

## 論文

# 線形モデルを利用したポートフォリオ 選択におけるファクターと パフォーマンスの関係について

鹿島 浩之

### キーワード

ポートフォリオ選択  
多変量 t 分布  
Heavy tailed distribution  
Sharpe ratio  
最尤推定量

### 目次

- はじめに
- 設定
- ファクターの効果
- 数値的検証
- 結論
- 補足

## 1. はじめに

金融資産価格は、政治、経済、金融市場など様々な要因の影響を受け変動する。従って、機関投資家など金融資産を保有し運用する主体は、それらの情報から有効なファクターを取捨選択し、資産選択の意思決定に利用することが求められる。学術的にも、Arbitrage Pricing Theory (Ross (1976)) の登場以降、Huberman (1982)、Connor (1984) など、ファクターモデルを前提としたポートフォリオ選択の議論が展開され、Chen, Roll and Ross (1988)、Fama and French (1993) など、多くの実証研究が蓄積されてきている。

ポートフォリオ選択においてファクターモデルを利用する際、採用するファクターは、資産価格変動に対する説明力の高いものが求められるが、そのようなファクターの利用によりポートフォリオのパフォーマンスが改善される保証はない。個別ファクターの説明力とパフォーマンスの関係は単純な構造では無く、ファクターの利用が追加的なモデルの推定リスクを生み、パフォーマンスを悪化させる可能性も否定できない。

そこで本稿では、金融リスク資産の超過リターンベクトルに多変量  $t$  分布を仮定し、線形モデルを利用したポートフォリオ選択において、ファクターの説明力とパフォーマンスの関係について考察する。ここで、超過リターンに多変量  $t$  分布を仮定する理由は、Fergusson and Platen (2006) や Stuart and Ord (1994) などの実証分析結果に依っている。Fergusson and Platen (2006) は、世界各国の株式インデックスを対象に、幾つかある Heavy-tailed distribution の中で Student  $t$  distribution が最も実際のデータに適合しているという検証結果を報告している。リスク資産のリターンが、正規分布より裾の厚い分布に従うことが現実である以上、リスク管理などの観点からも、実際に即した議論が必要である (e.g. Rachev et al. (2005))。

本稿の構成は次の通りである。先ず第2節で、鹿島 (2015) の議論に即し、問題設定を行った上で、ポートフォリオのパフォーマンスに相当する Sharpe ratio を与える。次に、第3節で、ファクターの効果と Sharpe ratio に関する関係式を導出し、第4節で、導出した関係式を用い、ファクターの説明力とパフォーマンスの関係を数値的に検証する。

## 2. 設定

本節では、議論の前提であるポートフォリオ選択問題の設定を行う。尚、この設定は、鹿島 (2015) に即した内容である。先ず、投資対象は  $n$  個のリスク資産 ( $n > 2$ ) と1つの安全資産とする。 $n$  リスク資産の超過リターン生成モデルとして Stochastic Representation (Gupta and Varga (1993) Theorem 2.5.2) を用い、以下を仮定する。

$$r_t^d = Bf_t + (z\Sigma)^{\frac{1}{2}} e_t \quad (t=1, \dots, T, T+1), \quad (1)$$

ここで、 $r_t \in \mathbf{R}^n$  は  $n$  リスク資産の第  $t$  期の超過リターンを表す確率変数ベクトル ( $t=1, \dots, T, T+1$ )、記号  $\equiv$  は確率分布が同一であることを意味し、 $f_t \in \mathbf{R}^k$  ( $2 \leq k \leq n$ ) は第  $t$  期首に観測可能な  $k$  個のファクターを表すベクトル、 $B (n \times k)$  はファクター感応度を表す未知パラメータで  $\text{rank}(B) = k$ 、 $\Sigma$  は超

過リターンの分散共分散行列を表す未知パラメータで  $n$  次正値定符号行列,  $e_1, \dots, e_T, e_{T+1} \stackrel{iid}{\sim} N_n(\mathbf{0}, I_n)$ ,  $z > 0$  は  $e_1, \dots, e_T, e_{T+1}$  と独立な確率変数で, 以下の密度関数を持つものとする.

$$u(z) = u_m(z) := \frac{\left(\frac{m}{2z}\right)^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{m}{2z}}}{z\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)},$$

ここで,  $m > 0$ . このとき,  $r_t$  は自由度  $m$  の多変量  $t$  分布に従う (Gupta et al. (2013) Theorem 4.7, Remark 4.4 and Example 4.3). この分布は, 前述の通り, 多変量正規分布より heavy-tailed であり, また, 上記の仮定において,  $r_1, \dots, r_T, r_{T+1}$  は互いに相関 0 だが, 独立ではなく, 実証分析結果に即したモデル設定となっている (e.g. Bodnar and Gupta (2009)).

