

Fundamental Marxian Theorem の異種労働が存在する場合の数理的証明とその再検討

——「社会経済学的労働経済論」確立の試み（1）——

白 井 邦 彦

本稿の執筆にあたり、宇仁宏幸先生（追手門学院大学教授・京都大学名誉教授）、大西広先生（京都大学・慶応義塾大学名誉教授）、松尾匡先生（立命館大学教授）、橋本貴彦先生（立命館大学教授）から、さまざまなコメント、アドバイス、ご教示を受けた。深く感謝申し上げるとともに、本稿で多々存在すると思われる不十分な点・間違いはすべて筆者の責任であることも強調しておく。

1、はじめに

本稿は「様々な種類の労働（異種労働とも称する）の存在を考慮した場合でも『Fundamental Marxian Theorem（マルクスの基本定理、以下「マルクスの基本定理」とする）』は数理的に証明されるか」という点を最も大きな主題として、その数理的証明について、筆者の試案を含めて再検討するものである。

経済社会にはさまざまな種類の労働が存在しているのは周知のことであり、特に社会経済学的労働経済論の確立という観点からは、「異種労働の存在」は視野から外すことは決してできない。それが本稿を執筆した大きな動機であり、それゆえ本稿も白井（2024）と同様、「社会経済学的労働経済論の確立」を目指す試みのひとつでもある。

異種労働の存在を考慮した場合の「マルクスの基本定理」の数理的証明は、これまで基本的に以下のような方法でなされてきた。

- ①「(すべての種類の) 労働は、もはや、互いに区別がなくなり、すべてことごとく同じ人間の労働、すなわち抽象的人間労働に還元され」る (Marx (1867) p52) のであり、その「抽象的人間労働の直接間接の投入単位数が、それぞれの財の価値の大きさを決定する」わけであるから、「全ての種類の労働」について「それぞれの種類の労働の支出1単位は、抽象的人間労働の支出何単位分に相当するか」という換算ができることになる。
- ②それをふまえ、全ての種類の労働についてその労働の支出1単位は抽象的人間労働の支出単位分に相当するか、に換算する数理処理を行う¹⁾。
- ③その数理処理は、換算率算出数式を設定し、その数式と価値方程式とで示される各方程式から成る連立方程式を解き、各種類の労働の換算率の数値を算出する、という形で行われる。
- ④各種労働の換算率の数値が算出されれば、「様々な種類の労働の支出単位数」は全て「抽象的人間労働の支出何単位分に当たるか」として、つまり「抽象的人間労働の支出単位数」という同一の基準によって示されることになるから、それをふまえ数理的証明をおこなっていく。

この方法においては当然ながら、「では換算率の数値はどのように算出されるか」という「換算率算出数式をどのように設定するか」がひとつの大きなポイントとなる。

そこで本稿では、換算率算出数式について森嶋 (1974) pp226~227、置塩 (1977) pp180~181、置塩 (1978) pp22~24 等で提示された換算率算出数式を筆者なりの理解に基づき、若干の加工修正をおこなったうえで出来る限り筆者なりの言葉で紹介するとともに、田中 (2015) に基づきそれを展開させた筆者の換算率算出数式の試案を提示することにする。

そしてそれらに加えて「異種労働の存在を考慮した場合の『マルクスの基本定理』の数理的証明」について、中谷 (1994) 第3章第2節4でなされている数

1) 池尾 (1978) ではそうした換算を行わない数理的証明が紹介されている。詳細については池尾 (1978) 参照。

理的証明の紹介を筆者なりの理解に基づきできる限り筆者なりの言葉で行うとともに、森嶋（1974）5章、置塩（1977）p132、での数理的証明を基礎に、それらを異種労働が存在する場合に応用した場合の筆者の試案、を示すことにする。

そして以上をふまえ、「各換算率算出数式」、および「マルクスの基本定理」の中心をなす「剰余労働の存在に関する数理的証明の結果」について再検討していく。

本稿はこうした内容をもつものである。

なお森嶋（1974）5章、置塩（1977）p132、での数理的証明は「労働の種類は1種類」としたもので、本稿における2(2)、4(2)での数理的証明の式展開は、「森嶋（1974）5章、置塩（1977）p132での数理的証明を、異種労働が存在する場合に応用すればこのような式展開になるのではないか」との筆者の考えに基づく筆者の試案である。それゆえその部分における誤り等は、すべて筆者の責任であることを、本論に先立って最初に強調しておく。

2、「森嶋（1974）における換算率算出数式」の筆者の理解に基づく紹介と

森嶋（1974）に基づく数理的証明の筆者の試案

(1)「森嶋（1974）における換算率算出数式」の筆者の理解に基づく紹介

まず森嶋（1974）pp226～227で示されている換算率算出数式とそれに基づく換算率の算出について、筆者なりの理解に基づき紹介しよう²⁾。

生産される財の数は n 種類、労働の種類数は「1+1」種類、そして「1+1番目の労働」を「標準的労働、すなわち不熟練かつ単純労働、あるいは抽象的人間労働」（森嶋（1974）p226）とする。そのうえで次のように置く。

2) 2(1)での記述は森嶋（1974）pp226～227で展開されている換算率算出数式と換算率算出について、筆者なりの理解に基づき出来る限り筆者なりの言葉を用いて紹介したものである。森嶋（1974）pp226～227で示されている内容については正確に理解し紹介しているつもりであるが、本稿での記述に間違いがあればそれは全ての筆者の理解不足・責任である。

$$\mathbf{t} \text{ (価値ベクトル)} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} > 0$$

ベクトル $\mathbf{t}$ は t_i (第 i 財 1 単位の価値) を要素とする n 次元の縦ベクトル。

$$\mathbf{h}_1 \text{ (換算率ベクトル)} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_l \end{pmatrix} > 0$$

ベクトル $\mathbf{h}_1$ は、 h_f (第 f 番目の労働の支出 1 単位は「1+1 番目」の労働、すなわち「抽象的人間労働」の支出何単位分に相当するか、の数値) を要素とする 1 次元の縦ベクトル。

$$\mathbf{A} \text{ (投入係数行列)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix} \geq 0$$

行列 $\mathbf{A}$ は a_{ij} (第 i 財 1 単位を生産するために投入される第 j 財の単位数) を要素とする、 n 行 n 列の行列。

$$\mathbf{L}_1 \text{ (労働投入係数行列)} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & L_{1l} \\ L_{21} & L_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & L_{2l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_{n1} & L_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & L_{nl} \end{pmatrix} \geq 0$$

行列 $\mathbf{L}_1$ は L_{if} (第 i 財 1 単位を生産するために直接投入される第 f 番目の労働の単位数) を要素とする n 行 l 列の行列。

$$\mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & H_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_{l1} & H_{l2} & \cdot & \cdot & \cdot & H_{ln} \end{pmatrix} \geq 0$$

行列 $\mathbf{H}_1$ は $\mathbf{H}_{fi}$ (第 f 番目の労働の支出 1 単位分を職業能力開発するために投入される第 i 財の単位数) を要素とする 1 行 n 列の行列

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} \dot{m}_{11} & \dot{m}_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \dot{m}_{1n} \\ \dot{m}_{21} & \dot{m}_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \dot{m}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dot{m}_{n1} & \dot{m}_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \dot{m}_{nn} \end{pmatrix} \geq 0$$

行列 $\mathbf{T}_1$ は $\dot{m}_{fg}$ (第 f 番目の労働の支出 1 単位分を職業能力開発するために投入される第 g 番目の労働の単位数) を要素とする 1 行 1 列の行列、ただし「1 番目から 1 番目までの労働」の職業能力開発のためには、「1+1 番目の労働」すなわち「不熟練かつ単純労働、あるいは抽象的人間労働」そのものも投入される必要もあり得る、ので後掲のベクトル $\mathcal{M}$ も不可欠となる)

$$\boldsymbol{\ell} = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \ell_n \end{pmatrix} \geq 0$$

ベクトル $\boldsymbol{\ell}$ は、 ℓ_i (第 i 財 1 単位の生産のために直接投入される「1+1 番目の労働」すなわち「不熟練かつ単純労働、あるいは抽象的人間労働」の単位数) を要素とする n 次元の縦ベクトル。各財の生産のためには「不熟練かつ単純労働、あるいは抽象的人間労働」そのものも直接投入される必要もありうる。(なお、どの財の生産にも 1+1 種類の労働のうちからどれか 1 種類以上の労働は必ず直接投入される、1+1 種類のどの労働も、 n 種類の財のうちどれか 1 種類以上の財の生産のために必ず直接投入される、という点には留意すべき)

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{M}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathcal{M}_n \end{pmatrix} \geq 0$$

ベクトル $\mathcal{M}$ は、 $\mathcal{M}_f$ (第 f 番目の労働の支出 1 単位分の職業能力開発のために直接投入される「1+1 番目の労働」、すなわち「不熟練かつ単純労働、あるいは

は抽象的人間労働」の単位数)を要素とする、1次元の縦ベクトル。

以上より次の式が成り立つことになる。

価値方程式

$$\mathbf{t} = \mathbf{A}\mathbf{t} + (\mathbf{L}_1\mathbf{h}_1 + \boldsymbol{\ell}) \quad (\mathbf{t}, \mathbf{A}\mathbf{t}, \mathbf{L}_1\mathbf{h}_1, \boldsymbol{\ell}, \text{は全て } n \text{ 次元の縦ベクトル})$$

換算率算出数式

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{H}_1\mathbf{t} + (\mathbf{T}_1\mathbf{h}_1 + \mathcal{M}) \quad (\mathbf{h}_1, \mathbf{H}_1\mathbf{t}, \mathbf{T}_1\mathbf{h}_1, \mathcal{M}, \text{は全て } 1 \text{ 次元の縦ベクトル})$$

以上の式において未知数の数はベクトル $\mathbf{t}$ の要素数 n 個とベクトル $\mathbf{h}_1$ の要素数1個の合計「 $n+1$ 」個、方程式の数も「 $n+1$ 」本、なので上記の価値方程式と換算率算出数式で示される方程式を解けば、ベクトル $\mathbf{t}$ の全ての要素とともに、ベクトル $\mathbf{h}_1$ の全ての要素の数値が算出されることになる。

(2) 森嶋(1974)に基づく数理的証明の筆者の試案

次に森嶋(1974)5章でなされている数理的証明についての筆者なりの理解に基づき、それを異種労働が存在する場合に応用させた数理的証明を筆者の試案として提示することにしよう³⁾。

今以下のように置く。なおここで特に記載のない「行列・ベクトル」は、2(1)と同じである。

$$\mathbf{p} \text{ (価格ベクトル)} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ p_n \end{pmatrix} > 0$$

ベクトル $\mathbf{p}$ は p_i (第 i 財 1 単位の価格) を要素とする n 次元の縦ベクトル。

3) ここでの証明は、森嶋(1974)5章で示されている数理的証明の筆者なりの理解に基づく筆者の試案であり、森嶋(1974)ではこうした証明自体はなされていない。それゆえ誤りは全て筆者の責任であることを改めて強調しておく。

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2 \cdot \cdot \cdot x_n) > 0$$

ベクトル $\mathbf{x}$ は x_i (第 i 財の生産単位数) を要素とする n 次元の横ベクトル。

$$\mathbf{B}_i \text{ (実質賃金率行列)} = \begin{pmatrix} B_{i1} & B_{i2} & \cdot & \cdot & \cdot & B_{in} \\ B_{21} & B_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & B_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{i1} & B_{i2} & \cdot & \cdot & \cdot & B_{in} \end{pmatrix} \geq 0$$

行列 $\mathbf{B}_i$ は、 B_{fi} (第 f 番目の労働を行う労働者が、その労働の支出 1 単位の対価として支払われる賃金額で購入する第 i 財の単位数) を要素とする、1 行 n 列の行列、どの種類の労働を行う労働者も支払われた賃金で必ずどれか 1 種類以上の財は購入するから、行列 $\mathbf{B}_i$ は各行に必ず 1 つ以上は正の要素を有する。

$$\mathbf{R} \text{ (実質賃金率ベクトル)} = (R_1, R_2 \cdot \cdot \cdot R_n) \geq 0$$

ベクトル $\mathbf{R}$ は、 R_i (抽象的人間労働 (1+1 番目の労働) を行う労働者が、その労働の支出 1 単位の対価として支払われる賃金額で購入する第 i 財の単位数) を要素とする n 次元の横ベクトル

w 抽象的人間労働の支出 1 単位の対価として労働者に支払われる賃金額、スカラー

$$\mathbf{W}_1 \text{ (貨幣賃金率ベクトル)} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ w_i \end{pmatrix} > 0$$

ベクトル $\mathbf{W}_1$ は、 w_f (第 f 番目の労働を行う労働者がその労働の支出 1 単位の対価として支払われる賃金額) を要素とする 1 次元の縦ベクトル。

ちなみに

$$[\mathbf{W}_1 = \mathbf{B}_1 \mathbf{p}, w = \mathbf{R} \mathbf{p}] \text{ となる。}$$

以上を前提に以下のような数理的証明が可能であると筆者は考える。

「全ての財の生産に必要な財の総単位数 = $\mathbf{x}\mathbf{A}$ 」である。

← 【全ての財の生産に必要な第 1 財の総単位数

$$= x_1a_{11} + x_2a_{21} + x_3a_{31} + \cdots + x_na_{n1}$$

全ての財の生産に必要な第 2 財の総単位数

$$= x_1a_{12} + x_2a_{22} + x_3a_{32} + \cdots + x_na_{n2}$$

全ての財の生産に必要な第 3 財の総単位数

$$= x_1a_{13} + x_2a_{23} + x_3a_{33} + \cdots + x_na_{n3}$$

$$\cdots \cdots \cdots$$

全ての財の生産に必要な第 n 財の総単位数

$$= x_1a_{1n} + x_2a_{2n} + x_3a_{3n} + \cdots + x_na_{nn}]$$

一方

「全労働者がその全労働支出の対価として支払われる賃金額で購入にする各財の総単位数 = $\mathbf{x}(\mathbf{L}_1\mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\ell}\mathbf{R})$ 」である。

