の意味付けが為されるようにするのが普通である。

これまでに扱ってきた旗の図での作業は、「倍操作」の合成である。それは分数の乗法のアルゴリズムを理解する上で重要な役割を果たす。しかし、「倍操作」の合成が、乗法を意味することは、この授業場面では必ずしも子どもにとって自明の事実ではない。むしろ、既習事項として意識されるよう学習指導計画を仕組んでいく必要がある。

4.2 問題解決型学習とその意義

今日「問題をつかむ（見通す）・自力解決・練り上げ・まとめ」という段階を踏むいわゆる「問題解決型授業」は、よく知られるところとなったが、『数と計算の指導』（文部省、1986）で既に多様な解決について触れられている。やや長いが引用しておこう。

自らの解決を振り返ったり、別の解決計画と比較したりして、次第に洗練していき、より手際よい解決を追求するように仕向ける…（中略）…問題解決では結果よりも過程が大切であるといわれるのもこの点においてであり、…（中略）…問題が多様な解決を受け入れやすいものであることが望ましい。／最近の算数の授業では、問題の多様な解決が要望されているといわれている。しかし、注意しなければならないことは、一人一人が多様な解決を行うことが求められているのであって、各人は1つの解決であるものを学級全体で集めるといろいろな解決があったというだけでは十分ではない。多様な解決は、自分の解決の正しさを確かめたり、よりよいものに練り上げるために第2、第3の解決を工夫するところからおのずと生まれるものである。（p.30）

数学の論理は、その演繹的性質を特徴とする。その一方で、安西祐一郎（1982）は「物理や数学のような学校教育科目で知識が身につくのは、例題や練習問題を自分で解くことによることが多いように思われる。」（p.80）と指摘する。「問題の理解のための知識の量や構造化の不足であるという

考えかたが、上のような研究から示唆される」(p.74)ともされるが、多様な問題解決によって数学的事実を多面的にみることは、この意味でも望ましいことである。

一方、個人の問題解決においては、漠然とした知識の蓄積からアトランダムに要素を機能させるのではなく、何らかの見通しによって膨大な要素から必要な要素を関連付けることが必要となる。このため、自力解決の前にその準備として、子どもに既習事項を想起させることは、授業者にとって重要な意図的なポイントとなる。

子どもにつかませるべき問題は、(分数)×(分数)の結果を求めることであって、どれくらいの量であるか。いわば、帯分数的な表現が興味の中心となる。しかし、1. で述べたように、この単元で目指すものは分数の乗法のアルゴリズムであって、むしろ仮分数的な表現を必要とする。授業の冒頭では、文章問題によって、分数の乗法を考えるべき状況が把握される。しかも個人別の問題解決場面では、既習事項として分数倍の合成を想起する子どもも出るような学習指導計画でありたい。

4.3 分数の乗法の学習指導計画

表4に、分数の乗法の単元に関する学習指導計画を記した。「提案」の列に、それぞれの教材が提案の第何時に当たるのかを記し、2011（平成23）年度使用開始の検定済教科書のうちで占有率の高い2つを選び、その教師用資料（以下「東書」、「啓林」と略記する）に記されている標準的な指導時数を、これも第何時に当たるのかを、それぞれの列に記した。この表では複数の行にわたる教材が同じ時間に扱われる場合には、「5a」、「5b」のようにローマ字を付して区別している。

東書では「分数×分数の計算の仕方は、『分母どうし、分子どうしをそれぞれかける』とまとめられる。しかし、これを導き出す過程は単純ではない」（指導書p.49）と指摘し、子どもの意見例を示すキャラクターを使って、

- ・ゆみ：単位分数で表されるペンキ量で塗れる面積を求めて、乗数の分子倍する。
- ・ひろき：いったん「乗数の分母」倍をした値を考えてから、それを同じく「乗数の分母」で割り、求めるべき数を出す。