今, 第  $T+1$  期首を現在時点とし, 第 1 期から第  $T$  期 ( $T > n+k+3$ ) までの観測データ

$$R := (r_1, \dots, r_T) (n \times T), \quad F := (f_1, \dots, f_T) (k \times T)$$

によってモデルのパラメータ推定を行い, その推定量を用いて  $T+1$  期首時点でポートフォリオを選択するものとする. ここで,  $\text{rank}(F) = k$ ,  $\text{rank}(R) = n$  とする. 尚,  $f_{T+1}$  は期首に観測される為, ポートフォリオ選択時に利用可能となる. リスク資産のポートフォリオ  $\hat{\pi} \in \mathbf{R}^n$  は, 所謂, 接点ポートフォリオにパラメータの推定量をプラグインした

$$\hat{\pi} := c\hat{\Sigma}^{-1}\hat{B}f_{T+1} \tag{2}$$

で与える. ここで,

$$\hat{B} := RF'(FF')^{-1}, \tag{3}$$

$$\hat{\Sigma} := \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - \hat{B}f_t)(r_t - \hat{B}f_t)' \tag{4}$$

とする. Gupta and Varga (1993) Theorem 9.1.1 より, (3), (4) はそれぞれ  $B$ ,  $\Sigma$  の最尤推定量である.  $c \neq 0$  はレバレッジ調整の為に任意に選択可能な実数値としている. リスク資産  $\hat{\pi}$  と安全資産のポートフォリオにより  $T+1$  期末に得られる超過リターン  $r_p$  は  $\hat{\pi}'r_{T+1}$  と表すことができ, この期待値と分散は, 鹿島 (2015) より, 以下の通りとなる.

$$E[r_p] = c \frac{T}{T-k-n-1} s_{T+1}^2, \tag{5}$$

$$V[r_p] = c^2 \left[ c_1 \left\{ n\tau + (1+\tau)s_{T+1}^2 \right\} + c_2 s_{T+1}^4 \left( 1 + \frac{2}{m} \right) \right], \tag{6}$$

ここで,

$$c_1 := \frac{T^2(T-k-1)}{(T-k-n)(T-k-n-1)(T-k-n-3)}, \quad c_2 := c_1 - \frac{T^2}{(T-k-n-1)^2},$$

$$s_{T+1}^2 := f_{T+1}' B' \Sigma^{-1} B f_{T+1}, \quad \tau := f_{T+1}' (FF')^{-1} f_{T+1}.$$

今,  $s_{T+1}$  と  $\tau$  は  $f_{T+1}$  の影響を大きく受けている為, この影響を観測期間で平準化するべく,

$$f_{T+1} f_{T+1}' = \frac{1}{T} FF'$$

を仮定する. このとき, 以下を得る.

$$\Theta_k = \Theta_k(s) := \frac{E[r_p]}{\sqrt{V[r_p]}} = \left[ d_k \left\{ \frac{nk}{T} s^{-4} + \left(1 + \frac{k}{T}\right) s^{-2} \right\} + (d_k - 1) \left(1 + \frac{2}{m}\right) \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (7)$$

ここで,

$$s^2 := \frac{1}{T} \text{tr}(F' B' \Sigma^{-1} B F), \quad d_k := \frac{(T-k-1)(T-k-n-1)}{(T-k-n)(T-k-n-3)} > 1.$$

$s$  が理論上の Sharpe ratio,  $\Theta$  が実際の Sharpe ratio であり, 常に  $\Theta < s$  であるが,  $T$  を大きくすることで推定リスクが抑制され  $\Theta$  は  $s$  に収束する. ファクターに関する情報はこの  $s$  に集約されているが, ここには線形モデルにおける定数項の効果も含まれる為, 実質的なファクターの効果が明らかでない. 次節でその点について考察する.