よって剰余産物の総単位数、総剰余価値はそれぞれ次のようになる。

剰余生産物の総単位数 = $\mathbf{x} - \mathbf{x}\mathbf{A} - \mathbf{x}(\mathbf{L}_1\mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\ell}\mathbf{R})$

総剰余価値 = $\{\mathbf{x} - \mathbf{x}\mathbf{A} - \mathbf{x}(\mathbf{L}_1\mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\ell}\mathbf{R})\} \mathbf{t} = \mathbf{x} \{ \mathbf{t} - \mathbf{A}\mathbf{t} - (\mathbf{L}_1\mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\ell}\mathbf{R}) \mathbf{t} \}$

一方剰余価値率 e は次の式で示される

$$e = \{ (\text{剰余労働}) / (\text{必要労働}) \} = [\mathbf{x} \{ (\mathbf{L}_1\mathbf{h}_1 + \boldsymbol{\ell}) - (\mathbf{L}_1\mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\ell}\mathbf{R}) \mathbf{t} \}] / \{ \mathbf{x}(\mathbf{L}_1\mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\ell}\mathbf{R}) \mathbf{t} \}$$

$$\rightarrow e\mathbf{x}(\mathbf{L}_1\mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\ell}\mathbf{R}) \mathbf{t} = \mathbf{x}(\mathbf{L}_1\mathbf{h}_1 + \boldsymbol{\ell}) - \mathbf{x}(\mathbf{L}_1\mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\ell}\mathbf{R}) \mathbf{t}$$

$$\rightarrow \mathbf{x}(\mathbf{L}_1\mathbf{h}_1 + \boldsymbol{\ell}) = \mathbf{x}(\mathbf{L}_1\mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\ell}\mathbf{R}) \mathbf{t} + e\mathbf{x}(\mathbf{L}_1\mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\ell}\mathbf{R}) \mathbf{t}$$

さて価値方程式は

$$[\mathbf{t} = \mathbf{A}\mathbf{t} + (\mathbf{L}_1\mathbf{h}_1 + \boldsymbol{\ell})], \text{であった。}$$

この式の両辺に左からベクトル $\mathbf{x}$ をかけると次のように展開できることになる。

$$\mathbf{x}\mathbf{t} = \mathbf{x} \{ \mathbf{A}\mathbf{t} + (\mathbf{L}_1\mathbf{h}_1 + \boldsymbol{\ell}) \}$$

$$\rightarrow \mathbf{x}\mathbf{t} = \mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{t} + \mathbf{x} (\mathbf{L}_1\mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\ell}\mathbf{R}) \mathbf{t} + \mathbf{e}\mathbf{x} (\mathbf{L}_1\mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\ell}\mathbf{R}) \mathbf{t}$$

$$\rightarrow \mathbf{x}\mathbf{t} - \mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{t} - \mathbf{x} (\mathbf{L}_1\mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\ell}\mathbf{R}) \mathbf{t} = \mathbf{e}\mathbf{x} (\mathbf{L}_1\mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\ell}\mathbf{R}) \mathbf{t}$$

$$\rightarrow \mathbf{x} \{ \mathbf{t} - \mathbf{A}\mathbf{t} - (\mathbf{L}_1\mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\ell}\mathbf{R}) \mathbf{t} \} = \mathbf{e}\mathbf{x} (\mathbf{L}_1\mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\ell}\mathbf{R}) \mathbf{t}$$

それゆえ総剰余価値を示す式は次のようになる。

$$\text{総剰余価値} = \mathbf{x} \{ \mathbf{t} - \mathbf{A}\mathbf{t} - (\mathbf{L}_1\mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\ell}\mathbf{R}) \mathbf{t} \} = \mathbf{e}\mathbf{x} (\mathbf{L}_1\mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\ell}\mathbf{R}) \mathbf{t}$$

次に、「全部門で利潤が発生していることを示す式」は次のようになる。

$$\mathbf{p} > \mathbf{A}\mathbf{p} + (\mathbf{L}_1\mathbf{W}_1 + \boldsymbol{\ell}\mathbf{w})$$

$$(\mathbf{W}_1 = \mathbf{B}_1\mathbf{p}, \mathbf{w} = \mathbf{R}\mathbf{p}, \text{だから})$$

$$\rightarrow \mathbf{p} > \mathbf{A}\mathbf{p} + (\mathbf{L}_1\mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\ell}\mathbf{R}) \mathbf{p}$$

$$\rightarrow (\mathbf{E} - \mathbf{A} - \mathbf{L}_1\mathbf{B}_1 - \boldsymbol{\ell}\mathbf{R}) \mathbf{p} > 0$$

さて、行列 $\mathbf{C}$ が、 $\mathbf{C} \geq 0$ のとき、「行列 $(\mathbf{E} - \mathbf{C})$ がホーキンズ・サイモン条件を満たす (= $(\mathbf{E} - \mathbf{C})$ の首座小行列式が全て正である)」ということは、「 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ がベクトルの時、いかなる $\mathbf{b} \geq 0$ をとっても、ベクトル $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ が縦ベクトルなら、『 $(\mathbf{E} - \mathbf{C}) \mathbf{a} = \mathbf{b}$ 』、 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ が横ベクトルなら、『 $\mathbf{a} (\mathbf{E} - \mathbf{C}) = \mathbf{b}$ 』、となる $\mathbf{a} \geq 0$ が存在する」と同値である（例えば松尾（2021）pp207～208 参照）。それゆえ「 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ がベクトルで $\mathbf{C}$ が $\mathbf{C} \geq 0$ の行列の時、いかなる $\mathbf{b} \geq 0$ をとっても $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ が縦ベクトルなら、『 $(\mathbf{E} - \mathbf{C}) \mathbf{a} = \mathbf{b}$ 』、 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ が横ベクトルなら、『 $\mathbf{a} (\mathbf{E} - \mathbf{C}) = \mathbf{b}$ 』、となる $\mathbf{a} \geq 0$ が存在するならば、 $(\mathbf{E} - \mathbf{C})$ はホーキンズ・サイモン条件を満たす」ということもできる。

この点を念頭において「 $(\mathbf{E} - \mathbf{A} - \mathbf{L}_1\mathbf{B}_1 - \boldsymbol{\ell}\mathbf{R}) \mathbf{p} > 0$ 」の式を考察すれば、

「 $(\mathbf{A} + \mathbf{L}_1\mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\ell}\mathbf{R}) \geq 0$ 、『 $(\mathbf{E} - \mathbf{A} - \mathbf{L}_1\mathbf{B}_1 - \boldsymbol{\ell}\mathbf{R}) \mathbf{p}$ は正の縦ベクトル』でそのようになる $\mathbf{p} > 0$ が存在している」といえるから、「行列 $(\mathbf{E} - \mathbf{A} - \mathbf{L}_1\mathbf{B}_1 - \boldsymbol{\ell}\mathbf{R})$ はホーキンズ・サイモン条件を満たす」、とし得る。

それゆえ

「 $\mathbf{x} (\mathbf{E} - \mathbf{A} - \mathbf{L}_1 \mathbf{B}_1 - \ell \mathbf{R}) > 0$ 、となる $\mathbf{x} > 0$ が存在する」ことになる。

この式の左辺に右からベクトル $\mathbf{t} > 0$ をかけると次のように展開できる。

$$\mathbf{x} (\mathbf{E} - \mathbf{A} - \mathbf{L}_1 \mathbf{B}_1 - \ell \mathbf{R}) \mathbf{t} = \mathbf{x} \{ \mathbf{t} - \mathbf{A} \mathbf{t} - (\mathbf{L}_1 \mathbf{B}_1 + \ell \mathbf{R}) \mathbf{t} \} > 0$$

ここで先の

$$\mathbf{x} \{ \mathbf{t} - \mathbf{A} \mathbf{t} - (\mathbf{L}_1 \mathbf{B}_1 + \ell \mathbf{R}) \mathbf{t} \} = e \mathbf{x} (\mathbf{L}_1 \mathbf{B}_1 + \ell \mathbf{R}) \mathbf{t}$$

の式より

$$\mathbf{x} \{ \mathbf{t} - \mathbf{A} \mathbf{t} - (\mathbf{L}_1 \mathbf{B}_1 + \ell \mathbf{R}) \mathbf{t} \} = e \mathbf{x} (\mathbf{L}_1 \mathbf{B}_1 + \ell \mathbf{R}) \mathbf{t} > 0$$

となる。

$\mathbf{x} (\mathbf{L}_1 \mathbf{B}_1 + \ell \mathbf{R}) \mathbf{t}$ はスカラーで $\mathbf{x} (\mathbf{L}_1 \mathbf{B}_1 + \ell \mathbf{R}) \mathbf{t} > 0$ であるから、「 $e \mathbf{x} (\mathbf{L}_1 \mathbf{B}_1 + \ell \mathbf{R}) \mathbf{t} > 0$ 」の式が成り立つためには「 e (剰余価値率) > 0 」でなければならない、となる。

つまり「全部門で利潤が発生していることを示す式」を展開させていけば、「 e (剰余価値率) > 0 」となるわけである。

3、「置塩 (1977) (1978) における換算率算出数式」と

「中谷 (1994) の数理的証明」についての筆者の理解に基づく紹介

(1)「置塩 (1977) (1978) における換算率算出数式」についての筆者の理解に基づく紹介

次に置塩 (1977) pp180~181、置塩 (1978) pp22~24 で示されている換算率算出数式を紹介しよう⁴⁾。

まず生産される財の種類は n 種類、労働の種類は $1+1$ 種類、そして「第1+

4) ここでの記述は置塩 (1977) pp180~181、置塩 (1978) pp22~24 で示されている換算率算出数式について、筆者なりの理解に基づきそれに若干の修正や加工を加え、出来る限り筆者なりの表現で記述したものである。それゆえ間違い等があればそれは全て筆者の責任である。なお置塩 (1977) pp180~181、置塩 (1978) pp22~24 では、「労働の種類は1種類、『第1番目の労働』を『基準とする労働』」とされているが、森嶋 (1974) との本稿内での整合性を考え、本稿では、「労働の種類は1+1種類、『1+1番目の労働』を『基準とする労働』」とし、各行列・ベクトルもそれに合わせる形に修正した。

1 番目の労働」が「社会における普通の成員が特別の訓練を必要とせずに行うことができる労働」(置塩 (1978) p22) であり、これを「基準とする労働」とする。すなわち「1+1 番目の労働」が「抽象的人間労働」である。

そして次のように置く。

$$\mathbf{t} \text{ (価値ベクトル)} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ t_n \end{pmatrix} > 0$$

ベクトル $\mathbf{t}$ は、 t_i (第 i 財 1 単位の価値) を要素とする n 次元の縦ベクトル。

$$\mathbf{h}_2 \text{ (換算率ベクトル)} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \cdot \\ h_i \\ 1 \end{pmatrix} > 0$$

ベクトル $\mathbf{h}_2$ は、 h_f (第 f 番目の労働の支出 1 単位は「1+1 番目」の労働、すなわち「抽象的人間労働」の支出何単位分に相当するか、の数値) を要素とする $1+1$ 次元の縦ベクトル、ただし「 $h_{1+1} = 1$ 」、である。

$$\mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{11} & \mathcal{H}_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathcal{H}_{1n} \\ \mathcal{H}_{21} & \mathcal{H}_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathcal{H}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathcal{H}_{11} & \mathcal{H}_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathcal{H}_{1n} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

行列 $\mathbf{H}_2$ は $\mathcal{H}_{fi}$ (第 f 番目の労働を行う標準的労働者 1 人の、全活動期間中の当該労働の支出単位数分の職業能力開発のために、投入される第 i 財の単位数) を要素とする、 $1+1$ 行 n 列の行列、ただし「1+1 番目の労働」には職業能力開発の必要はないので「 $\mathcal{H}_{1+1i}$ 」の要素、すなわち行列 $\mathbf{H}_2$ の $1+1$ 行目の要素は全て 0 である。

$$\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & T_{11} & T_{11+1} \\ T_{21} & T_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & T_{21} & T_{21+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ T_{11} & T_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & T_{11} & T_{11+1} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

行列 $\mathbf{T}_2$ は $\mathbf{T}_{fg}$ (第 f 番目の労働を行う標準的労働者 1 人の、全活動期間中の当該労働の支出単位数分の職業能力開発を行うために、直接投入される第 g 番目の労働の単位数) を要素とする $1+1$ 行 $1+1$ 列の行列である。なお「 $1+1$ 番目の労働」には職業能力開発の必要はないので、「 $\mathbf{T}_{1+1g}$ 」の要素、すなわち行列 $\mathbf{T}_2$ の $1+1$ 行目の要素は全て 0 である (ただし「 $1+1$ 番目の労働」も職業能力開発のために投入され得るので、「 $g=1, 2, \dots, 1+1$ 」である)。

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \cdot \\ \Lambda_l \\ \Lambda_{l+1} \end{pmatrix} > 0$$

ベクトル $\mathbf{\Lambda}$ は Λ_f (第 f 番目の労働を行う標準的労働者 1 人が、その全活動期間中に支出する当該労働の単位数) を要素とする $1+1$ 次元の縦ベクトルである。

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 \cdot h_1 \\ \Lambda_2 \cdot h_2 \\ \cdot \cdot \cdot \\ \Lambda_l \cdot h_l \\ \Lambda_{l+1} \cdot 1 \end{pmatrix} > 0$$