の2通りの考え方を提示している。他方、啓林では、第2時で単位分数倍を扱い、第3時で「(両方の分母の積)分の1」の何個分かに注目させ、 $\frac{\triangle}{\square} \times \frac{\star}{\bigcirc} = \frac{\triangle \times \star}{\square \times \bigcirc}$ と記号でのまとめを提示している。

約分や逆数などは、提案では「分数倍の合成」の観点で前半に扱うことになるので、後半で独立した時間としては扱わない。また退化した形としての整数倍も前半（提案の第3時）に扱うので、提案の第7時の7aは、帯分数の扱いを中心とする。

「分数を使った面積の求め方」については、独立した時間を配さなかった。2. で記したように、乗法の意味理解や演算決定に、かけわり図を積極的に扱う。そこで、提案の第5時である「分数を掛けることの意味」において、その場面や、計算の過程の説明に面積の性質を用いる活動が予想さ

れ、この場面では、子どもが面積に関する知見を活用することが予想される。その後で、同じような議論を再び行うことは、論拠が不明確となると判断した。

表4：学習指導計画の提案と標準的な時間配当と比較

提案	東書	啓林	テーマ	内容の補足
		1	復習と準備運動	小数のかけ算、割合など
1			操作の合成でのキャンセル	約分参照。また表3 III 7. 参照。
2			分数倍の合成	表3 III 8. 参照。
3			恒等変換（特殊な場合としての整数倍）	表3 III 9. 参照。
4			分数倍の逆操作	
5	1	2	分数を掛けることの意味	
6	2	3	分数×分数の求め方（一般化）	
	3	5a	約分のある場合	提案では第2時に代える
7a	4	4	整数や帯分数を含む場合	提案では一部を第3時に
7b	6	5b	3口の計算	
	7	6	逆数	提案では第4時に代える
8	8	7	練習	
		8	分数倍の意味。割合の第2用法	
	5	9	分数を使った面積の求め方	提案では第5時に扱う
		10	積の大きさ	乗数が1未満だと縮小
9	9	11	確かめ	

東書：『新しい算数6上』（平成23年使用開始検定済教科書）教師用指導書指導編

啓林：『わくわく算数6上』（平成23年使用開始検定済教科書）指導書第2部詳説朱注

この表では、さほど提案の所要時数は、現行検定済教科書のそれを変えないように見えるが、この単元の前に、表3として記した学習を必要とする。表4との重複分を除いても、13時間の増加となる。かなり時数の負担が増すので、小学校4年で整数の等分除・包含除などの先習を要する教材が扱われるので、適宜特設単元として表3の内容を扱っておく工夫が必要である。

