

2025 年度

青山学院大学審査学位論文

指導教員 山崎 了 教授

ガンマ線バーストの可視・近赤外初期残光に対する
理論モデルのベイズ推定による検証

Bayesian Evaluation of Theoretical Models for
Early Optical/Near-Infrared Afterglows of Gamma-ray Bursts

青山学院大学大学院

理工学研究科

理工学専攻

大林 花織

要旨

ガンマ線バースト (Gamma-Ray Burst; GRB) は、宇宙の遠方から突発的に、数百 keV を典型とするガンマ線を数秒間観測する現象である。これは電磁波で輝く現象としては宇宙で最も明るい天体现象であり、その規模は、太陽の一生 (約 100 億年) 分の放射エネルギーを数秒間で放出することに匹敵する。ガンマ線で輝く即時放射 (prompt emission) の後には、電波からガンマ線に至る多波長で放射が続く「残光 (afterglow)」が観測される。

発見から半世紀以上が経過した現在でも、GRB の発生メカニズムや起源天体の詳細は依然として未解明である。*Swift* 衛星の運用開始以降、初期残光の光度曲線が精度良く取得されるようになり、従来の標準理論モデルでは説明が困難な事例が多数報告されてきた。特に可視光帯域の光度曲線に見られる「無彩色性」「緩やかな増光 (上昇指数 ~ 1)」「遅い極大時刻 ($\sim 10^3$ 秒)」といった初期残光の特徴は、標準理論モデルによる単純な解釈を困難にしてきた。

これらの特徴は、相対論的ジェットの構造やダイナミクス、および周辺環境の性質に関する重要な情報を含むと考えられる。これまでに、(1) 構造を持つジェットの開き角外視線モデル、(2) 冪乗則に従う星間空間密度分布モデル、(3) シェルの厚みを考慮したモデルが初期残光の特徴を説明する候補として提案されてきた。これらのモデルは多くの自由度を持つため、最尤法に代表される頻度論的手法によるパラメータ決定は容易ではない。従来の残光解析では、近似的な解析的モデルとの比較や、目視によるパラメータ探索を通じて理論的示唆を得る手法が主に用いられてきたが、得られた結果が客観的に最適である保証はなく、複数のモデルを公平に比較することも難しかった。近年では計算技術の進展とともに発展してきたベイズ推定を導入し、より体系的かつ定量的にモデルの妥当性を評価する手法が採られるようになってきている。

本論文では、GRB の理論的解明において初期残光が果たす役割を明確にするとともに、ベイズ推定の有効性と課題を具体例を通じて示した。具体的には、「無彩色性」「緩やかな増光」「遅い極大時刻」を示す 2008 年 7 月 10 日および 2008 年 3 月 30 日に観測されたガンマ線バースト残光に対して、3 種類の理論モデルの制約や検証をベイズ推定に基づいて実施した。その結果、シェルの厚みと冪乗則に従う星間空間密度分布を考慮するモデルが、初期残光の特徴を自然に再現できることが示唆された。シェルの厚みを定量的に制約し、推定された中心エンジンの活動時間が即時放射の継続時間より長いことを明らかにした。さらに、星間空間密度分布の冪指数に対しても定量的な制約を与え、GRB の起源天体とされる大質量星の恒星風との関連を示した。

加えて、解析を通じてベイズ推定の GRB 研究における実践的課題と限界も明らかにした。特に、モデルに依存する擬似的制約の可能性や、微調整を要するモデルが不利に評価される可能性を指摘した。これらの点は、観測データの情報量とモデルの表現力との釣り合いを定量的に評価するうえで、ベイズ推定が慎重かつ批判的に用いられる必要性を示している。

目次

第 1 章	序論	6
1.1	ガンマ線バースト (GRB) とは	6
1.1.1	GRB の観測の歴史	6
1.1.2	GRB の観測的特徴と分類	9
1.2	残光観測から理論的制約を与えた例	13
1.2.1	重力波と共に観測された GRB 170817A	13
1.2.2	TeV ガンマ線を含む多波長で残光が観測された GRB 190829A	14
1.2.3	近傍で発生した史上最大輝度の GRB 221009A	16
1.3	本研究の目的と位置付け	19
1.4	本論文の構成	20
第 2 章	GRB 残光研究の理論的背景	22
2.1	GRB 残光の標準理論モデル	22
2.1.1	光源の相対論的運動の必要性	23
2.1.2	相対論的效果と宇宙論的效果	26
2.1.3	等到着時刻面 (Equal arrival time surface)	28
2.1.4	相対論的衝撃波	30
2.1.5	火の玉モデルと爆風の伝播	37
2.1.6	順行衝撃波からのシンクロトロン放射	40
2.1.7	標準理論モデルが予言する光度曲線	45
2.2	標準理論モデルの限界	48
2.3	初期残光に対する理論モデル	50
2.3.1	構造を持つジェットの開き角外視線モデル (off-axis structured jet)	51
2.3.2	冪乗則に従う外部媒質密度分布モデル	54
2.3.3	シェルの厚みの効果を考慮したモデル	59
第 3 章	ベイズ推定によるモデル検証方法	64
3.1	ベイズ推定の基礎	64
3.1.1	ベイズの定理	64
3.1.2	事前分布の選択	66
3.1.3	尤度関数の定義	67
3.1.4	モデル証拠とベイズ因子	67
3.1.5	事後分布の解釈	68
3.2	GRB 残光モデルの検証における意義	68
3.3	マルコフ連鎖モンテカルロ法 (emcee)	69
3.3.1	マルコフ連鎖モンテカルロ法	70

3.3.2	メトロポリス・ヘイスティングス法	70
3.4	Clustered Nested Sampling 法 (MultiNest)	71
3.4.1	モデル選択	71
3.4.2	事前体積	71
3.4.3	Nested Sampling アルゴリズム	72
3.4.4	Ellipsoidal Nested sampling	74
3.4.5	Clustered Nested sampling	75
3.4.6	並列化による効率化	77
3.4.7	途中経過の監視	77
第 4 章	観測データおよび解析手法	79
4.1	検証に用いたイベントの選定	79
4.1.1	GRB 080710	79
4.1.2	XRF 080330	82
4.2	検証に用いた残光計算ツール	85
4.2.1	afterglowpy	85
4.2.2	Magglow	86
4.3	解析手順	86
4.4	計算環境と実装	87
第 5 章	解析結果	89
5.1	GRB 080710: 構造を持つジェットモデル	89
5.2	GRB 080710: 有限の厚みシェルと外部媒質密度の冪乗分布モデル	96
5.3	XRF 080330: シェルの厚みと外部媒質密度の冪乗分布モデル	101
5.3.1	主に赤外・可視光の観測データを用いた解析結果	101
5.3.2	X 線の観測データも含めた解析結果	109
第 6 章	議論	114
6.1	構造を持つジェットモデルに関する議論	114
6.1.1	ジェットの開き角外視線 (off-axis jet) モデルが選ばれなかった理由	114
6.1.2	残光の光度曲線に対するジェット構造の効果	115
6.2	シェルの厚みと外部媒質密度の冪乗分布モデルに関する議論	116
6.2.1	シェルの厚みから得られる GRB 起源への示唆	116
6.2.2	外部媒質密度分布から得られる GRB 起源への示唆	117
6.3	GRB 残光モデルの検証におけるベイズ推定の限界と注意点	118
6.3.1	モデルや事前分布に依存する擬似的制約	118
6.3.2	頻度論的適合度指標との比較	118
6.3.3	ベイズ推定において不利になる仮説	119
第 7 章	結論	120
7.1	本研究の概要	120
7.2	本研究の主要な成果と意義	121
7.3	今後の展望	122