ベクトル $\mathbf{J}$ は、 $\Lambda_f \cdot h_f$ (第 f 番目の労働を行う標準的労働者 1 人の全活動期間中の当該労働の支出単位数は、「第 $1+1$ 番目の労働」の支出何単位分に相当するかを示す数値) を要素とする $1+1$ 次元の縦ベクトル。なお、「 $h_{l+1} = 1$ 」であるからベクトル $\mathbf{J}$ の要素のうち未知数は、「 $h_1, h_2, \dots, h_l$ 」の部分である。

$$\mathbf{L}_2 \text{ (労働投入係数行列)} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & \cdot & \cdot & \mathcal{L}_{1l} & \mathcal{L}_{1l+1} \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & \cdot & \cdot & \mathcal{L}_{2l} & \mathcal{L}_{2l+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathcal{L}_{n1} & \mathcal{L}_{n2} & \cdot & \cdot & \mathcal{L}_{nl} & \mathcal{L}_{nl+1} \end{pmatrix} \geq 0$$

行列 $\mathbf{L}_2$ は $\mathcal{L}_{if}$ (第 i 財 1 単位を生産するために直接投入される第 f 番目の労働の単位数) を要素とする、 n 行 $1+1$ 列の行列。どの財の生産にもどれか 1 種類以上の労働は必ず直接投入されなければならない、どの種類の労働もどれか 1 種類以上の財の生産のために必ず直接投入されるわけだから、行列 $\mathbf{L}_2$ は各行各

列に 1 つ以上の正の要素を有する行列となる。

$$\mathbf{A} \text{ (投入係数行列)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix} \geq 0$$

行列 $\mathbf{A}$ は a_{ij} (第 i 財 1 単位を生産するために投入される第 j 財の単位数) を要素とする n 行 n 列の行列である。

以上から「それぞれの種類の労働を行う標準的労働者 1 人がその全活動期間中に支出する当該労働の単位数は、『第 $l+1$ 番目の労働』の支出何単位分に相当するか」の各数値を示す式、つまり事実上「換算率算出数式」に相当する式は以下ようになる。

$$\mathbf{Jl} = \mathbf{A} + \mathbf{H}_2 \mathbf{t} + \mathbf{T}_2 \mathbf{h}_2 \quad (\mathbf{Jl}, \mathbf{A}, \mathbf{H}_2 \mathbf{t}, \mathbf{T}_2 \mathbf{h}_2, \text{は全て } l+1 \text{ 次元の縦ベクトル})$$

また価値方程式は次のように示すことができる。

$$\mathbf{t} = \mathbf{At} + \mathbf{L}_2 \mathbf{h}_2 \quad (\mathbf{t}, \mathbf{At}, \mathbf{L}_2 \mathbf{h}_2, \text{は全て } n \text{ 次元の縦ベクトル})$$

上の二つの式における未知数の数は、ベクトル $\mathbf{t}$ の要素数 n 個とベクトル $\mathbf{h}_2$ の要素のうち 1 個の合計「 $n+1$ 」個 (「 $h_{l+1} = 1$ 」は定まっているから、ベクトル $\mathbf{h}_2$ の要素のうち未知数は、 $(h_1, h_2 \cdots h_l)$ の 1 個)、そして「 $\mathbf{Jl}_{l+1}$ 」については「 $\mathbf{Jl}_{l+1} = \mathbf{A}_{l+1} \cdot 1 + 0 + 0 = \mathbf{A}_{l+1}$ 」となり数値が定まっているから、未知数を含む方程式の数は「 $n+1$ 」本となる。未知数の数と未知数を含む方程式の本数が同じであるから、この方程式は解くことができ、ベクトル $\mathbf{t}$ の要素の全数値とともにベクトル $\mathbf{h}_2$ の要素の全数値は算出され得ることになる (置塩 (1977) p181、置塩 (1978) p24 参照)。

(2) 「中谷 (1994) の数理的証明」についての筆者の理解に基づく紹介

以上のように算出された換算率ベクトル $\mathbf{h}_2$ を用いて、中谷 (1994) 第 3 章

第2節4で示されている数理的証明に基づけば、以下のような数理的証明が可能であると思われる⁵⁾。なお中谷(1994)第3章第2節4で展開されている数理的証明の紹介を置塩(1977) pp180~181、置塩(1978) pp22~24の換算率算出数式の紹介に続けるのは、中谷(1994)第3章第2節4での証明が、置塩(1977) pp180~181、置塩(1978) pp22~24で算出された換算率に基づくものと考えられるためである。

さてまず次のように置く。なおここで特に記載のない「行列・ベクトル」は、3(1)と同じである。

$$\mathbf{p} \text{ (価格ベクトル)} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} > 0$$

ベクトル $\mathbf{p}$ は、 p_i (第 i 財 1 単位の価格) を要素とする n 次元の縦ベクトル

$$\mathbf{B}_2 \text{ (実質賃金率行列)} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{11} & \mathcal{B}_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathcal{B}_{1n} \\ \mathcal{B}_{21} & \mathcal{B}_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathcal{B}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{B}_{l1} & \mathcal{B}_{l2} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathcal{B}_{ln} \\ \mathcal{B}_{l+11} & \mathcal{B}_{l+12} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathcal{B}_{l+1n} \end{pmatrix} \geq 0$$

行列 $\mathbf{B}_2$ は $\mathcal{B}_{fi}$ (第 f 番目の労働を行う労働者がその労働の支出 1 単位の対価として支払われる賃金額で購入する第 i 財の単位数) を要素とする $l+1$ 行 n 列の行列、どの種類の労働を行う労働者も支払われた賃金でどれか 1 種類以上の財は必ず購入するので、行列 $\mathbf{B}_2$ は各行に必ず 1 つ以上は正の要素を有することになる。

5) ここからの記述は中谷(1994)第3章第2節4での数理的証明を筆者なりの理解に基づき記述したものである(なお中谷(1994)第3章第2節4では、そこでの証明は中谷(1994)第3章第2節2の分類の「(B) 熟練度、訓練度の相違」(中谷(1994) p97)についてのもの、とされているが、筆者は「(A) 労働の具体的形態の相違」(中谷(1994) p97)についてのもの、と理解した)。立命館大学教授の橋本貴彦先生からは中谷(1994)を紹介していただいたとともに、筆者の理解に関してもご教示をいただいた。深く感謝申し上げますとともに、ここでの間違いは全て筆者の責任であることも強調しておく。

$$\mathbf{W}_2 \text{ (貨幣賃金率ベクトル)} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_l \\ w_{l+1} \end{pmatrix} > 0$$

ベクトル $\mathbf{W}_2$ は、 w_f (第 f 番目の労働を行う労働者がその労働の支出 1 単位の対価として支払われる賃金額) を要素とする、 $l+1$ 次元の縦ベクトル。

ちなみに

$$[\mathbf{W}_2 = \mathbf{B}_2 \mathbf{p}] \text{ となる。}$$

まず価値方程式は下記のように示すことができる。

$$\mathbf{t} = \mathbf{A} \mathbf{t} + \mathbf{L}_2 \mathbf{h}_2$$

$$\rightarrow (\mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{t} = \mathbf{L}_2 \mathbf{h}_2$$

次に「全部門で利潤が発生していることを示す式」は次のようになる。

$$\mathbf{p} > \mathbf{A} \mathbf{p} + \mathbf{L}_2 \mathbf{W}_2$$

$$(\mathbf{W}_2 = \mathbf{B}_2 \mathbf{p} \text{ であるから})$$

$$\rightarrow \mathbf{p} > \mathbf{A} \mathbf{p} + \mathbf{L}_2 \mathbf{B}_2 \mathbf{p}$$

$$\rightarrow (\mathbf{E} - \mathbf{A} - \mathbf{L}_2 \mathbf{B}_2) \mathbf{p} > 0$$

先にも述べたように、行列 $\mathbf{C}$ が、 $\mathbf{C} \geq 0$ のとき、「行列 $(\mathbf{E} - \mathbf{C})$ がホーキンス・サイモン条件を満たす (= $(\mathbf{E} - \mathbf{C})$ の首座小行列式が全て正である)」ということは、「 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ がベクトルの時、いかなる $\mathbf{b} \geq 0$ をとっても、ベクトル $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ が縦ベクトルなら、『 $(\mathbf{E} - \mathbf{C}) \mathbf{a} = \mathbf{b}$ 』、 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ が横ベクトルなら、『 $\mathbf{a} (\mathbf{E} - \mathbf{C}) = \mathbf{b}$ 』、となる $\mathbf{a} \geq 0$ が存在する」と同値である (例えば松尾 (2021) pp207~208 参照)。それゆえ「 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ がベクトルで $\mathbf{C}$ が $\mathbf{C} \geq 0$ の行列の時、いかなる $\mathbf{b} \geq 0$ をとっても $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ が縦ベクトルなら、『 $(\mathbf{E} - \mathbf{C}) \mathbf{a} = \mathbf{b}$ 』、 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ が横ベクトルなら、『 $\mathbf{a} (\mathbf{E} - \mathbf{C}) = \mathbf{b}$ 』、となる $\mathbf{a} \geq 0$ が存在するならば、 $(\mathbf{E} - \mathbf{C})$ はホーキンス・サイモン条件を満たす」といえる。

この点を念頭において「 $(\mathbf{E} - \mathbf{A} - \mathbf{L}_2 \mathbf{B}_2) \mathbf{p} > 0$ 」の式を考察すると

「 $(\mathbf{A} + \mathbf{L}_2\mathbf{B}_2) \geq 0$ 、 $[(\mathbf{E} - \mathbf{A} - \mathbf{L}_2\mathbf{B}_2) \mathbf{p}]$ は正の縦ベクトル」でそのようになる $\mathbf{p} > 0$ が存在する」であるから、「 $(\mathbf{E} - \mathbf{A} - \mathbf{L}_2\mathbf{B}_2)$ はホーキンス・サイモン条件を満たす」といえる。

それゆえ

「 $\mathbf{x} (\mathbf{E} - \mathbf{A} - \mathbf{L}_2\mathbf{B}_2) > 0$ 、となる $\mathbf{x} > 0$ が存在する」ことになる。

この式の左辺に右からベクトル $\mathbf{t} > 0$ を掛けると、「ベクトル $\mathbf{x} > 0$ が $[\mathbf{x} (\mathbf{E} - \mathbf{A} - \mathbf{L}_2\mathbf{B}_2) > 0]$ を成り立たせる $\mathbf{x} > 0$ 」であれば、「全部門で利潤が発生していることを示す式」は以下のように展開できることになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x} (\mathbf{E} - \mathbf{A} - \mathbf{L}_2\mathbf{B}_2) \mathbf{t} &= \mathbf{x} \mathbf{L}_2 (\mathbf{h}_2 - \mathbf{B}_2\mathbf{t}) > 0 \\ &\rightarrow \mathbf{x} \mathbf{L}_2 \mathbf{h}_2 - \mathbf{x} \mathbf{L}_2 \mathbf{B}_2 \mathbf{t} > 0 \end{aligned}$$

この式は「剰余労働が存在していること」を示す式である⁶⁾。

よって、「ベクトル $\mathbf{x} > 0$ が $[\mathbf{x} (\mathbf{E} - \mathbf{A} - \mathbf{L}_2\mathbf{B}_2) > 0]$ を成り立たせる $\mathbf{x} > 0$ であれば、『全部門で利潤が存在していることを示す式』を展開させていけば『剰余労働が存在していることを示す式』となる」といえる。

4、田中（2015）に基づきそれを展開させた筆者の試案

異種労働の存在を考慮した「マルクスの基本定理」の数理的証明に関して、田中（2015）は、「二財二種労働モデル」の数理的証明を行っている。そこでは「換算率＝それぞれの労働の実質賃金率（の同一定数倍）」であれば「利潤が発生していることを示す式」と「剰余労働が存在することを示す式」が同一となることから、「換算率＝それぞれの労働の実質賃金率（の同一定数倍）」

6) $\mathbf{x}$ が「正の横ベクトル」であれば、 $\mathbf{x} \mathbf{L}_2 \mathbf{h}_2$ 、 $\mathbf{x} \mathbf{L}_2 \mathbf{B}_2 \mathbf{t}$ はともに正のスカラーとなる。しかし「 $\mathbf{x} \mathbf{L}_2 \mathbf{h}_2 - \mathbf{x} \mathbf{L}_2 \mathbf{B}_2 \mathbf{t} > 0$ 」という式については「 $\mathbf{x} > 0$ が、 $[\mathbf{x} (\mathbf{E} - \mathbf{A} - \mathbf{L}_2\mathbf{B}_2) > 0]$ を成り立たせる $\mathbf{x} > 0$ である」ときのみ成立する。その意味で「 $\mathbf{x} \mathbf{L}_2 \mathbf{h}_2 - \mathbf{x} \mathbf{L}_2 \mathbf{B}_2 \mathbf{t} > 0$ 」という式は、「 $[\mathbf{x} (\mathbf{E} - \mathbf{A} - \mathbf{L}_2\mathbf{B}_2) > 0]$ を成り立たせる $[\mathbf{x} > 0]$ に依存している」ことになる。この点は中谷（1994）p102 参照。

の場合は「マルクスの基本定理」が成り立つことが数式で証明されている（田中（2015）pp33～38）。この田中（2015）の証明における換算率について、筆者は厳密には「換算率＝（それぞれの種類の労働の実質賃金率）／（抽象的人間労働の実質賃金率）」、さらにいえば「換算率＝（それぞれの種類の労働を行う労働者が、その労働の支出 1 単位の対価として支払われる賃金額で購入する、全消費財の生産に直接間接に投入される抽象的人間労働の単位数）／（労働者が抽象的人間労働の支出 1 単位の対価として支払われる賃金額で購入する、全消費財の生産に直接間接に投入される抽象的人間労働の単位数）」ではないか、と考えた。この場合でも田中（2015）pp33～38 での数理的証明は成り立つことになる。