### 3. ファクターの効果

本節では, 前節の議論を受け, 実質的なファクターの効果に関する関係式を導出する. その為に先ず, 記号を定義する.  $F$  における  $k$  個 ( $2 \leq k \leq n$ ) のファクターの内, 第一項を定数項, 第二項から第  $k$  項の  $k-1$  個のファクターを  $G$  で表し, 実質的な情報を持った部分とする. 具体的には以下の通り.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \cdots & f_{2,T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{k,1} & f_{k,2} & \cdots & f_{k,T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_T \\ G \end{pmatrix} \quad (k \times T),$$

ここで,  $1_T \in \mathbf{R}^T$  は成分が全て 1 の列ベクトル,  $G$  は  $(k-1) \times T$  行列であり, 標準化された時系列データ, 即ち,  $G 1_T = O$  であるものとする. 尚,  $\text{rank}(G) = k-1$  とする. そして,  $s$  の推定量として  $B$  と  $\Sigma$  に最尤推定量をプラグインしたものを

$$\hat{s}^2 = \hat{s}^2(F) := \frac{1}{T} \text{tr}(F' \hat{B}' \hat{\Sigma}^{-1} \hat{B} F) \quad (8)$$

と書き、 $F$  の関数と捉える。更に、以下の記号を与える。

$$\bar{r} := \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_t, \quad (9)$$

$$\hat{\Sigma}_1 := \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})(r_t - \bar{r})', \quad (10)$$

$$\bar{R}_G := \frac{1}{\sqrt{T}} R G' (G G')^{-\frac{1}{2}}. \quad (11)$$

このとき、 $\hat{s}^2(F)$  に対し、以下が成立する。

**命題 1.**

$$\begin{aligned} \hat{s}^2(F) &= \hat{s}_1^2 + tr(S_G) + tr(S_G^2) + v'v \\ &\quad + tr\left\{ (I_{k-1} - S_G)^{-1} S_G (v v' + S_G^2) \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、

$$\hat{s}_1^2 := \hat{s}^2(1'_T), \quad S_G := \bar{R}'_G \hat{\Sigma}_1^{-1} \bar{R}_G, \quad v := \bar{R}'_G \hat{\Sigma}_1^{-1} \bar{r}. \quad (13)$$

**証明.** (3) 及び補助定理 1 より、以下を得る。

$$\hat{B} F F' \hat{B}' = R P_F R' = R (P_1 + P_G) R'. \quad (14)$$

従って、(8) より以下を得る。

$$\hat{s}^2 = tr\left( (T \hat{\Sigma})^{-1} \hat{B} F' F \hat{B}' \right) = tr\left\{ \hat{\Sigma}^{-1} \left( \frac{1}{T} R P_1 R' + \frac{1}{T} R P_G R' \right) \right\}. \quad (15)$$

故に、補助定理 2 より以下を得る。

$$\begin{aligned} \hat{s}^2 &= tr\left\{ \left( \hat{\Sigma}_1 - \bar{R}_G \bar{R}'_G \right)^{-1} \left( \bar{r} \bar{r}' + \hat{\Sigma}_1 - \hat{\Sigma} \right) \right\} \\ &= tr\left\{ \left( I_n - \hat{\Sigma}_1^{-1} \bar{R}_G \bar{R}'_G \right)^{-1} \left( \hat{\Sigma}_1^{-1} \bar{r} \bar{r}' + I_n - \hat{\Sigma}_1^{-1} \hat{\Sigma} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、

$$\left( I_n - \hat{\Sigma}_1^{-1} \bar{R}_G \bar{R}'_G \right)^{-1} = I_n + \left( \hat{\Sigma}_1 - \bar{R}_G \bar{R}'_G \right)^{-1} \bar{R}_G \bar{R}'_G, \quad (17)$$

及び、

$$\hat{\Sigma}_1^{-1} \bar{r} \bar{r}' + I_n - \hat{\Sigma}_1^{-1} \hat{\Sigma} = \hat{\Sigma}_1^{-1} (\bar{r} \bar{r}' + \bar{R}_G \bar{R}_G'), \quad (18)$$

であることから(16)より以下を得る.

$$\begin{aligned} \hat{s}^2 &= \bar{r}' \hat{\Sigma}_1^{-1} \bar{r} + tr \left( I_n - \hat{\Sigma}_1^{-1} \hat{\Sigma} \right) \\ &+ tr \left\{ \left( \hat{\Sigma}_1 - \bar{R}_G \bar{R}_G' \right)^{-1} \bar{R}_G \bar{R}_G' \hat{\Sigma}_1^{-1} (\bar{r} \bar{r}' + \bar{R}_G \bar{R}_G') \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