4.4 分数の乗法を導入する授業

以下に、表4で提案する第5時の概略を学習指導案での「本時の展開」の形式を使って説明する。

[本時のねらい] (1) 文章問題から(分数)×(分数)の形の立式をする。

(2) 前項の具体的な式に関して、式の値を分数の形で求める。

(3) 「2つの分数の積は、両方の分母の積を分母に、分子の積を分子とする分数である」という形へ一般化する。

配時（分）	活動	学習内容	留意点
0	つかむ	・問題を提示する。 1dLで、$1\frac{1}{7}$ m³の壁を塗ることができるペンキが、$2\frac{1}{4}$ dLあります。 これで、$2\frac{1}{2}$ m³の壁を塗ることはできるでしょうか。 ・ペンキで塗ることができる壁の面積を表す式は何か。 ・その式の値は何か。	・数直線や公式への適用も考えられるが、ここでは、掛け割図を使っての表現を用いたい。
8	自力解決	C1： 仮分数で、1dLで$8\frac{1}{7}$ m³と表し、ペンキの量を表す数直線で、その2倍と、$8\frac{1}{7}$の4分の1である、$2\frac{1}{7}$との和。 C2： 被乗数・乗数のそれぞれを単位分数で測った、$1\frac{1}{7} \times 1\frac{1}{4} = 1\frac{1}{28}$がいくつ分かを、掛け割図で考える。 C3： 「分数の積は、分数倍の合成の結果である」を思い出すことは、直前に行ったことではあっても、逆思考となるので、子どもから出すのは難しいだろう。	・机間指導 ※ C4 整数になるようにいったん何倍かしておいて、あとでその数で割る方法は、理論的ではあっても、あまりに抽象的な思考であるので、出ないだろう。
25	練り上げ	・児童の考え C1、C2 を発表させる。 ・C4があれば取り上げるが、なければ触れない。 ・2つの分数の積が、どの考えでも、$2\frac{4}{7}$となることを確認し、それが、$2\frac{1}{2}$よりも大きいことを数直線上で示し、元の問題の答え、「塗ることができる」を言う。 ・他の考えとして C3 を取り上げる。 ・1に$[\times 8] \rightarrow [\div 7] \rightarrow [\times 9] \rightarrow [\div 4]$を行った結果であることを確かめ、簡約すると、$[\times (2 \times 9)] \rightarrow [\div 7]$となる。	・C3がなければ、既習事項である「分数倍の合成」を想起させる。次時以降に回してよい。

配時 (分)	活動	学習内容	留意点
40	まとめ	子どもの言葉でまとめさせたい。 ・ $[\times (\frac{\triangle}{\square} \times \frac{\star}{\bigcirc})]$ は、 $[\times \frac{\triangle}{\square}] \rightarrow [\times \frac{\star}{\bigcirc}]$ 。 ・ $\frac{\triangle}{\square} \times \frac{\star}{\bigcirc} = \frac{\triangle \times \star}{\square \times \bigcirc}$	・ その根拠を、簡単な関数の合成として説明できるとなおい。
45		・ 適宜約分する。・ 帯分数を仮分数にする	

特に、分数を長い横棒（括線）で、分母と分子に分けて、それぞれをいくつかの数の積の形で書く形式は、約分が容易に効率よくできる方法であるので、次時（第6時）以降の練習の中で、その書き方の良さを理解させたい。

簡単な関数の合成としてみることで、 $\frac{\triangle}{\square} \times \frac{\star}{\bigcirc} = \frac{\triangle \times \star}{\square \times \bigcirc}$ という結論が、導出の根拠とともに見やすくすることができる。これが、4. 3 で述べた13時間に及ぶ、授業時間数上の増加に見合うべきこのアプローチの長所である。

（付記）これは日本カリキュラム学会第25回大会（2014年6月関西大学）で「関数の初歩としての倍概念－分数の乗法を目指す教材系列－」として発表した内容に大幅に加筆と加えたものである。資料Aについては、秋葉真子（国士舘大学初等教育専攻学生）資料Bについては二ノ宮夏奈（同学生）の両氏との議論から多くの示唆を得た。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- 安西祐一郎（1982）「（第2章）問題解決の過程」波多野誼余夫（編）『認知心理学講座4 学習と発達』東京大学出版会。
- 安野光雅（1982）「ふしぎなきかい」『はじめてであうすうがくの絵本2』福音館書店。
- 一松信・他（2011）『みんなと学ぶ 小学校算数』（2年下）学校図書（文部科学省検定済教科書）、p.9。
- 磯田正美（1987）「関数の思考水準とその指導についての研究」『日本数学教育学会誌』第69巻第3号、pp.2-12。
- 岩村繁夫・他（2008）『いろいろな量』（算数の本質がわかる授業・6）日本標準。
- 加藤久和（2002）『いきいき算数2年の授業』ひまわり社。藤井斉亮・他（2011）『新しい算数』（4年上）東京書籍（文部科学省検定済教科書）、p.44。
- 三宮真智子（2009）「（第7章）思考」市川伸一（編）『認知心理学4』東京大学出版会。
- 正田 良（1989）『DIME 授業書による楽しい数学』明治図書。
- 正田 良（2014a）「『魔法の旗についてのクイズ』の作成」青山学院大学教育学会紀要『教育研究』第58号、pp.1-17。
- 正田 良（2014b）「『魔法の旗についてのクイズ』の試行報告」『学芸大数学教育学研究』第26号。
- 杉山吉茂（1986）『公理的方法に基づく算数・数学の学習指導』東洋館出版社。
- 杉山吉茂（2008）『初等科算数教科教育学序説』「かけ算・わり算 小数・分数」（第10回）、東洋館出版社。
- 新川雄也（2013）「かんばん書きの術・三段書きの術・図かきの術で○の段をつくろう」（授業プリントの保存版8・小学校2年）数学教育協議会（編）『数学教室』2013年11月号、国土社。遠山啓・他（1980）『わかる算数』（2年）むぎ書房。中村幸四郎（1981）『数学史－形成の立場から－』共立出版。