そこでここでは、「換算率＝（それぞれの種類の労働を行う労働者が、その労働の支出 1 単位の対価として支払われる賃金額で購入する、全消費財の生産に直接間接に投入される抽象的人間労働の単位数）／（労働者が抽象的人間労働の支出 1 単位の対価として支払われる賃金額で購入する、全消費財の生産に直接間接に投入される抽象的人間労働の単位数）」としてとらえた、「田中（2015）に基づく筆者の試案」について提示することにしよう。

「換算率」をそのように捉えた場合、「二財二種労働モデル」では、「換算率」は「 $z_1 = (R_{1t2}) / (R_{t2}) = R_1 / R$ 、 $z_2 = (R_{2t2}) / (R_{t2}) = R_2 / R$ 」、「多部門多種労働モデル」では「換算率ベクトル」を $\mathbf{h}_3$ とすれば、「 $\mathbf{h}_3 = (\mathbf{B}_{2t}) / (\mathbf{R}_t)$ （ベクトル $\mathbf{h}_3$ は 1+1 次元の縦ベクトル）」となる（それぞれの定義の詳細は後述（1）（2）の該当部分参照）。

このように換算率を考えても、「マルクスの基本定理」は「二財二種労働モデル」「多部門多種労働モデル」のいずれにおいても下記のようにとりあえずは証明できる、と思われる。

（1）「二財二種労働モデル」についての筆者の試案

経済社会が財の種類は生産財、消費財それぞれ 1 種類ずつの 2 種類、労働の種類も「第 1 番目の労働」「第 2 番目の労働」の二種類のみから構成されてい

る、とし今次のようにおく。

t_1 生産財 1 単位の価値

t_2 消費財 1 単位の価値

p_1 生産財 1 単位の価格

p_2 消費財 1 単位の価格

a_1 生産財 1 単位を生産するために投入される生産財の単位数

a_2 消費財 1 単位を生産するために投入される生産財の単位数

τ_{11} 生産財 1 単位を生産するために直接投入される「第 1 番目の労働」の単位数

τ_{12} 生産財 1 単位を生産するために直接投入される「第 2 番目の労働」の単位数

τ_{21} 消費財 1 単位を生産するために直接投入される「第 1 番目の労働」の単位数

τ_{22} 消費財 1 単位を生産するために直接投入される「第 2 番目の労働」の単位数

R 労働者が「抽象的人間労働」の支出 1 単位の対価として支払われる賃金額で購入する消費財の単位数

R_1 「第 1 番目の労働」を行う労働者が、その労働の支出 1 単位の対価として支払われる賃金額で購入する消費財の単位数

R_2 「第 2 番目の労働」を行う労働者が、その労働の支出 1 単位の対価として支払われる賃金額で購入する消費財の単位数

z_1 「第 1 番目の労働」の換算率 $(= (R_1 t_2) / (R t_2) = R_1 / R)$

z_2 「第 2 番目の労働」の換算率 $(= (R_2 t_2) / (R t_2) = R_2 / R)$

以上の場合、生産財、消費財 1 単位の価値はそれぞれ次のように示すことができる。

$$t_1 = a_1 t_1 + z_1 \tau_{11} + z_2 \tau_{12}$$

$$t_2 = a_2 t_1 + z_1 \tau_{21} + z_2 \tau_{22}$$

Fundamental Marxian Theorem の異種労働が存在する場合の数理的証明とその再検討

ここで

$$t_1 = \{ (z_1 \tau_{11} + z_2 \tau_{12}) / (1 - a_1) \}$$

であるから

$$\begin{aligned} t_2 &= \{ a_2 (z_1 \tau_{11} + z_2 \tau_{12}) / (1 - a_1) \} + (z_1 \tau_{21} + z_2 \tau_{22}) \\ &= [\{ a_2 (z_1 \tau_{11} + z_2 \tau_{12}) \} + \{ (1 - a_1) (z_1 \tau_{21} + z_2 \tau_{22}) \}] / (1 - a_1) \end{aligned}$$

となる。

さて、「両部門で利潤が発生していること」を式で示せば下記のようなになる。

$$p_1 > a_1 p_1 + (\tau_{11} R_1 + \tau_{12} R_2) \quad p_2$$

$$p_2 > a_2 p_1 + (\tau_{21} R_1 + \tau_{22} R_2) \quad p_2$$

以上より「両部門で利潤が発生していることを示す式」として次の式が算出される。

$$(1 - a_1) (1 - \tau_{21} R_1 - \tau_{22} R_2) > a_2 (\tau_{11} R_1 + \tau_{12} R_2)$$

$$\leftarrow [p_1 > a_1 p_1 + (\tau_{11} R_1 + \tau_{12} R_2) \quad p_2 \rightarrow (1 - a_1) \quad p_1 > (\tau_{11} R_1 + \tau_{12} R_2) \quad p_2$$

$$\rightarrow p_1/p_2 > (\tau_{11} R_1 + \tau_{12} R_2) / (1 - a_1)$$

$$p_2 > a_2 p_1 + (\tau_{21} R_1 + \tau_{22} R_2) \quad p_2 \rightarrow (1 - \tau_{21} R_1 - \tau_{22} R_2) \quad p_2 > a_2 p_1$$

$$\rightarrow p_1/p_2 < \{ (1 - \tau_{21} R_1 - \tau_{22} R_2) / a_2 \}$$

$$\text{以上より } \{ (\tau_{11} R_1 + \tau_{12} R_2) / (1 - a_1) \} < p_1/p_2 < \{ (1 - \tau_{21} R_1 - \tau_{22} R_2) / a_2 \}$$

$$\rightarrow \{ (\tau_{11} R_1 + \tau_{12} R_2) / (1 - a_1) \} < \{ (1 - \tau_{21} R_1 - \tau_{22} R_2) / a_2 \}$$

$$\rightarrow (1 - a_1) (1 - \tau_{21} R_1 - \tau_{22} R_2) > a_2 (\tau_{11} R_1 + \tau_{12} R_2) \quad \text{】}$$

一方「剰余労働が存在していることを示す式」は次のようになる。

$$z_1 (\tau_{11} + \tau_{21}) + z_2 (\tau_{12} + \tau_{22}) > (\tau_{11} + \tau_{21}) R_1 t_2 + (\tau_{12} + \tau_{22}) R_2 t_2$$

ここで、「第1番目の労働」「第2番目の労働」のそれぞれの換算率が、「 $z_1 = (R_1 t_2) / (R t_2) = R_1 / R$ 、 $z_2 = (R_2 t_2) / (R t_2) = R_2 / R$ 」、であるなら「剰余労働が存在していることを示す式」として次の式が算出される。

$$(1 - R_{t2}) > 0$$

$$\begin{aligned} \leftarrow [Z_1 (\tau_{11} + \tau_{21}) + Z_2 (\tau_{12} + \tau_{22}) > (\tau_{11} + \tau_{21}) R_1 t_2 + (\tau_{12} + \tau_{22}) R_2 t_2 \\ \rightarrow (R_1/R) (\tau_{11} + \tau_{21}) + (R_2/R) (\tau_{12} + \tau_{22}) > (\tau_{11} + \tau_{21}) R_1 t_2 + (\tau_{12} + \tau_{22}) R_2 t_2 \\ \rightarrow R_1 (\tau_{11} + \tau_{21}) + R_2 (\tau_{12} + \tau_{22}) > (\tau_{11} + \tau_{21}) R R_1 t_2 + (\tau_{12} + \tau_{22}) R R_2 t_2 \\ \rightarrow (1 - R_{t2}) \{R_1 (\tau_{11} + \tau_{21}) + R_2 (\tau_{12} + \tau_{22})\} > 0, \\ \text{「}[R_1 (\tau_{11} + \tau_{21}) + R_2 (\tau_{12} + \tau_{22})\} > 0\text{」であるから上の式が成り立つ条件は} \\ (1 - R_{t2}) > 0、となる\text{】} \end{aligned}$$

$(1 - R_{t2}) > 0$ の t_2 のところに、

$$t_2 = [\{a_2 (z_1 \tau_{11} + z_2 \tau_{12})\} + \{(1 - a_1) (z_1 \tau_{21} + z_2 \tau_{22})\}] / (1 - a_1)$$

を代入すると下記の式が算出される。

$$\begin{aligned} (1 - a_1) (1 - \tau_{21} R_1 - \tau_{22} R_2) > a_2 (\tau_{11} R_1 + \tau_{12} R_2) \\ \leftarrow [1 - R \{a_2 (z_1 \tau_{11} + z_2 \tau_{12})\} + \{(1 - a_1) (z_1 \tau_{21} + z_2 \tau_{22})\}] / (1 - a_1) > 0 \\ z_1 = R_1/R, \quad z_2 = R_2/R、であるから、 \\ \rightarrow 1 - [\{a_2 (R_1 \tau_{11} + R_2 \tau_{12})\} + \{(1 - a_1) (R_1 \tau_{21} + R_2 \tau_{22})\}] / (1 - a_1) > 0 \\ \rightarrow (1 - a_1) - [\{a_2 (R_1 \tau_{11} + R_2 \tau_{12})\} + \{(1 - a_1) (R_1 \tau_{21} + R_2 \tau_{22})\}] > 0 \\ \rightarrow (1 - a_1) (1 - \tau_{21} R_1 - \tau_{22} R_2) > a_2 (\tau_{11} R_1 + \tau_{12} R_2) \text{】} \end{aligned}$$

この式は先に示した「両部門で利潤が発生していることを示す式」と同一である。

それゆえ「第1番目の労働」「第2番目の労働」のそれぞれの換算率が「 $z_1 = (R_1 t_2)/(R t_2) = R_1/R$ 、 $z_2 = (R_2 t_2)/(R t_2) = R_2/R$ 」であるなら、「二財二種労働モデル」においても「マルクスの基本定理」は成り立つことになる。

(2)「多部門多種労働モデル」についての筆者の試案

次に「多部門多種労働モデル」についての筆者の試案を提示してみよう。

財の種類は n 種類、労働の種類は「 $1+1$ 」種類で、「 $1+1$ 番目の労働」が「基準となる労働」すなわち「抽象的人間労働」とする。そして、「 $i = 1, 2, \dots, n$ 」,「 $f = 1, 2, \dots, 1+1$ 」とし、次のように置く。

$$\mathbf{t} \text{ (価値ベクトル)} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ t_n \end{pmatrix} > 0$$

ベクトル $\mathbf{t}$ は t_i (第 i 財 1 単位の価値) を要素とする n 次元の縦ベクトル。

$$\mathbf{p} \text{ (価格ベクトル)} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ p_n \end{pmatrix} > 0$$

ベクトル $\mathbf{p}$ は p_i (第 i 財 1 単位の価格) を要素とする n 次元の縦ベクトル

$$\mathbf{A} \text{ (投入係数行列)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix} \geq 0$$

行列 $\mathbf{A}$ は a_{ij} (第 i 財 1 単位を生産するために投入される第 j 財の単位数) を要素とする n 行 n 列の行列である。

$$\mathbf{L}_2 \text{ (労働投入係数行列)} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathcal{L}_{1l} & \mathcal{L}_{1l+1} \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathcal{L}_{2l} & \mathcal{L}_{2l+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathcal{L}_{n1} & \mathcal{L}_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathcal{L}_{nl} & \mathcal{L}_{nl+1} \end{pmatrix} \geq 0$$

行列 $\mathbf{L}_2$ は $\mathcal{L}_{if}$ (第 i 財 1 単位を生産するために直接投入される第 f 番目の労働の単位数) を要素とする n 行 $l+1$ 列の行列である。行列 $\mathbf{L}_2$ は先に述べた理由より各行各列に必ず 1 つ以上は正の要素を有する。

$$\mathbf{B}_2 \text{ (実質賃金率行列)} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{11} & \mathcal{B}_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathcal{B}_{1n} \\ \mathcal{B}_{21} & \mathcal{B}_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathcal{B}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathcal{B}_{l1} & \mathcal{B}_{l2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathcal{B}_{ln} \\ \mathcal{B}_{l+11} & \mathcal{B}_{l+12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathcal{B}_{l+1n} \end{pmatrix} \geq 0$$

行列 $\mathbf{B}_2$ は $\mathcal{B}_{fi}$ (第 f 番目の労働を行う労働者が、その労働の支出 1 単位の対価

として支払われる賃金額で購入する第 i 財の単位数) を要素とする $1+1$ 行 n 列の行列、先に述べた理由より行列 $\mathbf{B}_2$ は各行に必ず 1 つ以上は正の要素を有する。

$\mathbf{R}$ (実質賃金率ベクトル) $= (\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_n) \geq 0$

ベクトル $\mathbf{R}$ は、 $\mathbf{R}_i$ (抽象的人間労働を行う労働者が、その労働の支出 1 単位の対価として支払われる賃金額で購入する第 i 財の単位数) を要素とする n 次元の横ベクトル

$$\mathbf{W}_2 \text{ (貨幣賃金率ベクトル)} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_l \\ w_{l+1} \end{pmatrix} > 0$$

ベクトル $\mathbf{W}_2$ は、 w_f (第 f 番目の労働を行う労働者がその労働の支出 1 単位の対価として支払われる賃金額) を要素とする $1+1$ 次元の縦ベクトル。

$w (= w_{l+1})$ 抽象的人間労働の支出 1 単位の対価として労働者に支払われる賃金額、スカラー

「全ての種類の労働の貨幣賃金率 (= 労働の支出 1 単位の対価として労働者に支払われる賃金額) は換算率に比例する」のであれば、すなわち「 $\mathbf{W}_2 = \mathbf{h}_3 \mathbf{w}$ 」であれば、下記の式が成立する。

$$\mathbf{B}_2 \mathbf{p} = \mathbf{h}_3 \mathbf{w}$$

($\leftarrow \mathbf{W}_2 = \mathbf{h}_3 \mathbf{w}$ 、 $\mathbf{B}_2 \mathbf{p} = \mathbf{W}_2$ 、より、「 $\mathbf{B}_2 \mathbf{p} = \mathbf{h}_3 \mathbf{w}$ 」)

$$\mathbf{h}_3 \text{ (換算率ベクトル)} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_l \\ 1 \end{pmatrix} = \{(\mathbf{B}_2 \mathbf{t}) / (\mathbf{R} \mathbf{t})\} > 0$$

