

投資家の行動が不確実性に与える影響に関する理論 及び実証研究

Theoretical and Empirical Research on the Impact of Investor Behavior
on Uncertainty

<プロジェクト・メンバー>

伏屋 広隆^{†1} 中里 宗敬^{†2} 北村 智樹^{†3}

Fushiya Hirotaka^{†1} Nakasato Munenori^{†2} Kitamura Tomoki^{†3}

^{†1} 青山学院大学社会情報学部教授

^{†1} School of Social Informatics Aoyama Gakuin University

^{†2} 青山学院大学国際マネジメント研究科教授

^{†2} Graduate School of International Management Aoyama Gakuin University

^{†3} 武蔵大学経済学部教授

^{†3} Faculty of Economics Musashi University

キーワード：情報ミラージュ，ミスプライシング，逐次取引モデル

Keywords: Information Mirage, Mispricing, Sequential Trading Model

1. はじめに

本稿は、社会情報学研究センターのプロジェクトである「投資家の行動が不確実性に与える影響に関する理論及び実証研究」の1つの研究成果である「Belief Updates and Asset Mispricing」について、その理論部分の成果の一部を報告するものである。

本研究プロジェクトにおいては、情報の非対称性が有るもしくは有り得る市場において、投資家の行動が引き起こす影響について研究をしている。特に「Belief Updates and Asset Mispricing」では、Information Mirage をテーマとし、逐次取引モデルにおける投資家の予想 (belief) の2段階更新モデルによって証券価格が一時的に合理的な価格より上振れするバブルの発生およびその収束を説明している。

2. モデル

2-1. モデルの概要

市場には1つの危険資産が存在し、真の資産価値 θ は0または1の値をとるものとし、その確率は $P(\theta = 1) = P(\theta = 0) = \frac{1}{2}$ とする。このとき、危険資産の価格は $[0, 1]$ に含まれる。

市場には1人のマーケットメーカーが存在し、常に買い指値 (Bid) と売り指値 (Ask) を市場に提示している。市場には他に情報投資家とノイズ投資家の2種類の投資家がいるとする。そして、情報投資家は私的情報を持ち、真の資産価値 θ を知っている。

各時点で、1人の投資家がマーケットメーカーに対して1単位の資産の買いあるいは売りを行う。もし、投資家が情報投資家で $\theta = 0$ であった場合、彼は

かなる正の価格に対しても売りを行う。逆に、 $\theta = 1$ 場合には、彼は 1 未満のいかなる価格に対しても買いを行う。もし、投資家がノイズ投資家であった場合、彼は確率的に売買行動を行い、 $\frac{1}{2}$ の確率で買い、 $\frac{1}{2}$ の確率で売りを行う。例えば、 $\theta = 1$ のときの売り買いの発生確率は次の図 1 のようになる。

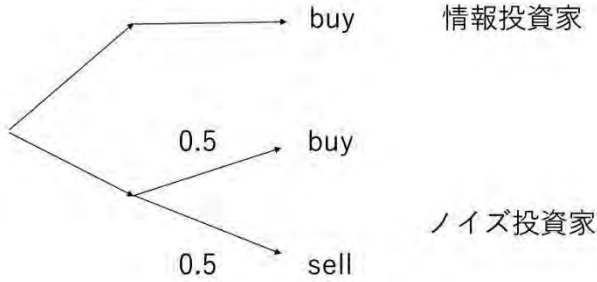


図 1 $\theta = 1$ のときの売り買いの発生確率

マーケットメーカーは、対峙する投資家が情報投資家であるのか、あるいはノイズ投資家であるのかを知らないものとする。

市場の情報構造として、Informed Market と Uninformed Market の 2 つのタイプを考える。Informed Market は情報投資家が少なくとも 1 人は存在する市場である。このときの投資家が情報投資家である割合を定数 ϕ とし、マーケットメーカーは ϕ の値を知っているものとする。Uninformed Market は情報投資家が全く存在しない市場である。また、定数 ξ_0 を市場が Informed Market である確率とする。また、

2-2. 基本設定

時点 k で買いが入ったときは $\omega = B$ とし、売りが入ったときは $\omega = S$ とする。時点 n までの売買履歴 $h_n = \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n$ に対して、市場が Informed Market である確率 $P(M = I \parallel h_n)$ をマーケットメーカーが予想するかが本稿の研究対象の主である。