付 録 A	123
A.1 GRB 残光の観測データ	123
A.1.1 等級と光度	123
A.1.2 星間減光	125
A.1.3 AB 等級からフラックスへの変換	126
A.1.4 X 線データのフラックス密度への変換	127
A.1.5 フルエンス分布	128
A.2 GRB 発生起源の理論	128
A.2.1 大質量星の重力崩壊 (コラプサー・シナリオ)	128
A.2.2 恒星風	129
A.3 輻射輸送	132
A.3.1 光学的距離と源泉関数	134
A.3.2 ファインシュタイン係数	135
A.4 シンクロトロン自己吸収	137
A.5 コンプトン散乱	148
A.6 逆コンプトン散乱	150
A.7 非相対論的衝撃波	154
A.8 相対論的衝撃波	160
A.9 MCMC 法と CNS 法の比較	163

謝辞

本研究の遂行にあたり、多くの方々にご指導とご支援を賜りました。心より感謝申し上げます。

まず、指導教員である青山学院大学理工学部物理科学科 山崎了教授には、終始熱心なご指導を賜りました。本研究に関する具体的なお助言のみならず、広く宇宙物理学の知識や魅力についても深くご教示いただきました。また、研究室での生活や進路選択に関する相談にも真摯に応じてくださり、多方面にわたりご支援をいただきました。ここに深く感謝の意を表します。

同学科 田中周太助教には、物理学の本質を捉える視点や、研究に対する真摯な姿勢の大切さを学ばせていただきました。本研究の遂行においても、たびたび議論にお付き合いいただき、多くの助言と励ましを賜りました。また、同学科 坂本貴紀教授、吉田篤正教授、東京大学宇宙線研究所 浅野勝晃教授、そして広島大学 宇宙科学センター 植村誠准教授には、本論文の執筆に際し貴重なご助言を賜りました。有益なご指摘をいただきましたことを感謝申し上げます。

青山学院大学経済学部 岸田一隆教授には、副指導教員として毎年、研究の意義や進捗をご確認いただき、異分野の立場から適切なご指導と温かい激励を賜りました。さらに、進路選択に際してもご助言をいただき、人脈を広げる機会をお与えくださいました。ここに深く感謝申し上げます。

ペンシルベニア州立大学 村瀬孔大教授には、同大学での短期留学を受け入れていただき、ご指導を賜りました。本研究で用いた Clustered Nested Sampling 法によるベイズ推定解析手法についてご教示いただき、本研究の発展に多大なご貢献をいただきました。ここに深く感謝申し上げます。

共同研究者であり同期でもある東京大学宇宙線研究所 草深陽氏には、開発された計算コードを本研究で活用することをご快諾いただきました。厚く御礼申し上げます。また、草深氏は同期・友人としても折に触れて相談に乗ってくださり、心強い支えとなってくれました。

東京大学 宇宙線研究所 譲原浩貴特任助教、横澤孝章助教、押野翔一助教には、博士前期課程から後期課程までの5年間、大型低温重力波望遠鏡 KAGRA の感度向上に関わらせていただく中で、多くのことを学ばせていただきました。特に、信号処理を行う中で培ったプログラミング技術は本研究を遂行する上で重要な基盤となりました。ここに厚く御礼申し上げます。

山崎研究室秘書 佐藤敦子氏には、研究費の執行や旅費申請など、研究活動を支える実務面で多大なご協力をいただきました。適切かつ迅速なサポートにより、研究に専念できる環境を整えていただきましたことに深く感謝いたします。

山崎研究室の先輩・後輩の皆様にも心より感謝申し上げます。山崎研究室に配属されて以来、博士後期課程までの6年間を走り抜けることができたのは、物理学や研究について共に悩み、励み合う仲間が存在、そして研究室生活を豊かにしてくれた皆様のおかげです。

なお、本研究は青山学院大学 Future Eagle Project の研究助成を受けて実施されたものです。博士後期課程での研究遂行に際し、金銭的支援のみならず国際的な研究活動や多様な学びの機会をお与えいただきました。本プロジェクトによる支援に深く感謝申し上げます。

最後に、博士後期課程までの進学を応援していただき、常に自分の味方になって支えてくださった両親に心から感謝いたします。

第1章 序論

本章では本論文の研究対象の天体現象である、ガンマ線バースト (GRB) について、歴史的背景や観測的特徴を概説し、本研究の目的と位置付けについて整理する。

1.1 ガンマ線バースト (GRB) とは

ガンマ線バースト (Gamma-ray burst: 略称 “GRB”) は天球上の一点で突発的に発生し、数ミリ秒から数千秒程度の短時間に、典型的には数百 keV のガンマ線で強く輝く現象である。電磁波で輝く現象としては宇宙で最も明るく、その光度は太陽の一生分のエネルギーを数秒足らずで放出することに匹敵するほどの劇的なものである。

この驚くべき現象が最初に発見されたのは、1960 年代の米ソ冷戦期であった。1963 年に締結された「部分的核実験禁止条約 (Partial Test Ban Treaty; PTBT)」を受け、アメリカはソ連の核実験を監視する目的で、監視衛星群 “Vela” を打ち上げた。Vela 衛星は正二十面体に近い形状をもち、複数台を地球周囲に配置することで、複数点で観測されたガンマ線信号の到達時間差から入射方向を推定できる設計であった。このシステムにより、1967 年 7 月 2 日、地球でも太陽でもない方向からガンマ線のバースト信号が検出され、これが史上初のガンマ線バーストの観測となった。学術誌上では GRB 700822 の観測結果が最初に報告され、Vela 衛星群のうち 3 台で検出された約 8 秒間のガンマ線光度曲線が公開された (Klebesadel et al. 1973)。これがガンマ線バースト研究の端緒となり、この未知の現象の起源を巡って数多くの理論的・観測的研究が展開されてきた。

1.1.1 GRB の観測の歴史

ガンマ線バーストの起源天体として、最初に注目されたのは回転する中性子星であった。1979 年に検出された巨大なガンマ線バースト GRB 790305 では、短く激しいスパイク状の放射に加えて周期的な脈動が観測され、そのスペクトル中にサイクロトロン共鳴構造が報告された (Mazets et al. 1979)。この特徴は降着駆動型 X 線パルサーに見られるスペクトル構造と類似しており、回転中性子星が起源である可能性が示唆された。しかし、このサイクロトロン共鳴構造の報告は、統計精度やエネルギー分解能の点で十分ではなく、その信頼性には疑問が残った。

この疑問を検証するため、日本の X 線天文衛星「ぎんが」にはガンマ線検出器が搭載され、1987 年 2 月 5 日に打ち上げられた。同衛星は 1987 年 3 月以降、多数の GRB を観測し、スペクトル中にサイクロトロン共鳴構造と解釈可能な特徴がいくつかの事例で報告された。しかし、それらの到来方向が既知の中性子星分布と一致しないなど、中性子星起源説を完全には支持しない結果も得られた (Fenimore et al. 1988)。一方で、ぎんが衛星の観測により、X 線放射がガンマ線放射に先行して発生しより長い継続時間を示すこと (Murakami et al. 1991) や X 線過剰型 GRB の存在 (Yoshida et al. 1994) など、ガンマ線バーストの時間発展に関する新たな知見が得られた。

さらに、GRB の空間分布を明らかにすることを目的として、1991 年 4 月 5 日に打ち上げられた、アメリカのコンプトン・ガンマ線天文衛星 (Compton Gamma Ray Observatory; CGRO) に BATSE (Burst and Transient Source Experiment) が搭載された。BATSE は、約 10 年間にわたり GRB の継続観測を行い、GRB の到来方向が全天にわたって等方的であることが明らかにした (Paciesas et al. 1999)。

また、バーストのフルエンス S [$\text{ph cm}^{-2} \text{s}^{-1}$] と、あるフルエンス S 以上のバーストの個数 $N(> S)$ の関係 ($\log N - \log S$ 分布) を調べたところ、 $5 < S < 40 \text{ ph cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ の領域では $N \propto S^{-3/2}$ に近い関係が成り立つ一方で、 $S < 5 \text{ ph cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ ではより緩やかな分布になることが報告された (Meegan et al. 1996)。この結果は、強いバースト (高フルエンス) はユークリッド空間に様に分布しているのに対し、弱いバーストは空間的に希薄である、すなわち宇宙論的距離に起源をもつことを示唆するものである (詳しくは A.1.5 節を参照)。