ベクトル $\mathbf{h}_3$ は h_f (第 f 番目の労働の換算率の数値、ただし $h_{l+1} = 1$) を要素とする $1+1$ 次元の縦ベクトル。

Fundamental Marxian Theorem の異種労働が存在する場合の数理的証明とその再検討

まず、価値方程式は次のように示すことができる⁷⁾。

$$\mathbf{t} = \mathbf{A}\mathbf{t} + \mathbf{L}_2\mathbf{h}_3$$

$$\rightarrow (\mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{t} = \mathbf{L}_2\mathbf{h}_3$$

ここで

$$\mathbf{L}_2\mathbf{h}_3 = \{(\mathbf{L}_2\mathbf{B}_2\mathbf{t})/(\mathbf{R}\mathbf{t})\}, \text{であるから}$$

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{t} = \{(\mathbf{L}_2\mathbf{B}_2\mathbf{t})/(\mathbf{R}\mathbf{t})\}, \text{となる。}$$

$(\mathbf{R}\mathbf{t})$ はスカラーとなるからこの式は成り立つ。そして未知数の数はベクトル $\mathbf{t}$ の要素数の n 個で、方程式の数は n 本であるから、ベクトル $\mathbf{t}$ の要素の数値は全て算出されることになる。そしてベクトル $\mathbf{t}$ の要素の数値が全て算出されれば、「 $\mathbf{h}_3 = (\mathbf{B}_2\mathbf{t})/(\mathbf{R}\mathbf{t})$ 」であるから、ベクトル $\mathbf{h}_3$ の要素の数値も全て算出されることになる。

以上を前提にして改めて価値方程式についてみてみよう。

$$\mathbf{t} = \mathbf{A}\mathbf{t} + \mathbf{L}_2\mathbf{h}_3$$

$$\rightarrow (\mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{t} = \mathbf{L}_2\mathbf{h}_3$$

さて、行列 $\mathbf{C}$ が、 $\mathbf{C} \geq 0$ のとき、「行列 $(\mathbf{E} - \mathbf{C})$ がホーキングス・サイモン条件を充たす (=「 $(\mathbf{E} - \mathbf{C})$ の首座小行列式が全て正である」)」ということは、「 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ がベクトルの時、いかなる $\mathbf{b} \geq 0$ をとっても、ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が縦ベクトルなら、『 $(\mathbf{E} - \mathbf{C}) \mathbf{a} = \mathbf{b}$ 』、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が横ベクトルなら、『 $\mathbf{a} (\mathbf{E} - \mathbf{C}) = \mathbf{b}$ 』、となる $\mathbf{a} \geq 0$ が存在する」「 $(\mathbf{E} - \mathbf{C})^{-1} \geq 0$ が存在する」のいずれとも同値である（例えば松尾 (2021) pp207～208 参照）。それゆえ「 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ がベクトルで $\mathbf{C}$ が $\mathbf{C} \geq 0$ の行列の時、いかなる $\mathbf{b} \geq 0$ をとっても $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が縦ベクトルなら、『 $(\mathbf{E} - \mathbf{C}) \mathbf{a} = \mathbf{b}$ 』、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が横ベクトルなら、『 $\mathbf{a} (\mathbf{E} - \mathbf{C}) = \mathbf{b}$ 』、となる $\mathbf{a} \geq 0$ が存在するならば、 $(\mathbf{E} - \mathbf{C})$ はホー

7) ここからの数理的証明に関する記述は、「マルクスの基本定理の最も一般的な証明」(置塩 (1977) p133) と述べられている置塩 (1977) p132 で示されている数理的証明をベースにして、「それを異種労働の存在を考慮した場合に応用したらこうなのではないか」と考え提示した筆者の試案である。

キンス条件を充たし、その $(\mathbf{E}-\mathbf{C})$ には $(\mathbf{E}-\mathbf{C})^{-1} \geq 0$ 、が存在する」ということもできる。

この点を念頭に置いて先に提示した価値方程式を考察すれば、
「 $\mathbf{A} \geq 0$ 、 $\mathbf{L}_2 \mathbf{h}_3$ は縦ベクトルで直接投入される労働の単位数が0の財は存在しないから $\mathbf{L}_2 \mathbf{h}_3 > 0$ 、そして $(\mathbf{E}-\mathbf{A}) \mathbf{t} = \mathbf{L}_2 \mathbf{h}_3$ となる $\mathbf{t} > 0$ が存在する」わけだから、
今述べたことから「 $(\mathbf{E}-\mathbf{A})$ はホーキンス・サイモン条件を充たし、 $(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} \geq 0$ が存在する」とし得る。

次に、「全部門で利潤が発生していることを示す式」は次のようになる。

$$\mathbf{p} > \mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{L}_2 \mathbf{W}_2$$

(先の仮定より、 $\mathbf{W}_2 = \mathbf{h}_3 \mathbf{w}$ 、であるから)

$$\rightarrow \mathbf{p} > \mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{L}_2 \mathbf{h}_3 \mathbf{w}$$

$$\rightarrow (\mathbf{E}-\mathbf{A}) \mathbf{p}/\mathbf{w} > \mathbf{L}_2 \mathbf{h}_3$$

(先に示した「 $\mathbf{L}_2 \mathbf{h}_3 = (\mathbf{E}-\mathbf{A}) \mathbf{t}$ 」より)

$$\rightarrow (\mathbf{E}-\mathbf{A}) \mathbf{p}/\mathbf{w} > (\mathbf{E}-\mathbf{A}) \mathbf{t}$$

「 $(\mathbf{E}-\mathbf{A})$ には $(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} \geq 0$ 、が存在する」「 $\mathbf{p}/\mathbf{w} > 0$ 、 $\mathbf{t} > 0$ である」ためこの式は次のように展開できることとなる。

$$(\mathbf{E}-\mathbf{A}) \mathbf{p}/\mathbf{w} > (\mathbf{E}-\mathbf{A}) \mathbf{t}$$

$$\rightarrow (\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} (\mathbf{E}-\mathbf{A}) \mathbf{p}/\mathbf{w} > (\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} (\mathbf{E}-\mathbf{A}) \mathbf{t}$$

$$\rightarrow \mathbf{E} \cdot \mathbf{p}/\mathbf{w} > \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}$$

$$\rightarrow \mathbf{p}/\mathbf{w} > \mathbf{t}$$

この式の両辺に左から行列 $\mathbf{B}_2$ を掛ける (なお「 $\mathbf{p}/\mathbf{w} > 0$ 、 $\mathbf{t} > 0$ 」「 $\mathbf{B}_2 \geq 0$ で、かつ $\mathbf{B}_2$ は先に述べた理由から、各行に1つ以上は正の要素を有する」ため、「 $\mathbf{p}/\mathbf{w} > \mathbf{t}$ 」の両辺に左から行列 $\mathbf{B}_2$ をかけてもこの式の不等号の向きは変わらない)。

$$\mathbf{B}_2 \mathbf{p}/\mathbf{w} = (\mathbf{h}_3 \mathbf{w})/\mathbf{w} = \mathbf{h}_3 > \mathbf{B}_2 \mathbf{t}$$

$$\rightarrow \mathbf{h}_3 - \mathbf{B}_2 \mathbf{t} > 0$$

この式は「全ての種類の労働において剰余労働が存在していること」を示している⁸⁾。

よって筆者の試案においても、「『全部門で利潤発生していることを示す式』を展開させていけば『剰余労働が存在することを示す式』となる」といえる。

5、数理的証明の再検討

(1)「換算率算出数式」についての再検討

異種労働の存在を考慮した数理的証明に関してはここまで述べてきた次第であると思われるが、まず数理的証明のポイントとなるそれぞれの「換算率算出数式」について検討してみよう。

最初に森嶋（1974）p226 で示されている換算率算出数式をみることにする。森嶋（1974）p226 での換算率算出数式は以下のようなものであった。

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{H}_1 \mathbf{t} + (\mathbf{T}_1 \mathbf{h}_1 + \mathbf{M})$$

「 $\mathbf{H}_1 \mathbf{t}$ 」は、「それぞれの種類の労働の支出 1 単位分の職業能力開発に必要な、各財の生産のために投入される抽象的人間労働の単位数」の数値を、「 $\mathbf{T}_1 \mathbf{h}_1 + \mathbf{M}$ 」は、「それぞれの種類の労働の支出 1 単位分の職業能力開発のために、直接投入される抽象的人間労働の単位数」の数値を、それぞれ要素する 1 次元の縦ベクトルである。そして「 $\mathbf{H}_1 \mathbf{t}$ 」の「それぞれの種類の労働の支出 1 単位分の職業能力開発に必要な、各財の生産のために投入される抽象的人間労働の単位数」とは「それぞれの種類の労働の支出 1 単位分の職業能力開発に、間接的に投入される抽象的人間労働の単位数」のことである。

よって森嶋（1974）p226 による換算率算出数式を言葉で表現すれば下記のようになる。

「換算率 = それぞれの種類の労働の支出 1 単位分の職業能力開発のために直接間接に投入される抽象的人間労働の単位数」

8) この式の含意については 5 (2) で改めて詳しく述べることにする。

次に置塩（1977）pp180～181、置塩（1978）pp22～24 で示されている換算率算出数式をみてみよう。そこでは換算率算出数式は以下のような次第であった。

$$\mathbf{J} = \mathbf{A} + \mathbf{H}_2 \mathbf{t} + \mathbf{T}_2 \mathbf{h}_2$$

$$\left(\begin{array}{c} \Lambda_1 \cdot h_1 \\ \Lambda_2 \cdot h_2 \\ \cdot \cdot \cdot \\ \Lambda_i \cdot h_i \\ \Lambda_{i+1} \cdot 1 \end{array} \right) > 0$$

で、未知数は、各換算率の数値である、 h_1 、 h_2 、 $\dots$ h_i の部分（ $h_{i+1} = 1$ ）、である）

「 $\mathbf{J}$ 」は「それぞれの種類の労働を行う標準的労働者1人のその全活動期間中の当該労働の支出単位数は、抽象的人間労働の支出何単位分に相当するか」の数値を、 $\mathbf{A}$ は「それぞれの種類の労働を行う標準的労働者1人が、その全活動期間中に支出する当該労働の単位数」の数値を、「 $\mathbf{H}_2 \mathbf{t}$ 」は「それぞれの種類の労働を行う標準的労働者1人がその全活動期間中に支出する、当該労働の単位数分を職業能力開発するのに必要な、各財の生産のために投入される抽象的人間労働の単位数」の数値を、「 $\mathbf{T}_2 \mathbf{h}_2$ 」は「それぞれの種類の労働を行う標準的労働者1人がその全活動期間中に支出する、当該労働の単位数分を職業能力開発するために、直接投入される抽象的人間労働の単位数」の数値を、それぞれ要素とする $1+1$ 次元の縦ベクトルである。

よって「 $\mathbf{J}$ 、 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{H}_2 \mathbf{t}$ 、 $\mathbf{T}_2 \mathbf{h}_2$ 」の内容は、別言すれば次のようになろう。

$\mathbf{J}$ = 「(それぞれの種類の労働を行う標準的労働者1人が、その全活動期間中に支出する当該労働の単位数) × (当該労働の換算率)」

$\mathbf{A}$ = 「それぞれの種類の労働を行う標準的労働者1人が、その全活動期間中に支出する当該労働の単位数」

$\mathbf{H}_2 \mathbf{t}$ = 「(それぞれの種類の労働を行う標準的労働者1人が、その全活動期間中に支出する当該労働の単位数) × (当該労働の支出1単位分の職業能力開発に

必要な、各財の生産のために投入される抽象的人間労働の単位数)」

$\mathbf{T}_2\mathbf{h}_2$ = 「(それぞれの種類の労働を行う標準的労働者 1 人が、その全活動期間中に支出する当該労働の単位数) × (当該労働の支出 1 単位分の職業能力開発のために、直接投入される抽象的人間労働の単位数)」

それゆえ次のように表現できよう。

$$\mathbf{I} = \mathbf{A} + \mathbf{H}_2\mathbf{t} + \mathbf{T}_2\mathbf{h}_2$$

→ 「(それぞれの種類の労働を行う標準的労働者 1 人が、その全活動期間中に支出する当該労働の単位数) × (当該労働の換算率)」 = 「それぞれの種類の労働を行う標準的労働者 1 人が、その全活動期間中に支出する当該労働の単位数」 + 「(それぞれの種類の労働を行う標準的労働者 1 人が、その全活動期間中に支出する当該労働の単位数) × (当該労働の支出 1 単位分の職業能力開発に必要な、各財の生産のために投入される抽象的人間労働の単位数)」 + 「(それぞれの種類の労働を行う標準的労働者 1 人が、その全活動期間中に支出する当該労働の単位数) × (当該労働の支出 1 単位分の職業能力開発のために、直接投入される抽象的人間労働の単位数)」

(この右辺と左辺をともに、「それぞれの種類の労働を行う標準的労働者 1 人が、その全活動期間中に支出する当該労働の単位数」で割る。)

→ 「それぞれの種類の労働の換算率」 = $1 +$ 「それぞれの種類の労働の支出 1 単位分の職業能力開発に必要な、各財の生産のために投入される抽象的人間労働の単位数」 + 「それぞれの種類の労働の支出 1 単位分の職業能力開発のために、直接投入される抽象的人間労働の単位数」