2-3. ベイズの定理による計算

このモデルでは、市場の状態は Informed Market で真の資産価値が 1 である $M = I$, $\theta = 1$ 、同じく

Informed Market で真の資産価値が 0 である $M = I$, $\theta = 0$ 、Uninformed Market である $M = U$ の 3 通りであり、各状態で買いが入る確率は順に、 $\frac{1+\phi}{2}$, $\frac{1-\phi}{2}$, $\frac{1}{2}$ である。よって、売買履歴 $h_n = \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n$ 中の B の個数を $B_n = B_n(\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n)$, S の個数を $S_n = S_n(\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n)$ とすると、ベイズの定理より、市場が Informed Market である確率は、

$$P(M = I \parallel h_n) = \frac{(1+\phi)^{B_n} (1-\phi)^{S_n} \xi_0 + (1-\phi)^{B_n} (1+\phi)^{S_n} \xi_0}{(1+\phi)^{B_n} (1-\phi)^{S_n} \xi_0 + (1-\phi)^{B_n} (1+\phi)^{S_n} \xi_0 + (1-\xi_0)}$$

と計算することができる。

2-4. 二段階推定

市場が Informed Market である確率はベイズの定理によって計算できるものの、マーケットメーカーが厳密な計算抜きで直感的にこの確率を得るのは困難である。本研究ではその困難さの主因が市場の 3 つの状態の比較にあると考え、マーケットメーカーの直感に近いであろう、まずは 2 つの状態の比較から始める確率の二段階推定を考える。

1 段階目で 3 つの状態である $M = I$, $\theta = 1$ と $M = I$, $\theta = 0$ と $M = U$ のうち 2 つを選んで比較するとき、その組み合わせの可能性は 3 通りある。本研究では、どのような売買履歴においても最も尤度に差があって、確率の収束が速い $M = I$, $\theta = 1$ と $M = I$, $\theta = 0$ の比較を第 1 段階目とする。具体的には情報投資家が存在する市場において、売買履歴 h_n が得られたときの $\theta = 1$ の条件付確率である $P(\theta = 1 \mid M = I, h_n)$ のベイズ推定が第 1 段階目となる。これに対するマーケットメーカーの belief を $\mu_n = \mu_n(h_n)$ とする。

2 段階目では、1 段階目で得られた μ_n を使って、 $M = I$ と $M = U$ の比較をする。具体的には売買履歴 h_n が得られたときの $M = I$ の条件付確率である $P(M = I \mid h_n)$ のベイズ推定が第 2 段階目となる。これに対するマーケットメーカーの belief を $\xi_n = \xi_n(h_n)$ とする。

例えば、 $\phi = 0.5$ である場合を考える。このとき、買いが入る確率は $M = I$, $\theta = 1$ のときに 0.75, $M = I$, $\theta = 0$ のときに 0.25, $M = U$ のときは 0.5 である。売買履歴からこの 3 つの状態のどれかを予想

するのがマーケットメーカーの問題である。ここで5回分の売買履歴がBSBBBであったときに、マーケットメーカーは直感的に $M=I$ である確率をどう考えるであろうか？ $M=I, \theta=1$ と $M=I, \theta=0$ と $M=U$ の3つの状態の比較は困難であるから、まずは2つの状態の比較を行う。 $M=I, \theta=1$ と $M=I, \theta=0$ の比較が、買いが入る確率が0.75、0.25と最も差があり比較がしやすい。これが第1段階目となる。この例では売買履歴が買いに偏っているため、マーケットメーカーは直感的に買いが入る確率が低い $\theta=0$ の確率はほぼないと考えるであろう。第1段階で $M=I, \theta=0$ の可能性がほぼないと判断すると、第2段階では $M=I, \theta=1$ と $M=U$ の比較、すなわち、買いが入る確率が0.75と0.5の市場の比較が主となる。

2-5. 更新式

まず、 $\{P(\theta=1|M=I, h_n)\}$ に対するマーケットメーカーの belief である $\{\mu_n\}$ の更新式を考える。 $\omega_{n+1}=B$ のとき、 $P(\theta=1|M=I, h_{n+1})$ と $P(\theta=1|M=I, h_n)$ の関係式はベイズの定理より、

$$\begin{aligned} P(\theta=1|M=I, h_{n+1}) &= P(\theta=1|M=I, \omega_{n+1}=B, h_n) \\ &= \frac{P(\omega_{n+1}=B|\theta=1)P(\theta=1|M=I, h_n)}{P(\omega_{n+1}=B|\theta=1)P(\theta=1|M=I, h_n)+P(\omega_{n+1}=B|\theta=0)P(\theta=0|M=I, h_n)} \\ &= \frac{(1+\phi)P(\theta=1|M=I, h_n)}{1-\phi+2\phi P(\theta=1|M=I, h_n)} \end{aligned}$$