到来方向の決定のために必要とされた BATSE の広い有効面積は、ガンマ線の光度曲線やスペクトルの詳細な観測にも大きく寄与し、また長期観測によって、GRB の統計的な性質に関する多くの知見が得られた。具体的には、光子数の 90% が含まれる時間で定義される T_{90} を用いると、 $T_{90} < 2$ 秒の「短時間 GRB」と $T_{90} > 2$ 秒の「長時間 GRB」の 2 つのグループが存在すること (Kouveliotou et al. 1993)、光度曲線の時間変動には周期性がほとんど見られないこと、急激な増光の後にゆるやかに減光する形 (Fast Rise Exponential Decay; FRED) を示すものが多いこと (Fishman et al. 1995)、そして、ガンマ線の継続時間が 0.1 秒未満から数千秒までの広い範囲に分布すること (Norris et al. 1996)、などが明らかとなった。

そして、ガンマ線放射に続いて現れる残光 (afterglow) の発見によって、GRB 研究は新たな段階へと大きく発展することになる。1996 年 4 月 30 日、イタリアとオランダが共同で開発した X 線天文衛星 BeppoSAX が打ち上げられた。BeppoSAX には、狭視野 X 線望遠鏡 (Narrow Field Instruments; NFI) のほかに、ガンマ線バーストモニター (GRBM) および 2 台の広視野 X 線カメラ (Wide Field Cameras; WFCs) が搭載されており、GRB の発生をリアルタイムで検出し、その直後の X 線放射を数分～数時間以内に高精度で位置決定することが可能となった。この観測能力により、1997 年 2 月 28 日に検出された GRB 970228 において、ガンマ線放射に続いて X 線および可視光の残光が世界で初めて観測された (Costa et al. 1997; van Paradijs et al. 1997)。これにより、GRB が単なる瞬間的なガンマ線現象ではなく、その後も長時間にわたって電磁波を放出し続ける天体現象であることが明らかになった。さらに、同年に観測された GRB 970508 では、残光の分光観測により赤方偏移 $z = 0.835$ が測定され、GRB が銀河系の外、すなわち宇宙論的距離で発生していることが初めて確定した (Metzger et al. 1997)。この発見は、GRB が宇宙の遠方で莫大なエネルギーを放出する現象であることを示し、GRB の到来方向が全天にわたり等方的であることと、バーストのフルエンス分布から遠く弱いバーストが空間的に希薄であるという特徴との整合が取れる理解へとつながった。

その後、GRB 残光の多波長観測は急速に発展した。2000 年には、日本、フランス、アメリカの国際協力のもとでガンマ線バーストの観測を目的とした小型衛星 *HETE-2* (*High Energy Transient Explorer-2*) が打ち上げられ、高精度な位置情報を迅速に地上へ伝送する体制が整えられた。これにより、可視・赤外望遠鏡による早期残光観測が可能となり、GRB 030329 のように超新星爆発 (SN 2003dh) と関連づけられるイベントが発見された (Hjorth et al. 2003; Stanek et al. 2003)。この観測結果は、長時間 GRB が大質量星の崩壊に由来することを強く示唆する決定的な証拠の一つとなった。また、*HETE-2* の迅速な位置速報システムにより、短時間 GRB に対しても高精度な追観測が可能となり、母銀河の同定が進展した。実際に、GRB 050709 では、*Chandra* による X 線残光観測とハッブル宇宙望遠鏡 (Hubble Space Telescope; HST) による可視光残光の撮像が成功し、短時間 GRB として初めて母銀河が同定された (Hjorth et al. 2005)。また、*Swift* 衛星 (後述) によ

る短時間 GRB 050724 の検出 (Berger et al. 2005) も合わせて、短時間 GRB の多くが楕円銀河や低星形成銀河で発生していることが明らかとなり、それらが連星中性子星などのコンパクト天体合体に起源をもつ可能性が強く示唆された。さらに、BeppoSAX、*HETE-2* に搭載されていた X 線領域の観測装置によって、ガンマ線放射を伴わないものの、ガンマ線バーストと類似した性質を示す X 線フラッシュ (X-ray Flash; XRF) の存在が明らかにされた (Heise et al. 2001; Sakamoto et al. 2005)。これにより、GRB の放射エネルギーやスペクトル特性が連続的な分布を持つことが示され、後に提案された「XRF-XRR-GRB 統一モデル」(Sakamoto et al. 2005) へと発展していった。

2004 年には、アメリカ、イギリス、イタリアの国際協力のもとで開発された、*Swift* 衛星 (*Neil Gehrels Swift Observatory*) が打ち上げられた。*Swift* 衛星には 15 – 150 keV に感度をもつ Burst Alert Telescope (BAT) 検出器、0.2 – 10 keV に感度をもつ X 線 CCD カメラの X-Ray Telescope (XRT)、そして紫外可視の望遠鏡である Ultra-Violet Optical Telescope (UVOT) が搭載されており、ガンマ線バースト発生から数十秒以内に位置速報を行い、残光の追観測までを自律的に行う。これにより、高感度・広帯域の即時観測が可能となり、残光放射の多様な光度曲線形状が明らかにされた。例えば、X 線残光の光度曲線には、急激な減衰 (steep decay phase) の後に続く緩慢減衰期 (shallow decay phase) が見られるものや、バンプが現れるものなどが報告された (Falcone et al. 2006; Nousek et al. 2006; O'Brien et al. 2006)。また、可視・赤外残光の光度曲線には、ピーク時刻を特定できたイベントも報告され、バースト発生から数千秒付近で周波数に寄らない (achromatic; 本論文では「無彩色」と呼ぶ) ブレークが現れるものが報告され、単純な標準理論モデルでは説明できない (2.2 節参照) 特徴を持つ。以上のように、*Swift* 以降には、ガンマ線バーストの描像に対して大きな見直しが求められている。

近年では、GRB 残光の多波長同時観測が常態化し、*Fermi* 衛星 (2008 年に打ち上げられた、*Fermi* ガンマ線宇宙望遠鏡) による GeV ガンマ線放射の検出 (Abdo et al. 2009) や、*H.E.S.S.* (2003 年から観測開始した、High Energy Stereoscopic System)、MAGIC (Major Atmospheric Gamma-ray Imaging Cherenkov) 望遠鏡、CTAO (Cherenkov Telescope Array Observatory) に設置された LST (Large-Sized Telescope) 望遠鏡、そして中国の四川省に設置された高エネルギーガンマ線および宇宙線観測装置 LHAASO (Large High Altitude Air Shower Observatory) といった地上チェレンコフ望遠鏡による TeV 領域での観測 (Abe et al. 2025; Chand et al. 2020) により、高エネルギーまでを含む広帯域なデータが蓄積されるようになった。

加えて、2015 年から重力波検出器 Advanced LIGO が本格的に稼働し、2017 年に、ガンマ線バースト GRB 170818A と重力波 GW 170817 が同時に検出された。これは連星中性子星合体の初観測であり、重力波源からの電磁波も初めて観測された事例であった (1.2.1 節参照)。

これらの観測的進展により、GRB は単なる突発的なガンマ線現象という認識から、ジェット構造をもつ相対論的爆発であり、超新星爆発や中性子星合体と深く関わる宇宙論的現象であることが明らかとなった。一方で、残光の時間発展やスペクトル進化には多様性が見られ、放射機構・外部環境・エネルギー供給過程などに未解明の点が多く残されている。次節以降では、これらの観測的特徴に基づいた GRB の分類と、残光観測から理論的制約を与えた例を述べ、本研究の目的と位置付けを整理する。