更にここで,

$$tr \left( I_n - \hat{\Sigma}_1^{-1} \hat{\Sigma} \right) = tr \left( S_G \right), \quad (20)$$

$$\left( \hat{\Sigma}_1 - \bar{R}_G \bar{R}_G' \right)^{-1} = \hat{\Sigma}_1^{-1} - \hat{\Sigma}_1^{-1} \bar{R}_G \left( -I_{k-1} + \bar{R}_G' \hat{\Sigma}_1^{-1} \bar{R}_G \right)^{-1} \bar{R}_G' \hat{\Sigma}_1^{-1}, \quad (21)$$

及び, 補助定理 3 より, (19)から以下を得る.

$$\begin{aligned} \hat{s}^2 &= \hat{s}_1^2 + tr \left( S_G \right) + tr \left\{ \hat{\Sigma}_1^{-1} \bar{R}_G \bar{R}_G' \hat{\Sigma}_1^{-1} (\bar{r} \bar{r}' + \bar{R}_G \bar{R}_G') \right\} \\ &+ tr \left\{ \hat{\Sigma}_1^{-1} \bar{R}_G \left( I_{k-1} - \bar{R}_G' \hat{\Sigma}_1^{-1} \bar{R}_G \right)^{-1} \bar{R}_G' \hat{\Sigma}_1^{-1} \bar{R}_G \bar{R}_G' \hat{\Sigma}_1^{-1} (\bar{r} \bar{r}' + \bar{R}_G \bar{R}_G') \right\}, \end{aligned} \quad (22)$$

ここで,

$$tr \left\{ \hat{\Sigma}_1^{-1} \bar{R}_G \bar{R}_G' \hat{\Sigma}_1^{-1} (\bar{r} \bar{r}' + \bar{R}_G \bar{R}_G') \right\} = v' v + tr \left( S_G^2 \right) \quad (23)$$

及び,

$$\begin{aligned} &tr \left\{ \hat{\Sigma}_1^{-1} \bar{R}_G \left( I_{k-1} - \bar{R}_G' \hat{\Sigma}_1^{-1} \bar{R}_G \right)^{-1} \bar{R}_G' \hat{\Sigma}_1^{-1} \bar{R}_G \bar{R}_G' \hat{\Sigma}_1^{-1} (\bar{r} \bar{r}' + \bar{R}_G \bar{R}_G') \right\} \\ &= tr \left\{ v' \left( I_{k-1} - S_G \right)^{-1} S_G v \right\} + tr \left\{ S_G \left( I_{k-1} - S_G \right)^{-1} S_G^2 \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

であることから, (22)より(12)を得る.  $\square$

命題1を利用し, ファクターの効果を検証したいが, その場合,  $S_G$  や  $v$  を具体的に与える必要があり, 一般性の高い検証が困難である. そこで, 以下の不等式を与える.

## 命題 2.

$$\hat{s}^2(F) \leq \hat{s}_1^2 + \hat{s}_G^2 \left( 1 + \hat{s}_1^2 + \hat{s}_G^2 \right) + \left\| \left( I_{k-1} - S_G \right)^{-1} \right\| \hat{s}_G^4 \left( \hat{s}_1^2 + \hat{s}_G^2 \right) \quad (25)$$

ここで,

$$\hat{s}_G^2 := tr(S_G) = \left\| S_G^{\frac{1}{2}} \right\|^2, \quad (26)$$

行列  $A$  のノルムは  $\|A\| := tr^{\frac{1}{2}}(A'A)$  で定義する (e.g. Harville (2008)).

**証明.** シュワルツの不等式より

$$\|S_G\| \leq \left\| S_G^{\frac{1}{2}} \right\|^2 = tr(S_G) = \hat{s}_G^2, \quad (27)$$

及び,

$$tr(S_G^2) = \|S_G\|^2 \leq \left\| S_G^{\frac{1}{2}} \right\|^4 = \hat{s}_G^4 \quad (28)$$

を得る. 今,

$$v'v = tr\left(\hat{\Sigma}_1^{-\frac{1}{2}} \bar{R}_G \bar{R}_G' \hat{\Sigma}_1^{-1} \bar{r} \bar{r}' \hat{\Sigma}_1^{-\frac{1}{2}}\right)$$

と書けるので, シュワルツの不等式と (28) 及び補助定理 3 から, 以下を得る.