であるから、 $\{P(\theta=1|M=I, h_n)\}$ に対するマーケットメーカーの belief である $\{\mu_n\}$ も、

$$\mu_{n+1}(h_{n+1}) = \frac{(1+\phi)\mu_n(h_n)}{1-\phi+2\phi\mu_n(h_n)}$$

と更新されるものとする。 $\omega_{n+1}=S$ のときも同様に考えることにより、 $\{\mu_n\}$ の更新式は

$$\mu_{n+1} = \mu_{n+1}(h_{n+1}) = \begin{cases} \frac{(1+\phi)\mu_n}{1-\phi+2\phi\mu_n} & \omega_{n+1}=B \\ \frac{(1-\phi)\mu_n}{1+\phi+2\phi\mu_n} & \omega_{n+1}=S \end{cases}$$

であるとする。

次に $\{P(M=I|h_n)\}$ に対するマーケットメーカーの belief である $\{\xi_n\}$ の更新式を考える。ベイズの定理より、 $\omega_{n+1}=B$ のとき、 $P(M=I|h_{n+1})$ と $P(M=I|h_n)$ の関係式はベイズの定理より、

$$\begin{aligned} P(M=I|h_{n+1}) &= P(M=I|\omega_{n+1}=B, h_n) \\ &= \frac{P(\omega_{n+1}=B, M=I|h_n)}{P(\omega_{n+1}=B, M=I|h_n)+P(\omega_{n+1}=B, M=U|h_n)} \end{aligned}$$

ここでもし、 $P(\theta=1|M=I, h_n)$ の真の値 μ が既知であった場合、 $P(\omega_{n+1}=B|M=I, \theta=1) = \frac{1+\phi}{2}$ 、 $P(\omega_{n+1}=B|M=I, \theta=0) = \frac{1-\phi}{2}$ より、 $P(\omega_{n+1}=B|M=I) = \frac{1}{2} + (\mu - \frac{1}{2})\phi$, for all n and h_n であるから、

$$P(\omega_{n+1}=B, M=I|h_n) = \{\frac{1}{2} + (\mu - \frac{1}{2})\phi\}P(M=I|h_n)$$

これが分子および分母第1項の値となる。また、分母第2項は、

$$P(\omega_{n+1}=B, M=U|h_n) = \frac{1}{2}(1 - P(M=I|h_n))$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} P(M=I|h_{n+1}) &= P(M=I|\omega_{n+1}=B, h_n) \\ &= \frac{\{\frac{1}{2} + (\mu - \frac{1}{2})\phi\}P(M=I|h_n)}{\{\frac{1}{2} + (\mu - \frac{1}{2})\phi\}P(M=I|h_n) + \frac{1}{2}(1 - P(M=I|h_n))} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \phi(\mu - \frac{1}{2})}{\frac{1}{2} + \phi(\mu - \frac{1}{2})P(M=I|h_n)} \cdot P(M=I|h_n) \end{aligned}$$

実際にはこの μ をマーケットメーカーは知らないで、 μ の代わりに、 $n+1$ 時点のマーケットメーカーの μ に対する belief であるを用いて、 $\{P(M=I|h_n)\}$ に対するマーケットメーカーの belief である $\{\xi_n\}$ の更新を行うとすると、

$$\xi_{n+1}(h_{n+1}) = \frac{\frac{1}{2} + \phi(\mu - \frac{1}{2})}{\frac{1}{2} + \phi(\mu - \frac{1}{2})\xi_n} \cdot \xi_n$$

同様に、 $\omega_{n+1}=S$ のときも同様に考えることにより $\{\xi_n\}$ の更新式は以下ようになる。

$$\xi_{n+1} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{2} + \phi(\mu - \frac{1}{2})}{\frac{1}{2} + \phi(\mu - \frac{1}{2})\xi_n} \cdot \xi_n & \omega_{n+1}=B \\ \frac{\frac{1}{2} - \phi(\mu - \frac{1}{2})}{\frac{1}{2} - \phi(\mu - \frac{1}{2})\xi_n} \cdot \xi_n & \omega_{n+1}=S \end{cases}$$