1.1.2 GRB の観測的特徴と分類

発生頻度

現在、GRB を観測している主要な観測機器は 1.1.1 節でも述べたように、*Swift* 衛星に搭載された BAT 検出器と、*Fermi* 衛星に搭載された GBM の 2 つが代表的である。*Swift*/BAT は、2004 年の 12 月から 2025 年現在までの、おおよそ 7.6 千日の間に 1746 個の GRB を観測した¹。したがって、1 日あたりの平均検出数は $1746/7600 \sim 0.23$ 個である。*Swift* の視野は全天の 11% (全天 4π sr に対して BAT の視野は 1.4 sr^2) なので、全天での発生率を見積もれば、 $0.23/0.11 \sim 2.1$ 個と推定される。さらに、稼働率は衛星の稼働時間や、地球や太陽などによる遮蔽によって 100% ではない。仮に稼働率を 8 割程度だと考えれば、BAT の感度で検出可能な明るさをもつ GRB の実際の発生頻度は、全天で 1 日に 1.7 発程度と考えられる。一方、*Fermi*/GBM は、毎年約 240 個の GRB を検出している³。したがって、1 日あたりの平均検出数は $240/365 \sim 0.65$ 個である。*Fermi* 視野は全天の 64% (全天 4π sr に対して GBM の視野は 8 sr なので⁴)、全天での発生率を見積もれば、 $0.65/0.64 \sim 1.0$ 個と推定される。GBM の稼働率も仮に 8 割程度だと考えれば GBM の感度で検出可能な明るさをもつ GRB の実際の発生頻度は、全天で 1 日に 0.8 回程度と考えられ、両者の検出器での観測から、おおよそ 1 日に 1 回程度の発生頻度と推測されている。

即時放射の継続時間による分類

GRB は観測的に、即時放射の継続時間により「長時間 GRB (Long GRB)」と「短時間 GRB (Short GRB)」の 2 種類に大別される (Kouveliotou et al. 1993)。即時放射の継続時間の定義にはいくつかの指標があるが、最も広く用いられているのは T_{90} である。これは、積算光子カウント数が全体の 5% に達した時刻から 95% に達した時刻までの長さとして定義され、すなわち観測された光子の 90% が放出されるまでの時間を表す。同様に、全光子の 50% が放出されるまでの時間を T_{50} として用いる場合もある。このような継続時間は、しばしば中心エンジンの活動時間を反映するものと解釈されている。

即時放射の継続時間 T_{90} を横軸に、イベント数を縦軸にとってヒストグラムを描くと (図 1.1 参照)、BATSE、*Swift*、*Fermi* のいずれの検出器による観測でも、二峰性の分布が得られることが知られている (Deng et al. 2022; Horváth 2002; Lien et al. 2016)。短い方のピークは $T_{90} \lesssim 1$ 秒、長い方のピークは $T_{90} \sim 30$ 秒付近に位置し、これらの分布の境目を約 2 秒として、

- $T_{90} < 2$ 秒 : 短時間 GRB (Short GRB)
- $T_{90} > 2$ 秒 : 長時間 GRB (Long GRB)

と分類するのが一般的である。

¹https://swift.gsfc.nasa.gov/archive/grb_table/stats/

²https://swift.gsfc.nasa.gov/about_swift/bat_desc.html

³https://fermi.gsfc.nasa.gov/ssc/observations/types/grbs/?utm_source=chatgpt.com

⁴https://fermi.gsfc.nasa.gov/ssc/data/analysis/documentation/Cicerone/Cicerone_Introduction/GBM_overview.html

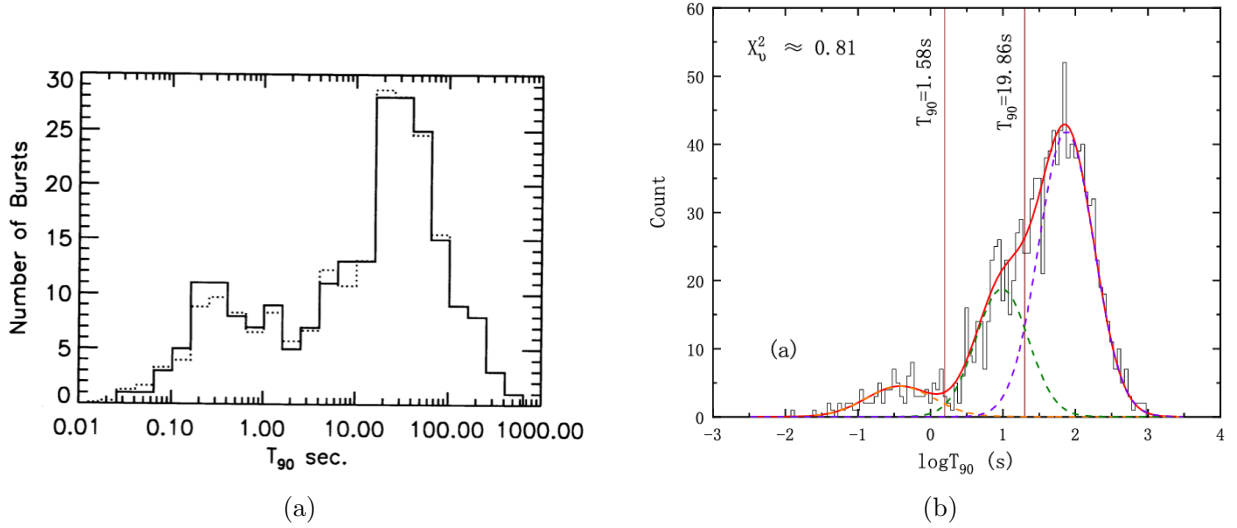


図 1.1: (1.1a) first BATSE catalog の 222 個の GRB についての T_{90} 分布 (Kouveliotou et al. 1993)。 (1.1b) *Swift* で 2004 年から 2019 年までに検出された 1225 個の GRB についての T_{90} 分布 (Deng et al. 2022)。

長時間 GRB の起源として、最も有力なモデルは大質量星の重力崩壊 (コラプサー・シナリオ) である。長時間 GRB に伴う超新星爆発の発見や、発生位置が星形成領域に集中していることが、その裏付けとなっている (A.2 節を参照)。一方で、短時間 GRB の起源として有力視されているのは、連星中性子星や中性子星とブラックホールの合体である。短時間 GRB が、星形成活動が活発ではない、楕円銀河で発見されている事例があることや、重力波イベント GW 170817 に対応する短時間 GRB 170817A の観測がそのモデルを強く支持している。ただし、 T_{90} に基づく分類は一義的ではなく、長時間 GRB に属しながら短時間 GRB と類似した特徴を示すもの、あるいはその逆の事例も報告されている。したがって、GRB の分類と起源との対応は必ずしも明確ではなく、単純な継続時間による分類のみでは起源を一意に特定することが困難であるのが現状である。

即時放射のスペクトル特性による分類

GRB の即時放射は、10 keV から数 MeV にわたる広いエネルギー帯域で観測される。そのスペクトル形状は、しばしば経験的な関数である Band 関数 (Band et al. 1993) によって良く記述される。この関数は、低エネルギー側と高エネルギー側で異なるべき乗分布を持ち、それらが滑らかに接続する折れ曲がり (break) を特徴とする。具体的には、次のように表される：

$$N(E) = \begin{cases} A \left(\frac{E}{100 \text{ keV}} \right)^\alpha \exp \left(-\frac{E}{E_0} \right), & E \leq (\alpha - \beta)E_0 \\ A \left[\frac{(\alpha - \beta)E_0}{100 \text{ keV}} \right]^{\alpha - \beta} \exp(\beta - \alpha) \left(\frac{E}{100 \text{ keV}} \right)^\beta, & E > (\alpha - \beta)E_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