$$v'v \leq \left\| \hat{\Sigma}_1^{-\frac{1}{2}} \bar{R}_G \bar{R}_G' \hat{\Sigma}_1^{-\frac{1}{2}} \right\| \left\| \hat{\Sigma}_1^{-\frac{1}{2}} \bar{r} \bar{r}' \hat{\Sigma}_1^{-\frac{1}{2}} \right\| = tr^{\frac{1}{2}}(S_G^2) tr^{\frac{1}{2}}\left((\bar{r}' \hat{\Sigma}_1^{-1} \bar{r})^2\right) \leq \hat{s}_G^2 \hat{s}_1^2. \quad (29)$$

他方, (27), (29) 及びシュワルツの不等式より,

$$\begin{aligned} tr\left\{(I_{k-1} - S_G)^{-1} S_G v v'\right\} &\leq \left\|(I_{k-1} - S_G)^{-1}\right\| \|S_G v v'\| \\ &\leq \left\|(I_{k-1} - S_G)^{-1}\right\| \hat{s}_G^4 \hat{s}_1^2 \end{aligned} \quad (30)$$

及び,

$$tr\left\{(I_{k-1} - S_G)^{-1} S_G^3\right\} \leq \left\|(I_{k-1} - S_G)^{-1}\right\| \|S_G^3\| \leq \left\|(I_{k-1} - S_G)^{-1}\right\| \hat{s}_G^6 \quad (31)$$

を得る. 以上(28)~(31), 及び命題 1 より,

$$\begin{aligned} \hat{s}^2(F) &\leq \hat{s}_1^2 + \hat{s}_G^2 + \hat{s}_G^4 + \hat{s}_G^2 \hat{s}_1^2 \\ &\quad + \left\|(I_{k-1} - S_G)^{-1}\right\| \hat{s}_G^4 \hat{s}_1^2 + \left\|(I_{k-1} - S_G)^{-1}\right\| \hat{s}_G^6 \end{aligned} \quad (32)$$

つまり, (25)が証明された.  $\square$

命題 2 は、シングルファクターモデル、即ち  $k=2$  の場合、極めてシンプルなものとなる。

**命題 3.**

$k=2$ ,  $\hat{s}_G^2 < 1$  のとき,

$$\hat{s}^2(F) \leq \hat{s}_u^2(\hat{s}_G, \hat{s}_1) := \hat{s}_1^2 + \frac{\hat{s}_G^2(1 + \hat{s}_1^2)}{1 - \hat{s}_G^2}. \quad (33)$$

**証明.**  $k=2$  のとき,  $\bar{R}_G \in \mathbf{R}^n$  である為,

$$S_G = \text{tr}(\bar{R}_G' \hat{\Sigma}_1^{-1} \bar{R}_G) = \hat{s}_G^2, \quad \|(I_{k-1} - S_G)^{-1}\| = \frac{1}{1 - \hat{s}_G^2}.$$

故に、命題 2 より、以下を得る。

$$\begin{aligned} \hat{s}^2(F) &\leq \hat{s}_1^2 + \hat{s}_G^2(1 + \hat{s}_1^2 + \hat{s}_G^2) + \frac{1}{1 - \hat{s}_G^2} \hat{s}_G^4(\hat{s}_1^2 + \hat{s}_G^2) \\ &= \hat{s}_1^2 + \frac{\hat{s}_G^2(1 + \hat{s}_1^2)}{1 - \hat{s}_G^2}. \end{aligned} \quad (34)$$

以上で本命題が証明された。□

本稿では、この  $\hat{s}_G$  をファクターの説明力と位置付ける。定義から明らかな通り、投資ユニバースのリスクに対するリターンの比率を計る尺度となっていることがその理由である。また、別の表現を使えば、この  $\hat{s}_G$  はファクターの Sharpe ratio と見ることもできる。

#### 4. 数値的検証

本節では、前節の結果を利用し、数値的にファクターの説明力とパフォーマンス改善率の関係を検証する。パフォーマンス改善率を以下で定義する。

$$\phi(\hat{s}_G) := \frac{\Theta_2(\hat{s}_u(\hat{s}_G, \hat{s}_1): n, T, m)}{\Theta_1(\hat{s}_1: n, T, m)} - 1, \quad (35)$$