3. シミュレーション結果

次の図2は市場がUninformed Market ($M=U$)であるときに、 $\phi=0.1$ のもとで売買履歴を乱数で発生させることを2000回繰り返したシミュレーション結果の一例である。 $\{\mu_n\}$ の推移を紫、 $\{\xi_n\}$ の推移を緑、売買履歴における買い(B)と売り(S)の回数の差を青の線で表している。なお、赤の線はこの証券の価格に対するマーケットメーカーの belief を表している。青のみ縦軸の値が右にあり、残りは左にある。

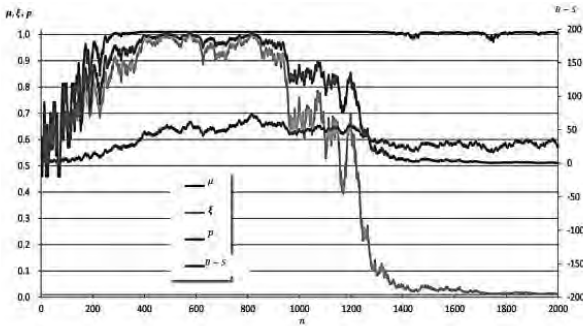


図2 $\{\mu_n\}$, $\{\xi_n\}$ などの値の推移

シミュレーションしている市場が $M = U$ で情報投資家あるから、売買履歴において B と S の発生確率はそれぞれ 0.5 で等しいのであるが、当然シミュレーションにおいては偏りが生じる。図2の場合は B にやや偏っており、青のグラフは終始 0 より大きい値を取っている。

情報投資家がいる市場であるという $M = I$ のもとでは、 $\theta = 1$ のときに B が出やすく、 $\theta = 0$ のときには S が出やすいので、B にやや偏っている売買履歴であるこのシミュレーションにおいては、 $M = I$ のもとでの $\theta = 1$ の belief である $\{\mu_n\}$ は 1 に収束している。また、2.4 で議論したように最も尤度に差がある $M = I$, $\theta = 1$ と $M = I$, $\theta = 0$ の比較である $\{\mu_n\}$ の収束スピードは速く、今回は $n=200$ 強で収束していることがわかる。

$\{\mu_n\}$ が 1 に収束したことは、マーケットメーカーは $M = I$, $\theta = 1$ と $M = I$, $\theta = 0$ の比較において、 $M = I$, $\theta = 0$ の可能性を棄却したことになる。これが第 1 段階である。第 2 段階では残った $M = I$, $\theta = 1$ と $M = U$ の比較が $\{\xi_n\}$ によって行われる。これの収束は $\{\mu_n\}$ よりずっと遅く、 $n=1800$ 程度である。

第 2 段階で $\{\xi_n\}$ は 0 に収束している。 $\{\xi_n\}$ は $\{P(M = I | h_n)\}$ に対するマーケットメーカーの belief であるから、これが 0 に収束しているということは、マーケットメーカーの第 2 段階の比較として $M = U$ が選択されたこと、すなわち、市場に対する belief が真の値に収束したことを表す。それと同時に証券の価格 $\xi_n \mu_n + \frac{1}{2}(1 - \xi_n)$ は市場が $M = U$ のときのあるべき値である 0.5 に収束している。

このシミュレーションで興味深い点は、確かに最終的にはマーケットメーカーの市場に対する belief が

真の値に収束しているものの、第 2 段階の $\{\xi_n\}$ についてはその過程においてかなり間違った方向に動いており、実際には存在しない情報投資家が存在する確率を 0.95 まで高く見積もっていることで、すなわち Information Mirage が起こっていることである。これは、決して特殊なシミュレーション結果ではなく、平均的に起こることが主結果で理論的に示される。

4. 主結果および結論

このプロジェクトは「Belief Updates and Asset Mispricing」において、マーケットメーカーの belief である $\{\mu_n\}$ と $\{\xi_n\}$ について、以下を理論的に証明した。

命題 1 $\{\mu_n\}$ の値は $n \rightarrow \infty$ において、Informed Market の場合は、 $\theta = 1$ のときは 1 に、 $\theta = 0$ のときは 0 に確率 1 で収束する。Uninformed Market の場合は 1 または 0 に収束する確率はそれぞれ 0.5 である。