藤枝美智子（1983）「かけ算の導入」日本教職員組合（編）『さんすうの授業 第1階梯』一ツ橋書房、pp.149 - 181。

藤村宣之（1995）『認知心理学からみた 数の理解』北大路書房， p.137。

増島高敬・石井孝子（2004）『なるほどなっとく！数学再挑戦』日本評論社。

宮本忠之（2013）「「かけわり図」の“あれ”は「1あたり量」か？」数学教育協議会（編）『数学教室』2013年9月号、国土社。

文部省（1986）『数と計算の指導』大日本図書。

文部科学省（2008）『小学校学習指導要領解説 算数編』東洋館出版社。

八島正秋（1982）「方眼の図形」遠山啓・銀林浩編『算数わかる教え方・2年』国土社。

和田常雄（1971）「小学校における水道方式の実際」遠山啓・銀林浩（編）『水道方式 一数学教育現代化の基礎 2』国土社。

Stevens, S. S. (1946), "On the Theory of Scales of Measurement", *Science* 103 (2684) : 677-680.

資料 A 授業書「乗法から《倍操作》を取り出す」

1. 下線の数をおぎないましょう。

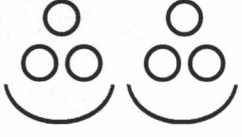


1 →

3 



2 →

6 



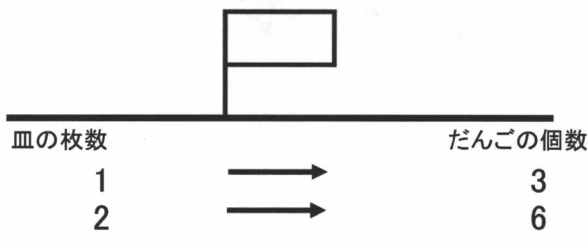
3 →



4 →

8 →

2. 左の数（皿の枚数）から、右の数（だんごの個数）は、どのように出しましたか？
旗の図で表しましょう。



3. 皿の数と、だんごの個数の関係を、ことばの式であらわしましょう。この式を使って上の図の
関係になることを説明してできますか。

資料 B 授業書「整数倍をあらわす 2 本の旗を 1 本の旗に置き換える」

1

【問題 1】 それぞれの出力を書きましょう。



何か気付いたことは、ありますか？ 別の何倍かする働き of 2 本の旗（例えば、4 倍する旗と、10 倍する旗の 1 本ずつの 2 本）についても、同じことが成り立つかどうか、調べてみましょう。

【お話し 1】

4 年生のときに学んだように、 $(\bigcirc \times \triangle) \times \diamond = \bigcirc \times (\triangle \times \diamond)$ のような性質があります。ちょっと難しい言葉で「結合法則」と呼びます。

上の図の左側の出力は、それぞれの入力を、□とかくと、 $(\square \times 2) \times 3$ と書くことができます。

右側の出力は、 $\square \times 6$ ですね。これが、左側の入力が等しいものと、同じものになることを、結合法則を使って説明することができます。

左の出力は、 $(\square \times 2) \times 3$ 。結合法則で、 $(\square \times 2) \times 3 = \square \times (2 \times 3)$ 一番右の括弧の中を計算すると…？