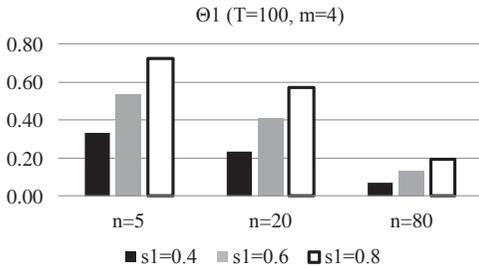
ここで、

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \Theta_1(\hat{s}_1: n, T, m) := \left[ d_1 \left\{ \frac{n}{T} \hat{s}_1^{-4} + \left(1 + \frac{1}{T}\right) \hat{s}_1^{-2} \right\} + (d_1 - 1) \left(1 + \frac{2}{m}\right) \right]^{-\frac{1}{2}}, \\ \Theta_2 &= \Theta_2(\hat{s}_u(\hat{s}_G, \hat{s}_1): n, T, m) := \left[ d_2 \left\{ \frac{2n}{T} \hat{s}_u^{-4} + \left(1 + \frac{2}{T}\right) \hat{s}_u^{-2} \right\} + (d_2 - 1) \left(1 + \frac{2}{m}\right) \right]^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

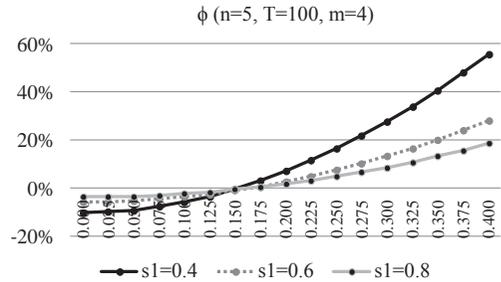
ここまでの議論から明らかなように、 $\phi$ は、ファクターの使用による Sharpe ratio の改善率の上限を意味している。 $\phi$ を $\hat{s}_G$ の関数として捉えることで、実際の Sharpe ratio を改善する為に、最低限どの程度の説明力がファクターに求められるかを確かめることができる。

Graph A1~4は、 $m=4$ 、即ち、超過リターンベクトル $r_t$ が自由度4の多変量t分布に従う場合に $T=100$ として検証した結果である。 $m=4$ としている理由は、Fergusson and Platen (2006) や Stuart and Ord (1994) などの実証分析結果に依っている。まず、Graph A1は $\Theta_1$ の数値レベルを表している。対応する $\hat{s}_1$ の値に応じ $\Theta_1$ はそれより常に低い値を示していることが分かる。 $\hat{s}_1$ に比べ $\Theta_1$ は、推定リスクの分、ディスカウントされている為である。そして、その傾向は、リスク資産数 $n$ が多いほど顕著であることも分かる。これらの $\Theta_1$ の値を基準に、ファクターの効果について検証した結果がGraph A2~4である。これら3つのグラフは何れも縦軸が改善率 $\phi$ 、横軸がファクター説明力 $\hat{s}_G$ である。