ここで以下のように置く。

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} > 0$$

ベクトル $\mathbf{I}$ は、全ての要素が「1」の $1+1$ 次元の縦ベクトル。

$$\mathbf{H}_3 = \begin{pmatrix} \mathfrak{S}_{11} & \mathfrak{S}_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathfrak{S}_{1n} \\ \mathfrak{S}_{21} & \mathfrak{S}_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathfrak{S}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{S}_{l1} & \mathfrak{S}_{l2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathfrak{S}_{ln} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

行列 $\mathbf{H}_3$ は、 $\mathfrak{S}_{fi}$ （第 f 番目の労働の支出 1 単位分の職業能力開発のために必要な第 i 財の単位数）を要素とする $1+1$ 行 n 列の行列、ただし「 $1+1$ 番目の労働」には職業能力開発は不要のため、「 $\mathfrak{S}_{l+li}$ 」の要素、すなわち行列 $\mathbf{H}_3$ の $1+1$ 行目の要素は全て 0 である。

$$\mathbf{T}_3 = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & m_{1l} & m_{1l+1} \\ m_{21} & m_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & m_{2l} & m_{2l+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{l1} & m_{l2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & m_{ll} & m_{ll+1} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

行列 $\mathbf{T}_3$ は、 m_{fg} （第 f 番目の労働の支出 1 単位分の職業能力開発のために直接投入される第 g 番目の労働の単位数）を要素とする、 $1+1$ 行 $1+1$ 列の行列、ただし「 $1+1$ 番目の労働」には職業能力開発は不要のため、「 m_{l+lg} 」の要素、すなわち行列 $\mathbf{T}_3$ の $1+1$ 行目の要素は全て 0 である。

その場合

$$[\mathbf{J} = \mathbf{A} + \mathbf{H}_2 \mathbf{t} + \mathbf{T}_3 \mathbf{h}_2]$$

の式は、ここまで述べたことより

$$[\mathbf{h}_2 = \mathbf{I} + \mathbf{H}_3 \mathbf{t} + \mathbf{T}_3 \mathbf{h}_2]$$

という式に展開できることになる⁹⁾。

「 $\mathbf{H}_3 \mathbf{t}$ 」は、「それぞれの種類の労働の支出 1 単位分の職業能力開発に必要な、

9) こうした展開は中谷 (1994) pp98～100 でもなされている。中谷 (1994) pp98～100 とは結論に至る過程には若干の違いはあるが、内容的にはここで述べていることと同じと思われる。

Fundamental Marxian Theorem の異種労働が存在する場合の数理的証明とその再検討

各財の生産のために投入される抽象的人間労働の単位数」、すなわち「それぞれの種類の労働の支出 1 単位分の職業能力開発のために、間接的に投入される抽象的人間労働の単位数」のことである。そして「 T_3h_2 」は、「それぞれの種類の労働の支出 1 単位分の職業能力開発のために、直接投入される抽象的人間労働の単位数」を示す。

それゆえ

$$h_2 = I + H_3t + T_3h_2$$

という式に展開される置塩 (1977) pp180~181、置塩 (1978) pp22~24 での換算率算出数式を言葉で表現すれば、次のようになろう。

「換算率 = 1 + (それぞれの種類の労働の支出 1 単位分の職業能力開発のために直接間接に投入される抽象的人間労働の単位数)」

このように整理すると、森嶋 (1974) p226 と置塩 (1977) pp180~181、置塩 (1978) pp22~24 との換算率算出数式は異なることがわかるが、森嶋 (1974) p226 で示されている換算率算出数式と価値方程式の間には矛盾が存在しているといえる。

「抽象的人間労働」とは、「平均的に、普通の人間ならだれでも、特殊な発達なしに、その肉体のうちにもっている単純な労働力の支出」(Marx (1867) p59) である。それゆえ森嶋 (1974) p226 の換算率算出数式が先に示したように

「換算率 = それぞれの種類の労働の支出 1 単位分の職業能力開発のために直接間接に投入される抽象的人間労働の単位数」

であれば、「抽象的人間労働」については上の式では右辺は 0、よって「抽象的人間労働」それ自体の換算率は 0 ということになる。

しかし森嶋 (1974) p226 では価値方程式は次のように示されている。

$$t = At + (L_1h_1 + \ell)$$

それぞれの財の生産に直接投入される抽象的人間労働の単位数はベクトル ℓ の要素の数値であり、それゆえ「ある財を生産するために直接投入される抽象的人間労働それ自体の単位数＝その財を生産するために直接投入される抽象的人間労働の単位数」として、つまり「抽象的人間労働の支出1単位＝抽象的人間労働の支出1単位分」としてカウントされており、結局森嶋（1994）p226の価値方程式では「抽象的人間労働の換算率は1」として扱われている。

森嶋（1974）p226で示されている価値方程式と換算率算出数式の間にはこうした矛盾が含まれているが、「各財の生産のためには、抽象的人間労働それ自体も直接投入される必要があり得る」わけであるから、換算率算出数式も本来、森嶋（1974）p226の価値方程式でのように、「抽象的人間労働の換算率は1」となるような換算率算出数式でなければならないはずである。その意味で森嶋（1974）p226での価値方程式と換算率算出数式の間には矛盾が存在するとともに、その換算率算出数式についても、それにより算出される換算率の数値は全て1ポイントずつ小さくなってしまっている、という誤りが含まれていると筆者は考える。

それに対して置塩（1977）pp180～181、置塩（1978）pp22～24で提示されている換算率算出数式を展開した式である、

$$h_2 = I + H_3 t + T_3 h_2$$

では、「1+1番目の労働」である「抽象的人間労働」は、ベクトル I は要素が全て1の1+1次元の縦ベクトル、行列 H_3 、 T_3 とも「1+1行目」の要素は全て0であるから、「『1+1番目の労働』である抽象的人間労働」の「換算率は1」ということになる。

それゆえ森嶋（1974）p226と置塩（1977）pp180～181、置塩（1978）pp22～24の換算率算出数式を比較すれば、置塩（1977）pp180～181、置塩（1978）pp22～24の方が合理的であると思われる。

ではその置塩（1977）pp180～181、置塩（1978）pp22～24等で示される換算率算出数式それ自体についてはどうであろうか。

「抽象的人間労働」自体は先に引用したように「平均的に、普通の人間なら

だれでも、特殊な発達なしに、その肉体のうちにもっている単純な労働力の支出」(Marx (1867) p59)であるから、「それぞれの種類の労働の支出 1 単位」は、「抽象的人間労働の支出 1 単位分に、その労働の支出 1 単位分の職業能力開発に直接間接に投入された抽象的人間労働の単位数分が付加された価値を作り出す」、と考えられるであろう¹⁰⁾。

このように認識し、かつ「価値を形成する実体は抽象的人間労働であり、商品の価値とはその抽象的人間労働の凝固物」ということから、「それぞれの労働の支出 1 単位は、『基準となる労働』である『抽象的人間労働』の支出何単位数分に相当するか、を示す数値」である「換算率」は、

「換算率 = $1 + (\text{それぞれの種類の労働の支出 1 単位分の職業能力開発のために直接間接に投入される抽象的人間労働の単位数})$ 」

となる。そしてこれはまさに先に示した置塩 (1977) pp180~181、置塩 (1978) pp22~24 での換算率算出数式を展開させた式を、言葉で示した内容と同じである。

それゆえ換算率算出数式はこの内容を式にした

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{I} + \mathbf{H}_3\mathbf{t} + \mathbf{T}_3\mathbf{h}_2$$

こそが最も正当性を有する、と筆者は考える。

では田中 (2015) に基づきそれを展開させた筆者の換算率算出数式の試案、 $\{\mathbf{h}_3 = \{(\mathbf{B}_2\mathbf{t})/(\mathbf{Rt})\}\}$ はどうであろうか。

この換算率ベクトル $\mathbf{h}_3$ が、置塩 (1977) pp180~181、置塩 (1978) pp22~24 などで示され正当性を有していると考えられる $\mathbf{h}_2$ と同じ要素を有することになるなら、次の式が成り立つはずである。

$$\{(\mathbf{B}_2\mathbf{t})/(\mathbf{Rt})\} = \mathbf{I} + \mathbf{H}_3\mathbf{t} + \mathbf{T}_3\mathbf{h}_2$$

10) いわゆる「換算問題」に関してこうした解釈は、Hilferding (1904)、荒又 (1972) などで提唱され現在においても通説となっている。

$$\rightarrow B_2t = Rt (I + H_3t + T_3h_2)$$

$$\rightarrow B_2t = Rt \cdot h_2$$

この式が成り立つのは、「どのような種類の労働であれ、その労働の支出1単位の対価として支払われる賃金額で労働者が購入する各財の価値の総計は換算率と比例する」という場合である。具体的には、「例えば換算率1の労働を行う労働者が、その労働の支出1単位の対価として支払われる賃金額で購入する各財の価値の総計が0.8単位であれば、換算率2の労働を行う労働者は、その労働の支出1単位の対価として支払われる賃金額で購入する各財の価値の総計は1.6単位、換算率9の労働を行う労働者は、その労働の支出1単位の対価として支払われる賃金額で購入する各財の価値の総計は7.2単位となる」という場合である。それぞれの種類の労働を行う労働者の消費行動として、こうしたことは想定できるだろうか。

労働者の消費行動は「その労働の難易度」のみによって規定されるとは考えられないため、この想定は採用できないとせざるをえないであろう¹¹⁾。それゆえ筆者の換算率算出数式試案は残念ながら有効性を有しないと認めざるをえない。

ちなみに「二財二種労働モデル」で田中(2015)、およびそれを展開した筆者の試案で「マルクスの基本定理」が証明できたのは、「二財二種労働モデル」では「消費財の種類は1種類、それゆえ労働者が賃金で購入するのは常にその1種類の消費財であり、その1種類の消費財の購入単位数も常に賃金額に比例する」と想定しえたからである。そのため田中(2015)、およびそれを展開した筆者の試案の「多部門多種労働モデル」への適用応用は不可能であったと思われる。

以上の分析検討より換算率算出数式については、「 $h_2 = I + H_3t + T_3h_2$ 」が、各

11) この想定が成り立ちうるのは、「価格が価値に正確に比例」しており、かつ「全ての種類の労働の貨幣賃金率は換算率に比例する」ときであるが、特に後者に関してはそのような把握できないことは後述。

換算率算出方法に関しては、その換算率算出数式と価値方程式「 $\mathbf{t} = \mathbf{A}\mathbf{t} + \mathbf{L}_2\mathbf{h}_2$ 」との連立方程式を解いて換算率ベクトル $\mathbf{h}_2$ の要素の数値を算出し各種労働の換算率の数値を確定する、という置塩 (1977) pp180～181、置塩 (1978) pp22～24 で示された方法が、現時点でも最も正当性かつ有効性を有する方法であると結論づけられるであろう。

(2)「剰余労働の存在」に関する数理的証明の結果の再検討

次に、「剰余労働の存在」という「マルクスの基本定理」の中心をなす部分の数理的証明の結果について考察してみよう。

2 (2)、3 (2)、4 (2) のいずれにおいても、異種労働の存在を考慮しても、「全ての部門で利潤が発生することを示す式」を展開させていくと、「剰余労働が存在していることを示す式」が導出された¹²⁾。

ただし 4 (2) の証明が、労働の支出 1 単位の対価として労働者に支払われる賃金額、すなわち貨幣賃金率に関して、「全ての種類の労働の貨幣賃金率は換算率に比例する」ということまでを前提として置いての証明であるのに対し、2 (2)、3 (2) の証明は、貨幣賃金率に関してこうした点までを前提としては置いていない。そして貨幣賃金率に関してこうした点までを前提として置くか、それともそうした前提までは置かず、貨幣賃金率に関して前提とするのは、「どの種類の労働であれ、同じ種類の労働の貨幣賃金率は全て同一とする」までとしているかで、「剰余労働の存在」に関する数理的証明の結果は異なるものとなっている。以下この点について詳しくみてみよう。

まず貨幣賃金率に関して「全ての種類の労働の貨幣賃金率は換算率に比例する」、ということまでを前提として置いている 4 (2) の証明結果からみてみよう。

そこでは前述のように、「全ての部門で利潤が発生していることを示す式」から以下の式が展開された。

12) 2 (2) では厳密には導出されたのは、『 e (剰余価値率) >0 』であるが、それは「剰余労働が存在している」ことを意味している。

$$h_3 - B_2t > 0$$

この式が意味していることは「どの種類の労働についても、それぞれの種類の労働を行う労働者がその労働の支出1単位の対価として支払われる賃金額で購入する、全ての財の生産に直接間接に投入された抽象的人間労働の単位数は、その種類の労働の支出1単位分に相当する抽象的人間労働の支出単位数分より小さい」ということである。つまりこの式は「全ての種類の労働について剰余労働が存在している」ということを意味しているわけである。

ちなみに中谷（1994）・森嶋（1974）に関する数理的証明についても、貨幣賃金率に関して「全ての種類の労働の貨幣賃金率は換算率に比例する」との前提までをおけば、「全ての部門で利潤が発生することを示す式」を展開していくと、いずれも以下のように、「全ての種類の労働について剰余労働が存在していることを示す式」となる。

中谷（1994）の数理的証明で、貨幣賃金率に関して、「全ての種類の労働の貨幣賃金率は換算率に比例する」との前提までを置いた場合に展開される式

$$h_2 - B_2t > 0$$

←【4（2）の証明展開式の h_3 の部分を h_2 に入れ替えればこの式となる、この式が「全ての種類の労働について剰余労働が存在していることを示す式」であることは前述のとおり】