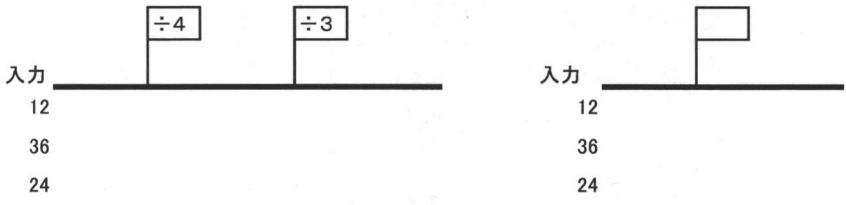
【問題 2】 次の (1) ～ (5) について、2 本の旗で表わされた働きが、1 本の旗で表わされた働きになるように、空欄に旗の表示を補いましょう。

	2 本の旗		1 本の旗
例	× 2	× 3	× 6
(1)	× 5	× 7	
(2)	× 8	× 4	
(3)	× 7		× 21
(4)		× 6	× 30
(5)		× 10	× 60

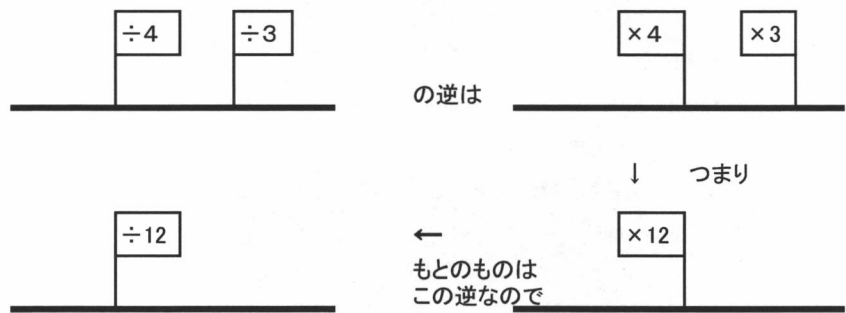
2

「3倍する」の逆操作は、「3等分する」でした。もうひとつ、思い出しておきましょう。「靴下をはいてから、靴をはく」の逆は？

【問題3】 左の2本の旗の働きと、右の1本の旗の働きが同じにするには、右の旗の表示をどうしたらよいでしょうか。左の入力と同じ入力を右に行った時に、右の出力が、それぞれ左の出力に等しくなったように図に書きくわえてから考えましょう。



【お話し2】



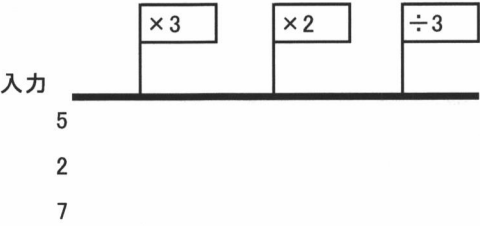
(ことばと式でまとめましょう)
÷○ という働きと ÷△ という働きとの合成は、÷ () になります。

【問題4】 次の(1)～(4)について、2本の旗で表わされた働きが、1本の旗で表わされた働きになるように、空欄に旗の表示を補いましょう。

	2本の旗		1本の旗
(1)	÷5	÷3	
(2)	÷2	÷8	
(3)	÷4		÷12
(4)		÷7	÷35

3

【問題5】 3本の旗の合成を考えます。



それぞれの出力を計算しましょう。また、この3つの操作を合成したものを、1つの旗で表わすことはできますか？ そして、それはどうしてでしょう。

【問題6】 次の（1）～（5）について、複数の旗で表わされた働きの合成が、1本の旗で表わされた働きになるように、空欄に旗の表示を補いましょう。ただし、「-----」のある行は2本の旗を合成し、「例」のように斜線のない行は3本の旗を合成します。