ここで、 E は光子エネルギー、 A は規格化定数、 α および β はそれぞれ低・高エネルギー側のスペクトル指数、 E_0 はスペクトルの折れ曲がりを決めるパラメータである。この関数のエネルギー分布 $E^2 N(E)$ はピークを持ち、そのエネルギーを「ピークエネルギー」 $E_{\text{peak}} = (2 + \alpha)E_0$ と定義する (νF_ν スペクトルで最大値を示すエネルギーに対応する)。観測的には、多くの GRB の E_{peak} は数

百 keV の範囲に分布しており、BATSE、*Swift*/BAT、*Fermi*/GBM などの検出器で得られた統計でも、おおむね $E_{\text{peak}} \sim 250$ keV に集中することが知られている (Goldstein et al. 2012; Poolakkil et al. 2021; Preece et al. 2002)。

一方で、この E_{peak} が典型的な GRB よりも低エネルギー側にシフトしている事例も多数報告されており、そのようなイベントは「X 線過剰 GRB (X-ray rich GRB; XRR)」や「X 線フラッシュ (X-ray flash; XRF)」として分類される。これらの分類は、即時放射のフルエンス (エネルギー積分強度) に基づいて定義される。具体的には、観測されたフルエンス比により次のように分類される (Sakamoto et al. 2008, 2004, 2005):

- $S(25 - 50 \text{ keV})/S(50 - 100 \text{ keV}) \leq 0.72$: 典型的な GRB (C-GRB)
- $0.72 < S(25 - 50 \text{ keV})/S(50 - 100 \text{ keV}) \leq 1.32$: X 線過剰 GRB (XRR)
- $S(25 - 50 \text{ keV})/S(50 - 100 \text{ keV}) > 1.32$: X 線フラッシュ (XRF)

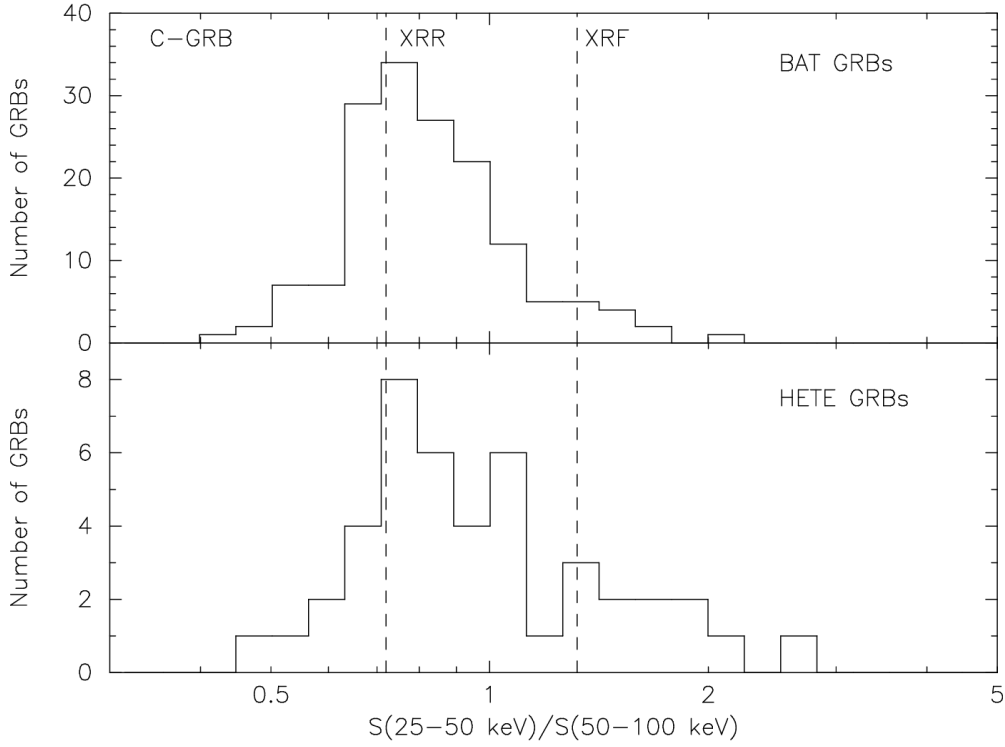


図 1.2: *Swift*-BAT (上) と *HETE*-2 (下) で検出されたイベントのフルエンス比 $S(25 - 50 \text{ keV})/S(50 - 100 \text{ keV})$ の個数分布 (Sakamoto et al. 2008)。

このように、XRF は典型的な GRB の低エネルギー側への連続的な分布の一部として位置づけられ、視線方向やジェット構造の違いによる統一的理解が提案されている (Lamb et al. 2005; Yamazaki et al. 2003)。

各種観測量の相関関係

GRB の即時放射に関しては、その観測量の間にいくつかの経験的な相関関係が報告されている。これらの関係は、GRB の放射機構やジェットの幾何学的性質を理解するうえで重要な手がかりとなっており、特にピークエネルギー E_{peak} と放射エネルギー $E_{\gamma,\text{iso}}$ ・放射光度 $L_{\gamma,\text{iso}}$ との関係が注目されている。

Amati 関係 Amati et al. (2002) は、BeppoSAX により観測された長時間 GRB のサンプルについて、赤方偏移補正後のピークエネルギー $E_{\text{peak}}^{\text{rest}} = E_{\text{peak}}(1+z)$ と球対称換算のガンマ線エネルギー $E_{\gamma,\text{iso}}$ の間に強い正の相関が存在することを発見した。この関係は現在、次のように表される：

$$E_{\text{peak}}^{\text{rest}} \simeq K \left(\frac{E_{\gamma,\text{iso}}}{10^{52} \text{ erg}} \right)^m \text{ keV} \quad (1.2)$$

ここで、長時間 GRB に対する Amati 関係は $K \simeq 100 \text{ keV}$ 、 $m \simeq 0.5$ が典型値である一方で、短時間 GRB の場合は、 $K \simeq 2000 \text{ keV}$ 、 $m \simeq 0.6$ が典型値である。この相関はその後、*Swift* や *Fermi* による広帯域観測でも確認されており (Basak et al. 2013; Zaninoni et al. 2016)、特に長時間 GRB に対してよく成り立つことが知られている。この関係性は、「爆発規模が大きければ大きいほど、放射の典型的なエネルギーも大きい」ことを示している。この関係性に対する物理的解釈は、均一 (Top-hat) ジェットに対する視線方向の違い (Yamazaki et al. 2004) や構造を持つジェットに対する視線方向での議論 (Eichler et al. 2004; Farinelli et al. 2021; Graziani et al. 2006; Toma et al. 2005) など、さまざまなものが提案されているが、Amati 関係の主因の特定には至っていない。

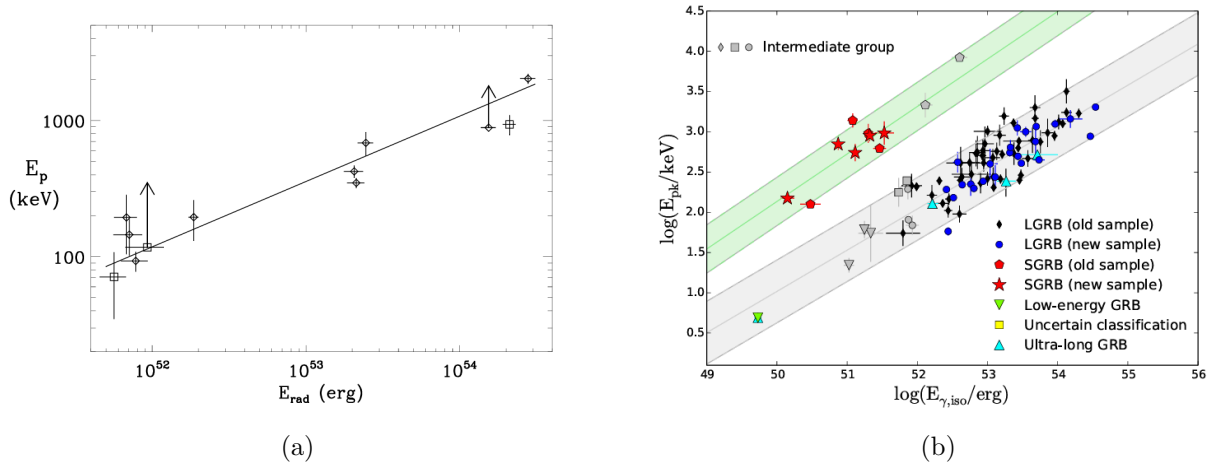


図 1.3: (1.3a) BeppoSAX で検出された 12 個の GRB で作成された $E_{\text{peak}}^{\text{rest}} - E_{\gamma,\text{iso}}$ 散布図 (Amati et al. 2002)。 (1.3b) *Swift*-BAT で 2004 年から 2010 年に検出された GRB で作成された $E_{\text{peak}}^{\text{rest}} - E_{\gamma,\text{iso}}$ 散布図 (Zaninoni et al. 2016)。