この命題は、市場が Informed Market の場合に、 $\{\mu_n\}$ が真の値を示す値に確率 1 で収束することを保証している。Uninformed Market の場合は、 $\{\mu_n\}$ は市場が Informed Market であることを前提とした条件付確率なので、その収束値に意味はないが、売買履歴が市場の情報を含んでいないので、1 または 0 に収束することになる。

命題 2 $\{\xi_n\}$ の値は $n \rightarrow \infty$ において、市場が Informed Market の場合、Uninformed Market の場合のいずれの場合においても $\{\xi_n\}$ が真の値を示す値に確率 1 で収束することを保証している。

この命題は、命題 1 と合わせて、本研究で考えているマーケットメーカーの belief が最終的には正しい結果に落ち着くことを保証している。それにも関わらず次の定理が成立する。

定理 3 市場が Uninformed Market のとき、 $E[\xi_n]$

は極大値をもつ。すなわち、 $0 < n < \infty$ で最大値をとる。

この定理は本研究で考えているマーケットメーカーの belief が途中過程において、実際には情報投資家がない市場においても情報投資家の存在を過大に評価することが、平均的に起きることを意味している。すなわち、Information Mirage が平均的に起こることを意味している。そしてそれは、Asset Mispricing が平均的に起こることを意味している。

5. 今年度の主たる学会発表

本プロジェクトにおける「Belief Updates and Asset Mispricing」については2025年1月3日～5日に行われたアメリカ経済学会において発表を行っている。

参考文献

- [1] Allen, Franklin, Stephen Morris, and Andrew Postlewaite, "Finite Bubbles with Short Sale Constraints and Asymmetric Information," *Journal of Economic Theory*, Vol. 61, No.4, pp. 206-229, 1993.
- [2] Avery, Christopher and Peter Zemsky, "Multidimensional Uncertainty and Herd Behavior in Financial Market," *The American Economic Review*, Vol. 88, No. 4, pp. 724-748, 1998.
- [2] Bikhchandani, Sushil, David Hirshleifer, and Ivo Welch, "A Theory of Fads, Fashion, Custom, and Cultural Change as Informational Cascades," *Journal of Political Economy*, Vol. 100, No. 5, pp. 992-1026, 1992.
- [2] Bikhchandani, Sushil, David Hirshleifer, and Ivo Welch, "Learning from the Behavior of Others: Conformity, Fads, and Informational Cascades," *Journal of Economic Perspectives*, Vol. 12, No. 3, pp. 151-170, 1998.
- [2] Blanchard, Olivier J., and Mark W. Watson, "Bubbles, Rational Expectations, and Financial Markets," *Crisis in the Economic and Financial Structure*, Paul Wachtel (Eds), pp. 295-316, 1982.
- [2] Camerer, Colin and Keith Weigelt, "Information Mirages in Experimental Asset Markets," *Journal of Business*, Vol. 64, No. 4, pp. 463-493, 1991.
- [7] Glosten, Lawrence and Paul Milgrom, "Bid, Ask, and Transaction Prices in a Specialist Market with Heterogeneously Informed Traders," *Journal of Financial Economics*, Vol. 14, No. 1, pp. 71-100, 1985.
- [8] Haruvy, Ernan, Yaron Lahav, and Charles N. Noussair, "Traders' Expectations in Asset Markets: Experimental Evidence," *American Economic Review*, Vol. 97, pp. 1901-1920, 2007.
- [9] Haruvy, Ernan, and Charles N. Noussair, "The Effect of Short Selling on Bubbles and Crashes in Experimental Spot Asset Markets," *The Journal of Finance*, Vol. 61, pp. 1119-1157, No. 3, 2006.
- [10] Hirota, Shinichi, and Shyam Sunder, "Price Bubbles Sans Dividend Anchors: Evidence from Laboratory Stock Markets," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 31, pp. 1875-1909, 2007
- [11] O'Brien, John and Sanjay Srivastava, "Dynamic stock market with multiple assets: An experimental analysis," *Journal of Finance*, Vol. 46, pp. 1811-1831, 1991.
- [12] Plott, Charles R., "Markets as Information Gathering Tools," *Southern Economic Journal*, Vol. 67, pp. 1-15, 2000.