森嶋（1974）5章の数理的証明に基づく筆者の試案で、貨幣賃金率に関して、「全ての種類の労働の貨幣賃金率は換算率に比例する」との前提までを置いた場合に展開される式

$$L_1 (h_1 - B_1t) + \ell (1 - Rt) > 0$$

←【各行列、ベクトルは、2、と同じとする。

「全ての種類の労働の貨幣賃金率は換算率に比例する」ということから、以下の式が成り立つことになる。

$$W_1 = h_1w$$

そして

「 $\mathbf{W}_1 = \mathbf{B}_1 \mathbf{p}$ 、 $\mathbf{W}_1 = \mathbf{h}_1 \mathbf{w}$ 」より

$$\mathbf{L}_1 \mathbf{B}_1 \mathbf{p} = \mathbf{L}_1 \mathbf{h}_1 \mathbf{w}$$

また

「 $\mathbf{w} = \mathbf{R} \mathbf{p}$ 」より

$$\ell \mathbf{R} \mathbf{p} = \ell \mathbf{w}$$

価値方程式

$$\mathbf{t} = \mathbf{A} \mathbf{t} + (\mathbf{L}_1 \mathbf{h}_1 + \ell)$$

$$\rightarrow (\mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{t} = \mathbf{L}_1 \mathbf{h}_1 + \ell$$

先に述べたように、行列 $\mathbf{C}$ が、 $\mathbf{C} \geq 0$ のとき、「行列 $(\mathbf{E} - \mathbf{C})$ がホーキンス・サイモン条件を満たす (=「 $(\mathbf{E} - \mathbf{C})$ の首座小行列式が全て正である」)」ということとは、「 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ がベクトルの時、いかなる $\mathbf{b} \geq 0$ をとっても、ベクトル $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ が縦ベクトルなら、『 $(\mathbf{E} - \mathbf{C}) \mathbf{a} = \mathbf{b}$ 』、 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ が横ベクトルなら、『 $\mathbf{a} (\mathbf{E} - \mathbf{C}) = \mathbf{b}$ 』、となる $\mathbf{a} \geq 0$ が存在する」「 $(\mathbf{E} - \mathbf{C})^{-1} \geq 0$ が存在する」のいずれとも同値である (例えば松尾 (2021) pp207~208 参照)。それゆえ「 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ がベクトルで $\mathbf{C}$ が $\mathbf{C} \geq 0$ の行列の時、いかなる $\mathbf{b} \geq 0$ をとっても $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ が縦ベクトルなら、『 $(\mathbf{E} - \mathbf{C}) \mathbf{a} = \mathbf{b}$ 』、 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ が横ベクトルなら、『 $\mathbf{a} (\mathbf{E} - \mathbf{C}) = \mathbf{b}$ 』、となる $\mathbf{a} \geq 0$ が存在するならば、 $(\mathbf{E} - \mathbf{C})$ はホーキンス条件を満たし、その $(\mathbf{E} - \mathbf{C})$ には $(\mathbf{E} - \mathbf{C})^{-1} \geq 0$ 、が存在する」ということもできる。

この点を念頭において、

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{t} = \mathbf{L}_1 \mathbf{h}_1 + \ell$$

の式を考察すると、

「 $\mathbf{A} \geq 0$ 、で、 $(\mathbf{L}_1 \mathbf{h}_1 + \ell) > 0$ 、そして『 $(\mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{t} = \mathbf{L}_1 \mathbf{h}_1 + \ell$ 』となる $\mathbf{t} > 0$ が存在する」であるから、「 $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ はホーキンス・サイモン条件を満たし、 $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \geq 0$ が存在する」といえる。

さて「全部門で利潤が発生していることを示す式」は下記のようになる。

$$\mathbf{p} > \mathbf{A} \mathbf{p} + \mathbf{L}_1 \mathbf{W}_1 + \ell \mathbf{w}$$

$$\rightarrow \mathbf{p} > \mathbf{A} \mathbf{p} + \mathbf{L}_1 \mathbf{h}_1 \mathbf{w} + \ell \mathbf{w}$$

$$\rightarrow (\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{p}/w > \mathbf{L}_1 \mathbf{h}_1 + \boldsymbol{\ell}$$

$$\rightarrow (\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{p}/w > (\mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{t}$$

「 $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ には、 $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \geq 0$ 、が存在する」「 $\mathbf{p}/w > 0$ 、 $\mathbf{t} > 0$ である」ため、以下の展開が可能となる。

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{p}/w > (\mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{t}$$

$$\rightarrow (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{p}/w > (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{t}$$

$$\rightarrow \mathbf{E} \cdot \mathbf{p}/w > \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}$$

$$\rightarrow \mathbf{p}/w > \mathbf{t}$$

この式の両辺に左から行列 $(\mathbf{L}_1 \mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\ell} \mathbf{R})$ を掛ける（「 $(\mathbf{L}_1 \mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\ell} \mathbf{R}) \geq 0$ で、行列 $(\mathbf{L}_1 \mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\ell} \mathbf{R})$ は各行に1つ以上は正の要素を有する」、そして「 $\mathbf{p}/w > 0$ 、 $\mathbf{t} > 0$ である」のため、「 $\mathbf{p}/w > \mathbf{t}$ 」の両辺に左から行列 $(\mathbf{L}_1 \mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\ell} \mathbf{R})$ を掛けてもこの式の不等号の向きは変わらない）。

$$(\mathbf{L}_1 \mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\ell} \mathbf{R}) \mathbf{p}/w > (\mathbf{L}_1 \mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\ell} \mathbf{R}) \mathbf{t}$$

（「 $\mathbf{L}_1 \mathbf{B}_1 \mathbf{p} = \mathbf{L}_1 \mathbf{h}_1 w$ 」、 $\boldsymbol{\ell} \mathbf{R} \mathbf{p} = \boldsymbol{\ell} w$ 」、であるから）

$$\mathbf{L}_1 \mathbf{h}_1 + \boldsymbol{\ell} > (\mathbf{L}_1 \mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\ell} \mathbf{R}) \mathbf{t}$$

$$\rightarrow \mathbf{L}_1 (\mathbf{h}_1 - \mathbf{B}_1 \mathbf{t}) + \boldsymbol{\ell} (1 - \mathbf{R} \mathbf{t}) > 0$$

$\mathbf{L}_1 \geq 0$ 、 $\boldsymbol{\ell} \geq 0$ で、 n 種類のどの財の生産にも第1番目の労働から第1+1番目の労働のうち、どれか1種類以上の労働は必ず直接投入されるわけだから、つまり行列 $\mathbf{L}_1$ の中でその要素が全て0の行についてはベクトル $\boldsymbol{\ell}$ のそれに対応する行の要素は必ず正、ベクトル $\boldsymbol{\ell}$ の中でその要素が0の行については行列 $\mathbf{L}_1$ のそれに対応する行には必ず1つ以上は正の要素が存在する、わけだから、「 $\mathbf{L}_1 (\mathbf{h}_1 - \mathbf{B}_1 \mathbf{t}) + \boldsymbol{\ell} (1 - \mathbf{R} \mathbf{t}) > 0$ 」の式は、「 $(\mathbf{h}_1 - \mathbf{B}_1 \mathbf{t}) > 0$ 、かつ、 $(1 - \mathbf{R} \mathbf{t}) > 0$ 、である」ということを示している。それゆえ「 $\mathbf{L}_1 (\mathbf{h}_1 - \mathbf{B}_1 \mathbf{t}) + \boldsymbol{\ell} (1 - \mathbf{R} \mathbf{t}) > 0$ 」の式は「全ての種類の労働について剰余労働が存在していることを示す式」となる。」

よって貨幣賃金率に関して「全ての種類の労働の貨幣賃金率は換算率に比例する」ということまでを前提としておけば、「全ての部門で利潤が発生するためには、全ての種類の労働において剰余労働が存在しなければならない」とい

うことになる¹³⁾

次に、貨幣賃金率に関して「全ての種類の労働の貨幣賃金率は換算率に比例する」という前提までは置かず、貨幣賃金率に関し前提するのは、「どの種類の労働であれ、同じ種類の労働の貨幣賃金率は全て同一とする」までとしている場合についてみてみよう。

まず 2 (2) の数理的証明の結果から考察しよう。

2 (2) では、「全部門で利潤が発生していることを示す式」を展開させると「 e (剰余価値率) > 0 」が導出された。

$$e = [x \{ (L_1 h_1 + \ell) - (L_1 B_1 + \ell R) t \}] / [x (L_1 B_1 + \ell R) t]$$

であり、

「 $x (L_1 B_1 + \ell R) t$ は正のスカラー」であるから、

$e > 0$ であるためには

$x \{ (L_1 h_1 + \ell) - (L_1 B_1 + \ell R) t \} > 0$ (なお、 $x \{ (L_1 h_1 + \ell) - (L_1 B_1 + \ell R) t \}$ はスカラー)

でなければならないことになる。

このことは「全部門で利潤が発生するためには剰余労働が存在しなければならない」ことを意味してはいる。

ただこの式は次のように展開できる。

$$x \{ (L_1 h_1 + \ell) - (L_1 B_1 + \ell R) t \} = x L_1 (h_1 - B_1 t) + x \ell (1 - R t) > 0$$

$x L_1$ は $x L_1 \geq 0$ の 1 次元の横ベクトル、 $x \ell$ は $x \ell > 0$ のスカラーである。そのため『 $(h_1 - B_1 t) = 0$ 、であっても、 $(1 - R t) > 0$ 』であれば、又『 $(1 - R t) = 0$ 、であっても、 n 種類の財の生産に直接投入される第 1 番目の労働から第 1 番目までの労働のうち、1 種類以上の労働で剰余労働が存在している』のであれば、

13) ここで示したように「全ての種類の労働の貨幣賃金率は換算率に比例する」のであれば、「全部門で利潤が発生するためには全ての種類の労働において剰余労働がなされなければならない」となる。また後述するように「全ての種類の労働の貨幣賃金率は換算率に比例する」からといって「どの種類の労働を行う労働者の賃金バスケットの構成も同一」であるとは限らない。その意味で中谷 (1994) p102 の記述と、筆者のここでの内容は若干ニュアンスが異なっていると思われる。

『 $\mathbf{xL}_1 (\mathbf{h}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{t}) + \mathbf{x}\ell (1 - \mathbf{R}\mathbf{t}) > 0$ 』が成立する」ということになる。つまり「どれか1種類以上の労働において剰余労働が存在していれば、『 $\mathbf{x} \{(\mathbf{L}_1\mathbf{h}_1 + \ell) - (\mathbf{L}_1\mathbf{B}_1 + \ell\mathbf{R}) \mathbf{t}\} > 0$ 』は成り立つ」わけである。

それゆえ2(2)での数理的証明からは「全部門で利潤が発生するためには剰余労働が存在しなければならないが、全ての種類の労働において剰余労働が存在しなければならないというわけでは必ずしもなく、明確にいえるのは1種類以上の労働において剰余労働が存在しなければならないということである」となる。

次に3(2)の数理的証明結果について考察しよう。

ここでは「全部門で利潤が発生していることを示す式」から

$$\mathbf{xL}_2\mathbf{h}_2 - \mathbf{xL}_2\mathbf{B}_2\mathbf{t} > 0$$

の式が展開された(先に述べたように、「ここでのベクトル $\mathbf{x} > 0$ 」は「 $\mathbf{x} (\mathbf{E} - \mathbf{A} - \mathbf{L}_2\mathbf{B}_2) > 0$ 」を成り立たせる $\mathbf{x} > 0$ 」でなければならない)。

この式も「剰余労働が存在している」ことを意味してはいる。よって「全部門で利潤が発生するためには剰余労働が存在しなければならない」ということ自体は、ここでも数理的に証明されていることになる。

しかしこの式を展開すると次のようになる。

$$\mathbf{xL}_2\mathbf{h}_2 - \mathbf{xL}_2\mathbf{B}_2\mathbf{t} > 0$$

$$\rightarrow \mathbf{xL}_2 (\mathbf{h}_2 - \mathbf{B}_2\mathbf{t}) > 0$$

先に述べた理由により、行列 $\mathbf{L}_2$ は $\mathbf{L}_2 \geq 0$ で、各行各列に1つ以上は正の要素を有している。そのため

$$\mathbf{xL}_2 > 0 \text{ (「}\mathbf{xL}_2\text{」は「正の横ベクトル」)}$$

である。

そうであれば

$$\mathbf{xL}_2 (\mathbf{h}_2 - \mathbf{B}_2\mathbf{t}) > 0$$

が成立するためには

$$(\mathbf{h}_2 - \mathbf{B}_2\mathbf{t}) \geq 0$$

であればよく

$$(\mathbf{h}_2 - \mathbf{B}_2 \mathbf{t}) > 0$$

であることまでは必要ではない。

つまり 3 (2) で紹介した中谷 (1994) での数理的証明においても、「全部門で利潤が発生するためにはどれか 1 種類以上の労働において剰余労働が存在しなければならない」ということになる¹⁴⁾。

よって、2 (2)、3 (2) の数理的証明結果からわかるように、貨幣賃金率に関して「全ての種類の労働の貨幣賃金率は換算率に比例する」ということまでは前提には置かず、貨幣賃金率に関し前提とするのは、「どの種類の労働であれ、同じ種類の労働の貨幣賃金率は全て同一とする」までとしている場合は、明確に言えるのは、「全ての部門で利潤が発生するためには、どれか 1 種類以上の労働において剰余労働が存在しなければならない」までで、「全部門で利潤が発生するためには、全ての種類の労働において剰余労働が存在しなければならない」とまではいえない、ということになる。

以上より、「異種労働の存在を考慮した場合」の数理的証明の結論として、とりあえず次のように言えると思われる。

「異種労働の存在を考慮した場合でも、『全部門で利潤が発生するためには剰余労働が存在しなければならない』ということは数理的に証明されている。しかし『全部門で利潤が発生するためには、全ての種類の労働において剰余労働が存在しなければならない』と明確に数理的に証明できるのは、『全ての種類の労働の貨幣賃金率は換算率に比例する』との前提までを置いた場合のみである。そうした前提までは置かず、貨幣賃金率に関し前提とするのは『どの種類の労働であれ、同じ種類の労働の貨幣賃金率は全て同一とする』までとしている場合は、明確に数理的に証明できるのは『全部門で利潤が発生するために