Yonetoku 関係 さらに、Yonetoku et al. (2004) と Yonetoku et al. (2010) は、即時放射の時間平均スペクトルのピークエネルギー $E_{\text{peak}}^{\text{rest}}$ と球対称換算のガンマ線ピーク光度 $L_{\gamma,\text{iso}}$ の間にも相関があることを報告した。この関係は「Yonetoku 関係」と呼ばれ、次のように表される：

$$E_{\text{peak}}^{\text{rest}} \simeq K' \left(\frac{L_{\text{p,iso}}}{10^{52} \text{ erg s}^{-1}} \right)^{m'}, \quad (1.3)$$

ここで、 $K' \simeq 300$ keV、 $m' \simeq 0.6$ 程度である。ただし、Yonetoku 関係では長時間 GRB も短時間 GRB も同じような相関が確認されている。一方で、低光度 GRB はこの相関から外れており、同じ $E_{\text{peak}}^{\text{rest}}$ にたいし低い $L_{\gamma, \text{iso}}$ を示す。

パルス光度と遅延時間 エネルギー帯ごとに即時放射の光度曲線を描くと、光度のピーク時刻が低いエネルギー帯の方が高いエネルギー帯のものより遅れる傾向がある。このエネルギー間のパルス遅延にも光度との相関があると考えられている。パルス波形としてよく使われる関数は Norris et al. (2005) が採用した

$$I(t) = A \exp \left[-\frac{\tau_1}{t} - \frac{t}{\tau_2} \right] \quad (1.4)$$

である。ピーク時刻は $t_{\text{pk}} = \sqrt{\tau_1 \tau_2}$ と定義でき、パルスの継続時間は $\tau_{\text{dur}} = 3\tau_2 \sqrt{1 + (4/3)\sqrt{\tau_1/\tau_2}}$ と定義できる。これを用いて、それぞれのエネルギー帯でのピーク時刻を求めれば、そのピーク時刻の時間差 $\Delta t_{\text{pk}} = \tau_{\text{lag}}$ として、遅延時間を定義できる。この遅延時刻と、パルス光度の間には

$$L_{\gamma, \text{iso}} = 3.5 \times 10^{51} \left(\frac{\tau_{\text{lag}}}{\text{s}} \right)^{-0.62} \quad (1.5)$$

の負の相関が見えている (Hakkila et al. 2008)。この遅延に対しては、次の2つの直感的な解釈ができる。1つはシンクロトロン放射の冷却により、典型的な電子のエネルギーが減少することで、スペクトルが低エネルギー側に進化しているというものであり、別の解釈としては、ジェットの曲率の効果により視線方向からずれていくと、遅延の度合いも増していくというものである。ただし、上記の式 (1.5) で示される相関関係に対しても、定量的な説明はなされていない。

1.2 残光観測から理論的制約を与えた例

本節では、残光観測がガンマ線バーストの物理モデルに与えてきた制約の実例を示す。特に、重力波天体との対応が確認された GRB 170817A、TeV ガンマ線領域まで放射が検出された GRB 190829A、そして近傍宇宙で極めて明るく観測された GRB 221009A の3つの事例を取り上げる。

1.2.1 重力波と共に観測された GRB 170817A

2017年8月17日、GW 170817として知られる連星中性子星合体 (binary neutron star merger; BNS) からの重力波が LIGO/Virgo によって初めて検出された。合体の約1.7秒後に、短時間ガンマ線バースト GRB 170817A が *Fermi*/GBM と INTEGRAL/SPI-ASC により観測され、同一事象において重力波とガンマ線放射が対応づけられた初の例となった (Abbott et al. 2017; Savchenko et al. 2017)。さらに、合体の約10時間後には、r過程による重元素合成に起因する熱的放射「キロノバ (kilonova)」が可視・近赤外・紫外で検出され、その後の数十日から数百日にわたり、電波からX線に及ぶGRB残光放射が観測された。この一連の観測は、短時間GRBの起源として有力視されてきた「連星中性子星合体」仮説を実証するとともに、r過程重元素合成の観測的証拠としても画期的な成果であった。

重力波形の解析により、中性子星の質量の和は $2.7M_{\odot}$ 程度と見積もられ、公転軌道の回転軸に対する見込み角は 28° 以下とされる。さらに、地球からの距離は 40 Mpc と見積もられ、GRB の発生

場所としては極端に近いイベントであった。ハッブル宇宙望遠鏡 (Hubble Space Telescope; HST) の観測により母銀河の画像が取得され、NGC4993 であることが特定された。

残光の長期的な観測により、電波・可視光・X 線で明確な光度上昇とその後の減衰が記録され、超光速運動 (superluminal motion) が VLBI 観測で捉えられたことも重要である。Mooley et al. (2018b) は初期の電波・X 線光度曲線の立ち上がり形状から、観測者がジェット軸から大きく外れた「ジェットの開き角より外側からの観測 (off-axis jet)」である可能性は低く、むしろジェット周囲のコクーン (cocoon) からの放射を見ていると解釈した。しかしその後、75 日および 230 日後の VLBI 観測で超光速運動が確認されたことから、Mooley et al. (2018a) は再び相対論的ジェットの存在を主張した。

さらに、GRB 170817A の残光を電波から X 線まで広帯域にわたって解析した研究により、放出流の角度構造 (outflow structure) が詳細に検討された。Troja et al. (2018) は、残光の長期的な時間発展とスペクトルエネルギー分布の同時フィッティングを行い、単純な均一 (top-hat) 型ジェットや等方的コクーン放射では観測データを一貫して説明できないことを示した。その上で、中心に高いローレンツ因子を持つ狭いコアを持ち、その外側により遅い層状成分を伴う「構造を持つジェット (structured jet)」モデルが観測された光度曲線の立ち上がり・ピーク・減衰を最も良く再現することを明らかにした。この結果は、ジェット軸から数十度の視線角で観測されたという解釈や、Mooley らによって報告された超光速運動の観測とも整合的である。

さらに、ハッブル宇宙望遠鏡 (HST) による合体後 159 日目の観測でも残光源の位置変化が検出され、長期的な超光速運動が追跡された。これらの観測結果をもとに、Mooley et al. (2022) は相対論的ジェットのローレンツ因子および視線方向との角度を同時に制約し、この幾何情報を事前分布として取り込むことで、ベイズ推定 (3.1 節を参照) に基づく残光モデルのパラメータをより厳しく制約した。この解析により、ジェットの構造と視線角が残光の時間発展に与える影響が定量的に検証され、構造をもつジェット (structured jet) モデルの有効性が観測的に裏付けられた。