	複数の旗			1本の旗
例	$\times 3$	$\times 2$	$\div 3$	$\times 2$
(1)	$\times 4$	$\div 2$	$\times 2$	
(2)	$\div 5$	$\times 7$	$\times 5$	
(3)	$\times 21$	$\div 3$	-----	
(4)	$\times 42$	$\div 7$	-----	
(5)	$\div 9$	$\times 54$	-----	

【問題7】 次の（1）～（3）について、複数の旗で表わされた働きの合成が、1本の旗で表わされた働きになるように、空欄に旗の表示を補いましょう。

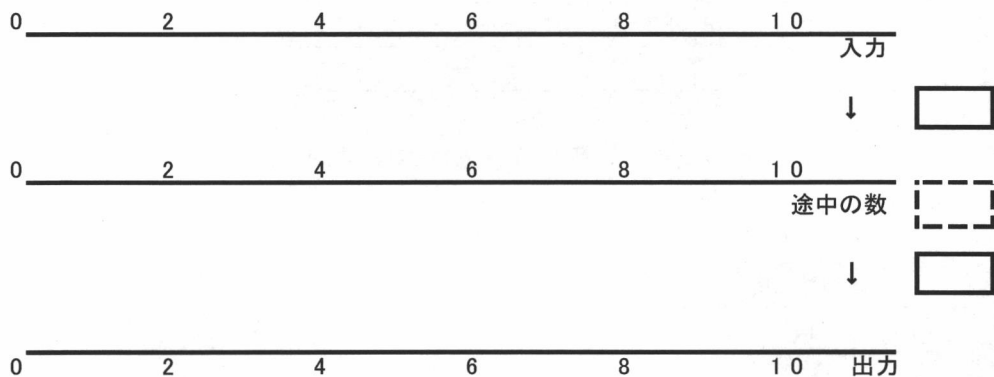
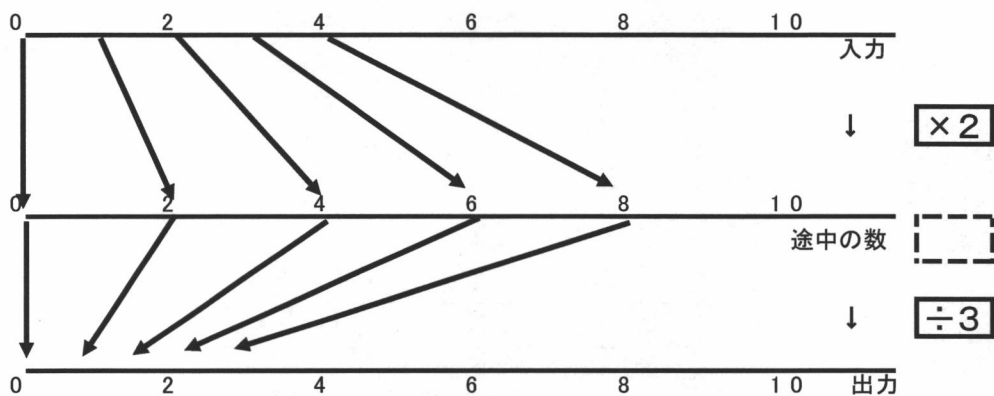
	複数の旗			1本の旗
(1)	$\div 14$	$\div 2$	$\times 2$	
(2)	$\div 63$	$\times 9$	-----	
(3)	$\times 8$	$\div 48$	-----	

資料C 授業書「等縮尺で平行な3本の数直線」

下の3本の数直線を使って、入力が1, 2, 3, …のときの, 途中の数, 出力はどのようなになるか矢印を使って表してみましょう。例えば,



は, 次のように表すことができます。下の「操作の例」のそれぞれの場合はどうなるか, 班で手分けして書いてみましょう。



操作の例: $[\times 2]$, $[\times 3]$, $[\div 2]$, $[\div 3]$, $[\div 3] \rightarrow [\times 2]$, $[\div 2] \rightarrow [\times 3]$