14) この展開は中谷 (1994) とは異なると思われるが結論は同じと考える。なお中谷 (1994) では、剰余労働が存在しなければならない労働種類は、「賃金財部門もしくは賃金財の生産に必要な生産財の生産部門で直接に必要な労働種類」から 1 種類以上 (中谷 (1994) p103)、と数理的に指摘されている。

は、1種類以上の労働において剰余労働が存在しなければならない』ということまでである。」

では貨幣賃金率に関して「全ての種類の労働の貨幣賃金率は換算率に比例する」ということまでを、数理的証明の前提と置くことは適切なのだろうか。

この点を考えるにあたってその前にまず、「全ての種類の労働の貨幣賃金率は換算率に比例する」であるなら、確かに「 $Bp = hw$ (B は実質賃金率行列、 p は価格ベクトル、 h は換算率ベクトル、 w は労働者が抽象的人間労働の支出1単位の対価として支払われる賃金額)」となるが、そうであるからといって、「どの種類の労働を行う労働者も、支払われる賃金額で同じ種類の財を同じ比率で購入し、それぞれの財の購入単位数は換算率に比例することになる」わけではない、言い換えれば「どの種類の労働を行う労働者の貨幣賃金率が換算率に比例するからといって、どの種類の労働を行う労働者の『賃金バスケットの構成も同一』となる」わけではない、という点は確認しておくべきであろう¹⁵⁾。なぜなら「どの労働者も一定種類の財については同じ単位数を購入し、賃金の高い労働者は賃金増額分はそれ相当額の別の財を購入する、一定種類の財はどの労働者も購入するが、賃金の高い労働者はそれらの財の購入単位数は若干ふやし、賃金増額分の残りで別の財を購入する」など、「どの種類の労働を行う労働者も、支払われた賃金で同じ種類の財を同じ比率で購入し、それぞれの財の購入単位数は換算率に比例する」以外にも「 $Bp = hw$ 」が成り立つケースは多々存在するためである。「全ての種類の労働の貨幣賃金率は換算率に比

15) この点に関しては中谷 (1994) pp102～103 において「貨幣賃金率が換算率と比例すること」と「どの種類の労働を行う労働者の賃金バスケットの構成も同一あること」とが連関しているような表現があるが、前者であるからといって必然的に後者になるとはいえないと思う。ただし中谷 (1994) pp102～103 で述べていることの結論が「『全部門で利潤が発生するためには全種類の労働で剰余労働がなされなければならない』となるのは『貨幣賃金率が換算率と比例する』との前提を置いた場合のみで、その前提おかないと『全部門で利潤が発生するためには1種類以上の労働で剰余労働が存在しなければならない』となる」であれば、筆者は先に提示した数式展開からそれと同意見である。

例し、それゆえ『 $Bp = hw$ 』である」ということと、「どの種類の労働を行う労働者も、支払われた賃金で同じ種類の財を同じ比率で購入し、それぞれの財の購入単位数は換算率に比例する」ということは、イコールではない。前者であるからといって必然的に後者になるわけではない、のである。

この点を、貨幣賃金率に関して「全ての種類の労働の貨幣賃金率は換算率に比例する」ということまでを数理的証明の前提としておくことは適切か、の検討にあったここでまず述べたのは、以下の理由からである。万が一「全ての種類の労働の貨幣賃金率は換算率に比例する、という場合は、どの種類の労働を行う労働者も、支払われた賃金で同じ種類の財を同じ比率で購入し、それぞれの財の購入単位数は換算率に比例することになる」のであれば、それはきわめて非現実的なことであり、それだけで数理的証明にあたって「全ての種類の労働の貨幣賃金率は換算率に比例する」との前提までを置くことはできない、と結論づけられよう。しかしそうしたことを論拠して、その前提までを置くことを否定すること自体は適切ではないのではないかと考え、それゆえそれ以外の観点からその前提までを置くことの適否を判断すべき、と筆者は認識しているからである。

以上の点を確認強調したうえで、では貨幣賃金率に関して「全ての種類の労働の貨幣賃金率は換算率に比例する」ということまでを、数理的証明の前提として置くことの適切性について改めて考えてみよう。

現実の賃金は、市場の需給動向・職務職能・年功（この場合の「年功」とは「年の功」ではなく「年と功」のこと）・労使の力関係・制度枠組み・企業の支払い能力・慣行、等さまざまな要因が複雑にからみあって決定される。そうした現実の賃金決定の複雑さという観点を視野に入れば、「全ての種類の労働の貨幣賃金率は換算率に比例する」という前提までを置くことは適切性を欠くように思われる。

また「賃金＝労働力商品の価値」とする「賃金の本質論」という原理的な視点からしても、「労働力商品の価値構成＝（労働者個人および家族の生活維持に必要な生活手段の価値＋職業能力開発費）」ということと、「全ての種類の

労働の貨幣賃金率は換算率に比例する」との間には、理論的整合性が存在しないと考えられる。なぜなら「労働力商品の価値構成」のうち「労働者個人及びその家族の生活維持に必要な生活手段の価値」の部分に関しては、「労働者が行っている種類の労働の支出1単位が生み出す価値の大きさ」と、明確な比例関係にあるとは言えないからである。それゆえ「賃金＝労働力商品の価値」とする「賃金の本質論」という原理的な視点からしても、「全ての種類の労働の貨幣賃金率は換算率に比例する」という前提までを置くことの適切性は否定されることになろう。

以上より貨幣賃金率に関して「異種労働が存在する場合のマルクスの基本定理」の数理的証明にあたって、「全ての種類の労働の貨幣賃金率は換算率に比例する」ということまでを前提として置くことは、「現実の賃金決定メカニズム」からと、「賃金＝労働力商品の価値」という「賃金の本質論」から、の双方より適切ではないといえよう。

ただし、「異種労働の存在を考慮した『マルクスの基本定理』の数理的証明」において、貨幣賃金率に関して「どの種類の労働であれ、同じ種類の労働の貨幣賃金率は全て同一とする」という点を前提とすることまでは、許容の範囲内と考えられる。なぜなら異種労働の存在を考慮していない「マルクスの基本定理」のどのパターンの数理的証明においても、「労働支出1単位の対価として労働者に支払われる賃金額、すなわち貨幣賃金率は全て同一とする」とされており、それゆえこのことには、貨幣賃金率に関して「どの種類の労働であれ、同じ種類の労働の貨幣賃金率は全て同一とする」という点までは含意されている、と思われるからである。

以上の考察より、「異種労働の存在を考慮した場合」の「マルクスの基本定理」の数理的証明の結果としては、以下のように結論づけられることになろう。

「異種労働の存在を考慮しても『全部門で利潤が発生するためには剰余労働が存在しなければならない』という点は数理的に証明されている。ただし明確に

証明されているのは『全ての部門で利潤が発生するためには、1 種類以上の労働で剰余労働が存在しなければならない』までで、『全ての種類の労働について剰余労働が存在しなければならない』とまでは言えない」

ではこの結論から「異種労働の存在を考慮した場合」についても、「マルクスの基本定理」は数理的に証明され成り立っているといえるだろうか？

結論からいれば、筆者は「異種労働の存在を考慮した場合でもマルクスの基本定理は成り立つ」としていいと考える。

理由はたとえ「全部門で利潤が発生するためには 1 種類以上の労働で剰余労働がなされなければならない（労働の種類によっては剰余労働がなされない労働も存在する）」であっても「資本家の取得する利潤の源泉は労働者の行う剰余労働である」「全部門で利潤が発生するためにはどれかの種類の労働を行う労働者が剰余労働を行わなければならない」ということ自体は数理的に証明されており、資本労働関係を総体としてみた場合は「資本労働関係は搾取被搾取関係にある」といえるからである。

筆者はこのように考え「異種労働の存在を考慮した場合」においても、「マルクスの基本定理」は数理的に証明されている、と結論づけていいと思われる。

6、おわりに

—若干のまとめと今後の検討課題—

以上述べてきた点についてまとめると次のようになろう。

1. 換算率算出数式については、森嶋（1974）p226 に関しては、それと価値方程式との間に矛盾が存在しているとともに、算出される換算率の数値も全て 1 ポイントずつ小さくなってしまっており、それゆえその換算率算出数式自体も有効性をもちえないものといえる。また筆者が田中（2015）に基づき展開した試案についても非現実的な仮定でのみ成り立つものであった。しかし置塩（1977）pp180～181、置塩（1978）pp22～24 で示されている換算率算出数

式にはそうした難点もなく、従来の通説を忠実に数式化したものといえる。よって換算率算出数式及び換算率算出方法に関しては、置塩(1977) pp180～181、置塩(1978) pp22～24における数式・方法こそが、最も正当性・有効性を有するといえよう。

2. 異種労働の存在を考慮した場合の「マルクスの基本定理」の数理的証明の結果としては、「異種労働の存在を考慮しても『全部門で利潤が発生するためには剰余労働が存在しなければならない』は数理的に証明されている。ただし明確に証明されているのは『全ての部門で利潤が発生するためには、1種類以上の労働で剰余労働が存在しなければならない』までで、『全ての種類の労働について剰余労働が存在しなければならない』とまでは言えない」となるだろう。
3. それでも「資本家の利潤の源泉は労働者の行う剰余労働である」「全部門で利潤が発生するためにはどれかの種類の労働を行う労働者が剰余労働を行わなければならない」こと自体は明白に数理的に証明されており、資本労働関係を総体としてみれば「搾取被搾取関係」であること自体はいえるので、「マルクスの基本定理」は成り立つ、と結論づけてもいいと考える。

本稿での分析結果は以上の次第であるが、今後の検討課題として「『全ての種類の労働の貨幣賃金率は換算率に比例する』という前提までを置かない限り、明確にいえるのは『全部門で利潤が発生するためには1つ以上の種類の労働で剰余労働が存在しなければならない』までである」という数理的証明の結果を労働経済の現状分析にどのように応用すべきか、という点があげられよう。

社会経済学的労働経済論という立場からすれば、「労働の種類によって剰余労働を行う労働者と行わない労働者が存在している、つまり搾取される労働者と搾取はされていない労働者が存在する」という数理的証明結果は、現状分析における基礎視角として極めて重大である。その結果を労働者内部における階層把握分析にどのような形で応用すべきか、今後の大きな課題である。

参考文献

- Hilferding, R (1904) “Böhm – Bawerks Mark - Kritik” *Marx - Studien* Wien (玉野井芳郎・石垣晴美訳 (1968) 「バーム・バウエルクのマルクス批判」『マルクス経済学研究』法政大学出版会、所収)
- Marx, K (1867) *Das Kapital* (翻訳は新日本出版社版の『資本論』を使用)
- Morishima, M (1973) *Marx's Economics* Cambridge University Press (森嶋通夫著 (高須賀義博訳) (1974) 『マルクスの経済学－価値と成長の二重の理論－』東洋経済新報社)
- Morishima, M and Catephores, G (1978) *Value, Exploitation, and Growth Marx in the Light of Modern Economic Theory* McGraw-Hill Book (高須賀義博・池尾和人訳 (1980) 『価値・搾取・成長－現代の経済理論からみたマルクス－』創文社)
- Okishio, N (1972) “A Formal Proof of Marx's two Theorems” *Kobe University Economic Review*
- Roemar, J (1986) *Value, Exploitation and Class*, Harwood Academic Publishers
- 荒又重雄 (1972) 「複雑労働の簡単労働への還元の問題に関する試論」『価値法則と賃労働』恒星社厚生閣
- 泉弘志 (1978) 「複雑労働の単純労働への換算係数について」『大阪経大論集』125号
- 池尾和人 (1978) 「異質労働とマルクスの基本定理」『経済評論』8月号
- 植村博恭 (1985) 「労働の還元と抽象的人間労働」『エコノミア』No.84
- 経済理論学会 (2014) 「特集 置塩経済学の可能性」『季刊経済理論』50巻4号
- 置塩信雄 (1957) 『再生産の理論』創文社
- 置塩信雄 (1967) 『蓄積論』筑摩書房 (第二版は1976年刊)
- 置塩信雄 (1977) 『マルクス経済学 価値と価格の理論』筑摩書房
- 置塩信雄 (1978) 『資本制経済の基礎理論 増訂版』創文社
- 置塩信雄 (1987) 『マルクス経済学Ⅱ 資本蓄積の理論』筑摩書房
- 白井邦彦 (2024) 「社会経済学 (Political Economy) 理論の数理的証明に関する覚書」『青山経済論集』76巻第1号
- 田中淳平 (2015) 「数理マルクス経済学：講義ノート」
- 種瀬茂・富塚良三・浜野俊一郎編 (1984) 『資本論体系 第2巻 価値・貨幣』有斐閣
- 富塚良三・服部文男・本間要一郎編 (1985) 『資本論体系 第3巻 剰余価値・資本蓄積』有斐閣
- 中谷武 (1994) 『価値、価格と利潤の経済学』勁草書房
- 橋本貴彦 (2021) 「投下労働価値の実証分析」「価値利潤率と剰余価値率の実証分析」(松尾編 (2021) の12章、13章)
- 松尾匡編 (2021) 『最強のマルクス経済学講義』ナカニシヤ出版
- 松尾匡 (2021) 「数理マルクス経済学7章、8章、9章、11章」(松尾匡編 (2021) 所収)
- 守健二 (2009) 「バロン-フロベニウス定理の経済学への応用—数学者たちの『マルクスの基本定理』」『季刊経済理論』第46巻第3号
- 吉原直毅 (2008) 『労働搾取の厚生理論序説』岩波書店