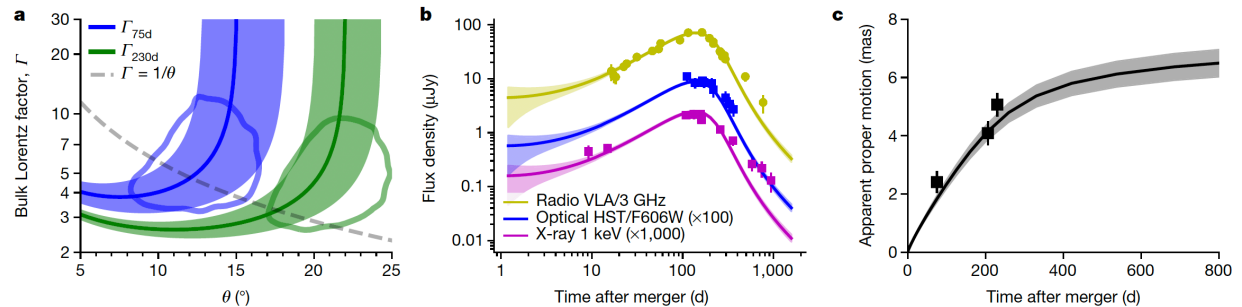


図 1.4: (a) 超光速運動の観測に基づき制約されたジェットのローレンツ因子 Γ と視線方向 θ のとりえる領域、(b, c) 残光と見かけの運動の観測からベイズ推定により制約されたモデルによる、残光と見かけの運動の理論線 (Mooley et al. 2022)。

1.2.2 TeV ガンマ線を含む多波長で残光が観測された GRB 190829A

2019 年 8 月 29 日、赤方偏移 $z = 0.0785$ と非常に近い位置で発生した長時間 GRB 190829A が *Swift*/BAT によって検出された (Dichiara et al. 2019)。この近距離での観測により、TeV 領域のガンマ線でも宇宙背景放射による吸収をほとんど受けずに観測できた稀有な事例となった。特に、*H.E.S.S.* によって、GRB の残光放射から TeV ガンマ線が初めて複数夜にわたって明確に検出され

た (H. E. S. S. Collaboration et al. 2021)。この観測は、GRB 190114C (MAGIC Collaboration et al. 2019a,b) に続く二例目の TeV 検出 GRB であるが、GRB 190829A ではより長時間かつ多波長での同時観測が可能であった点に大きな特徴がある。

残光は可視光から X 線 (Chand et al. 2020)、さらに TeV ガンマ線まで連続的に観測された。特に X 線および TeV 帯の光度減衰が冪乗則に従い、その減衰指数がおおよそ 1.1 でほぼ一致することが報告された。また、TeV ガンマ線のスペクトルも冪乗則で記述され、その光子指数が同時期に観測された X 線スペクトルとほぼ同一 (おおよそ 2.07) であることが示された。このことから、観測された TeV ガンマ線が逆コンプトン散乱ではなく、同一の電子分布によるシンクロトロン放射で説明できる可能性を指摘した (H. E. S. S. Collaboration et al. 2021)。

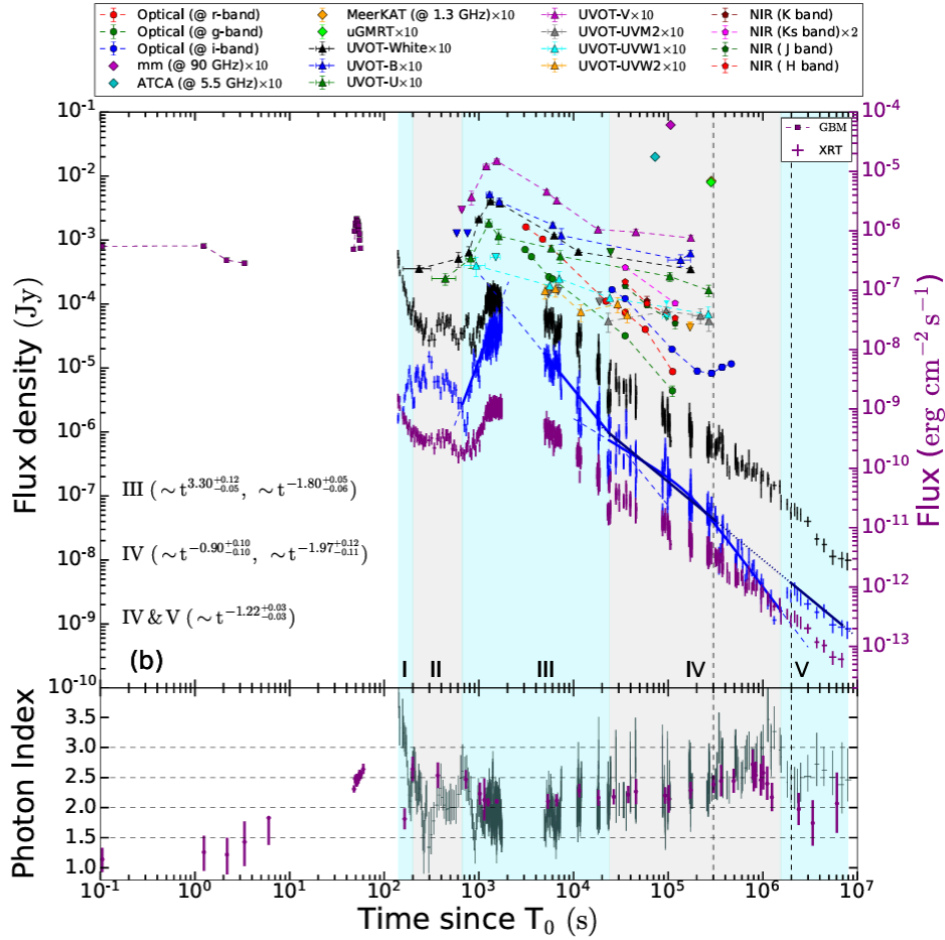


図 1.5: GRB 190829A の近赤外線から X 線の多波長残光の光度曲線 (Chand et al. 2020)。

この発見は、TeV 帯域での放射機構として広く想定されていたシンクロトロン自己コンプトン (synchrotron self-Compton; SSC) モデルに対して新たな課題を突きつけた。SSC モデルでは、ガンマ線のスペクトルは X 線よりもソフトに (すなわち光子指数が大きくなる) と予測されるが、GRB 190829A では両者が同一であるため、この説明は困難である。一方、TeV 領域の光子をシンクロトロン放射で生成するには、電子が非常に高いローレンツ因子にまで加速される必要があり、従来の加速理論ではその実現が難しいことが知られている。したがって、このイベントは、電子の加速

機構や衝撃波環境に新たな物理が存在することを示唆している。さらに、このイベントでは prompt emission において2つのガンマ線パルスが観測され、残光にも数千秒付近で顕著なバンプが存在することが報告されていることも、単純な残光モデルでは説明困難な特徴であった。

これらの特徴を説明するため、複数の理論モデルが提案されている。Sato et al. (2021) は、開き角の異なる二成分ジェット構造（狭角ジェットと広角ジェット）を仮定し、狭角ジェットをジェットの開き角から外れた方向 (off-axis) から、広角ジェットをジェットの開き角よりは内側の方向 (on-axis) から観測することによって、複数のパルスおよびバンプ構造を再現できることを示した。このモデルでは、狭角ジェットの衝撃波で加速された電子が SSC 放射を行うことで、観測された多波長スペクトルを説明できるとしている。一方で、Zhang et al. (2021b) は、開き角の大きなジェットが周囲の物質と相互作用することで、2つのパルスおよび残光のバンプを再現できることを示し、この衝撃波によって加速された電子が SSC 放射を行うことで観測結果を説明できると提案した。また、Zhang et al. (2021a) は、TeV ガンマ線放射は、X 線などのフレアによる光子が種となり、外部の衝撃波で加速された電子により散乱されたと考える、「外部逆コンプトン散乱 (External Inverse-Compton emission; EIC)」により説明できると提案している。