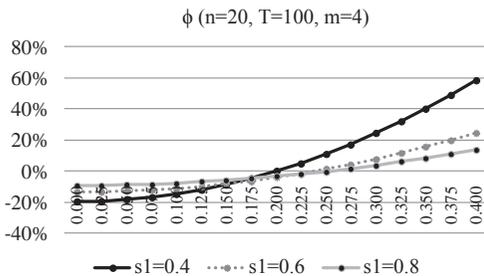
Graph A1



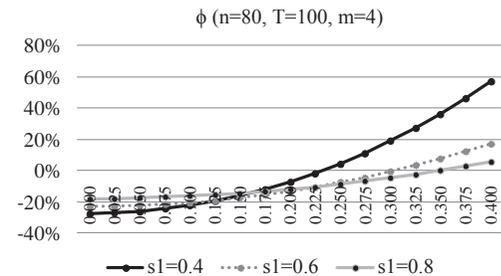
Graph A2



Graph A3



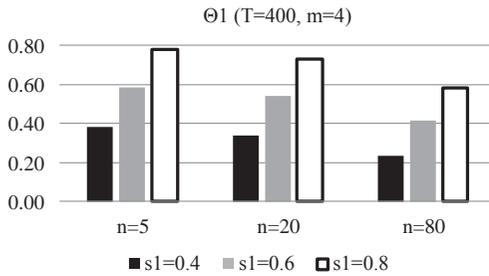
Graph A4



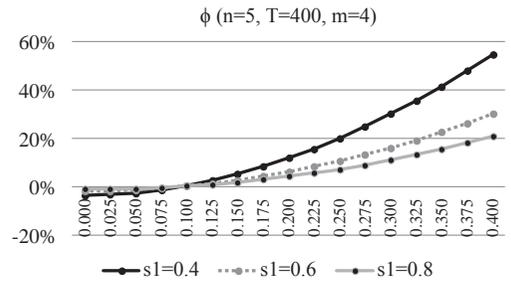
これらの結果から次のことが確認できる。小さな $\hat{s}_G$ では $\phi$ は正にできず、その傾向は、 $n$ 、 $\hat{s}_1$ が大きいほど顕著である。資産数が多く推定リスクが大きくなる状況下では、ある程度十分な説明力を持ったファクターを使わなければ、実際のパフォーマンスを改善するに及ばず、むしろ逆効果であることを示唆している。また、マーケットの状況が良い場合には、 $\hat{s}_G$ も相対的に高いものでなければ、パフォーマンスの改善に繋がらないことも分かる。例えば、Graph A4の $\hat{s}_1=0.8$ のケースで言えば、 $\phi(0.350) < 0$ であり、パフォーマンスを改善するには、少なくとも $\hat{s}_G > 0.35$ の説明力が必要であることが分かる。

上記と同様の検証を  $T = 400$  の場合に行った結果が、Graph B1~4 である。

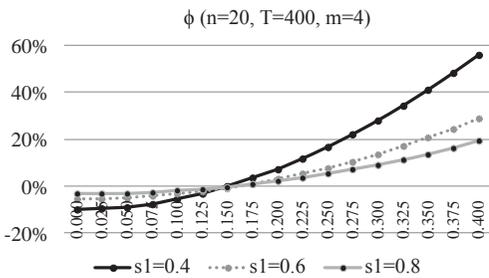
Graph B1



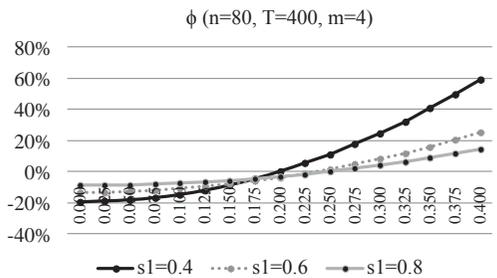
Graph B2



Graph B3



Graph B4



全体として、 $T = 100$  の場合と同様の傾向が見られるが、 $T = 400$  の場合は、 $\phi$  を正值にする為に要求される  $\hat{s}_G$  のレベルが、 $T = 100$  の場合ほど高くない。データ数が多い分、推定リスクが抑制された為であろう。しかしながら、 $T = 400$  程度の十分なデータ数を想定した場合であっても、パフォーマンス改善には一定水準以上の説明力が求められることが確認できる。例えば、Graph B4 の  $\hat{s}_1 = 0.8$  のケースで言えば、 $\phi(0.250) < 0$  であり、パフォーマンスを改善するには、少なくとも  $\hat{s}_G > 0.25$  の説明力が必要であることが分かる。

## 5. 結論

本稿では、金融リスク資産の超過リターンベクトルに多変量 t 分布を仮定し、線形モデルを利用したポートフォリオ選択において、ファクターの説明力  $\hat{s}_G$  とパフォーマンス改善率  $\phi$  の関係について調査した。その結果、それぞれの状況に応じ、一定水準以上の説明力を持つファクターを使用しなければ、パフォーマンスの改善は望めないことが確認できた。具体的には、 $\hat{s}_G = 0.35$  の説明力でもパフォーマンスを改善するに至らないケースも確認できた。 $\hat{s}_G$  の数値レベルについては、一概に高低を議論することは難しい。ただ、 $\hat{s}_G$  はその構造上、ファクターの Sharpe ratio と見ることもできるため、例えば、Lo (2002) の実証分析結果と比較した場合、1つのファクターによって生み出される Sharpe ratio が 0.35 を上回ることは、それほど容易なレベルでないこともできる。

運用パフォーマンスの向上に有効なファクターを選別するには、ファクターとリスク資産リターン

の相関を投資ユニバースで統合した  $\hat{s}_G$  のような尺度を用いる必要があるが、ファクターの説明力だけでパフォーマンスの改善を語ることはできず、モデルの推定リスクも加味した慎重な判断が求められる。

## 6. 補足

命題の証明に必要な補助定理を以下で与える。

### 補助定理 1.

$P_F$ ,  $P_G$ ,  $P_1$  をそれぞれ,

$$P_F := F'(FF')^{-1}F, \quad P_G := G'(GG')^{-1}G, \quad P_1 := 1_T(1_T'1_T)^{-1}1_T' = \frac{1}{T}1_T1_T'$$

とするとき、以下が成立する。

$$P_F = P_1 + P_G \tag{36}$$

証明. 今,  $G1_T = O$  としているので

$$FF' = \begin{pmatrix} T & O \\ O & GG' \end{pmatrix},$$

従って,

$$P_F = \frac{1}{T}1_T1_T' + G'(GG')^{-1}G,$$

即ち、補助定理を得る。□

### 補助定理 2.

$$\hat{\Sigma} = \hat{\Sigma}_1 - \bar{R}_G \bar{R}'_G \tag{37}$$

証明. 補助定理 1,  $T\hat{\Sigma}_1 = RR' - RP_1R$ ,  $T\hat{\Sigma} = RR' - RP_FR'$ , 及び(11)より明白。□

### 補助定理 3.

$\hat{s}_1^2 := \hat{s}^2(1_T')$  とするとき,

$$\hat{s}_1^2 = \bar{r}'\hat{\Sigma}_1^{-1}\bar{r}. \tag{38}$$

証明.  $F = 1_T'$  のとき,  $\hat{B} = \bar{r}$ ,  $\hat{\Sigma} = \hat{\Sigma}_1$ . よって(8)より明白。□

## 参考文献

- Bodnar, T. and Gupta, A. K. (2009), "Construction and Inferences of the efficient frontier in elliptical models," *Journal of The Japan Statistical Society*, **39**, 193-207.
- Chen, Roll and Ross (1986). "Economic force and the stock market," *Journal of Business*, **59**, 383-403.
- Connor, G. (1984), "A Unified Beta Pricing Theory," *Journal of Economic Theory*, **34**, 13-31.
- Fama, E., and French, K. (1993), "Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds," *Journal of Financial Economics*, **33**, 3-56.
- Fergusson, K. and Platen, E. (2006), "On the Distributional Characterization of Daily Log-returns of a World Stock Index," *Applied Mathematical Finance*, **13**, 19-38.
- Gupta, A. K. and Varga, T. (1993), *Elliptically Contoured Models in Statistics*, Springer.
- Gupta, A. K. and Nagar, D. K. (2000), *Matrix Variate Distributions*, Chapman & Hall.
- Gupta, A. K., Varga, T. and Bodnar, T. (2013), *Elliptically Contoured Models in Statistics and Portfolio Theory*, Springer.
- Harville, D. A. (2008), *Matrix Algebra from a Statistician's Perspective*, Springer Science + Business Media.
- Huberman, G. (1982), "A Simple Approach to Arbitrage Pricing," *Journal of Economic Theory*, **28**, 183-191.
- Ignatieva, K. and Platen, E. (2010), "Modelling Co-movements and Tail Dependency in the International Stock Market via Copulae," *Asia-Pacific Finan Markets*, **17**, 261-302.
- Jiang, J., Liu, X. and Yu, K. (2013), "Maximum likelihood estimation of multinomial probit factor analysis models for multivariate t-distribution," *Computational Statistics*, **28**, 1485-1500.
- Kashima, H. (2011), "A study on evaluation of linear models for portfolio selection by the risk-return trade-off," *RIMS Kokyuroku*, Kyoto University, **1758**, 169-183.
- 鹿島 浩之 (2015), "Heavy-tailed 分布に従う金融資産リターンのモデル評価," 青山経営論集第 50 巻第 1 号, 26-37.
- Konishi, S. and Kitagawa, G (2007), *Information Criteria and Statistical Modeling*, Springer Series in Statistics.
- Lo, A. W. (2002), "The Statistics of Sharpe Ratios," *Financial Analysts Journal*, **58**, 36-52.
- Nadarajah, S. and Kotz, S. (2008), "Estimation Methods for the Multivariate t Distribution," *Acta Applicandae Mathematicae*, **102**, 99-118.
- Rachev, S. T., Menn, C. and Fabozzi, F. J. (2005), *Fat-tailed and Skewed Asset Return Distributions*, Wiley.
- Ross, S. (1976). "The arbitrage theory of capital asset pricing," *Journal of Economic Theory*, **13**, 341-60.
- Schwarz, G. (1978), "Estimating the dimension of a model," *Annals of Statistics*, **6**, 461-464.
- Stuart, A. and Ord, J. K. (1994), *Distribution Theory*, 6<sup>th</sup> ed, London: Edward Arnold.

## 謝辞

本研究は、2017年度青山学院大学経営学会からの研究助成を受け実施した研究の成果である。ここに感謝の意を表したい。