1.2.3 近傍で発生した史上最大輝度の GRB 221009A

2022 年 10 月 9 日、GRB 221009A が *Fermi*/GBM により検出された (Lesage et al. 2023; Veres et al. 2022)。本イベントは、過去数十年に観測されたどの GRB よりも明るく、“Brightest Of All Time (BOAT)” と称されるに至った。赤方偏移は $z = 0.151$ と比較的近く、球対称換算のガンマ線エネルギーは $E_{\gamma, \text{iso}} \sim 10^{55}$ erg に達し、典型的な長時間 GRB ($E_0 \sim 10^{52-54}$ erg) を大きく上回る値であった (Lesage et al. 2023)。

Lesage et al. (2023) は *Fermi*/GBM による観測から即時放射の持続時間を $T_{90} \simeq 289$ 秒と推定し、本イベントがこれまで報告された GRB の中でも比較的長い継続時間 (長時間 GRB の中でも 96.4% の GRB より長い継続時間) を有することを示した。即時放射は複数のピークを持つ複雑な時間変動構造を示し、さらにトリガー時刻を含む期間 (トリガー時刻から -1.3s から $+42.9\text{s}$ の期間) には、比較的弱い熱的放射成分を伴う「トリガーパルス (triggering pulse)」が検出された。このような熱的成分は、崩壊しつつある大質量星の外層を衝撃波が突き抜ける際に生じるショックブレイクアウト放射と整合的である可能性が指摘されており、GRB 221009A が重力崩壊型 (コラプサー・シナリオ) に起源をもつことを示唆する観測的特徴の一つと考えられている。

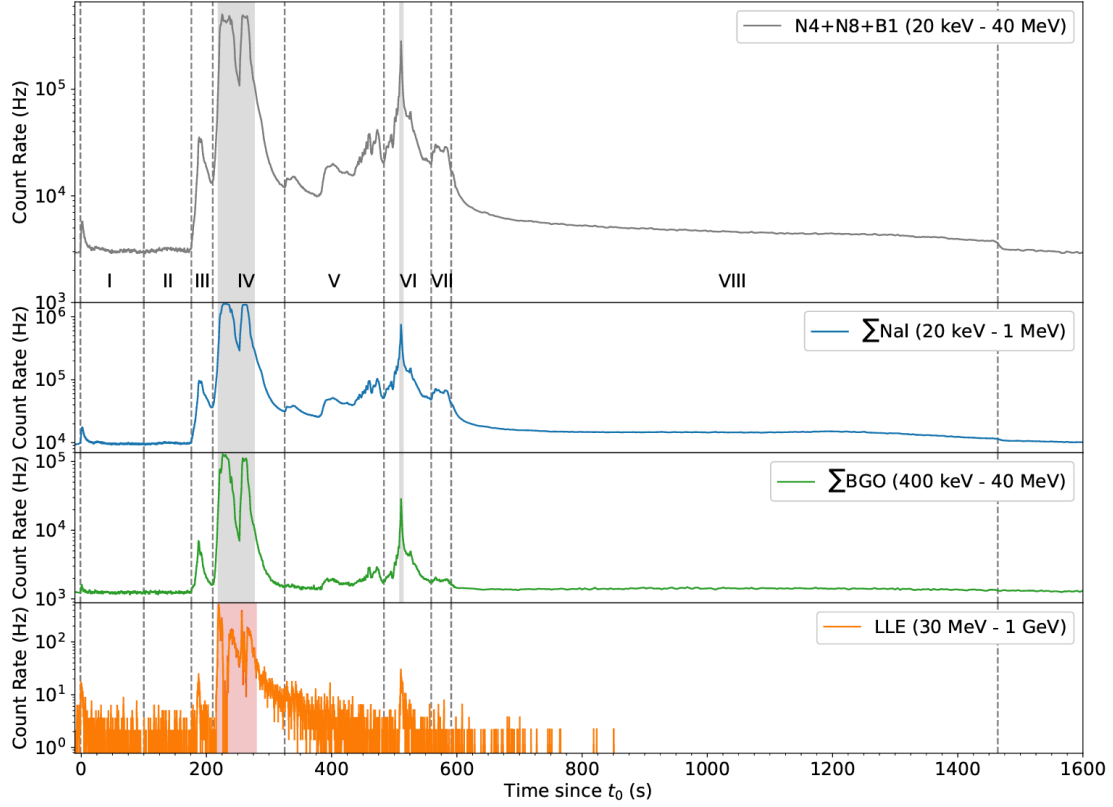


図 1.6: GRB 221009A の即時放射の光度曲線 (Lesage et al. 2023)。

本イベントは中国の高エネルギーガンマ線および宇宙線観測施設 LHAASO (Large High Altitude Air Shower Observatory) でも観測された。最大 18 TeV に達する高エネルギーガンマ線光子が検出され、高エネルギーの放射が、発生から 2000 秒以上経過した後も継続していたことが報告された (Galanti et al. 2023; LHAASO Collaboration et al. 2023)。これは、GRB 190829A や GRB 190114C に続き、TeV 領域で長時間にわたる残光放射が確認された貴重な事例であり、外部衝撃波における電子加速機構と放射モデルに新たな制約を与えた。

さらに、電波から可視光、X 線でも残光が観測された。特に X 線残光は 100 日以上にわたり検出され、*Swift*/XRT および *NuSTAR* (Nuclear Spectroscopic Telescope Array; NASA による X 線宇宙望遠鏡) の観測では、光度曲線が折れ曲がりを伴う冪乗則で表されることが示されている。初期の減衰指数は -1.498 、バースト発生から 7.9×10^4 秒以降では -1.672 と変化することが報告され、単純な均一 (top-hat) 型ジェットでは説明できないと主張している (Williams et al. 2023)。また、光学残光は単一の冪乗則で減衰し、減衰指数は z-band においておよそ -1.54 であり、X 線残光と異なる減衰が見られることから、星間減光モデルに新たな示唆を与えている (Fulton et al. 2023)。一方で、電波とミリ波残光は、「観測史上最も明るい」という即時放射や X 線残光に比べて、平均的なものであり、スペクトル形状やその時間変化は予想されているものとは異なる結果が報告された。

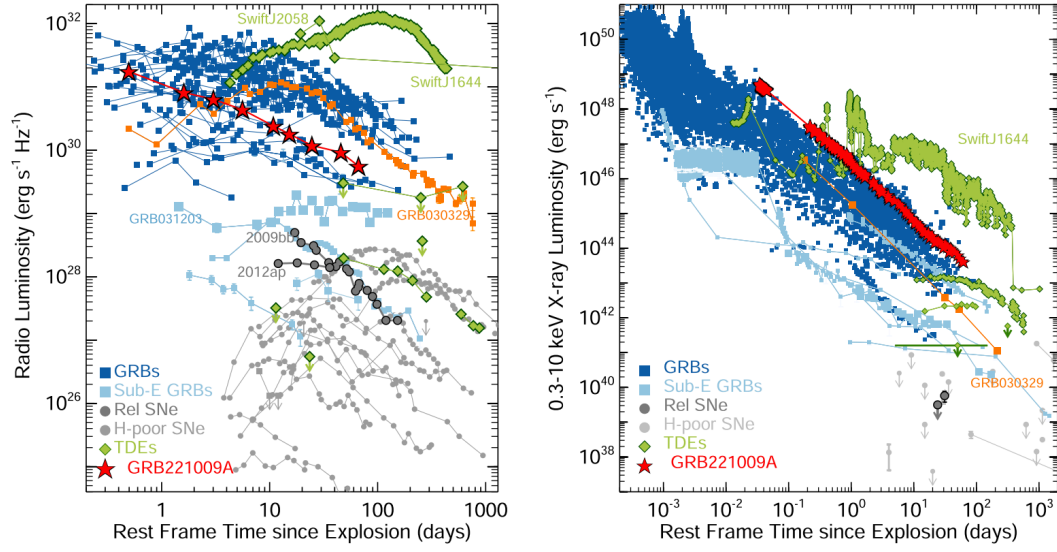


図 1.7: GRB 221009A の電波と X 線残光の光度曲線 (Laskar et al. 2023)。

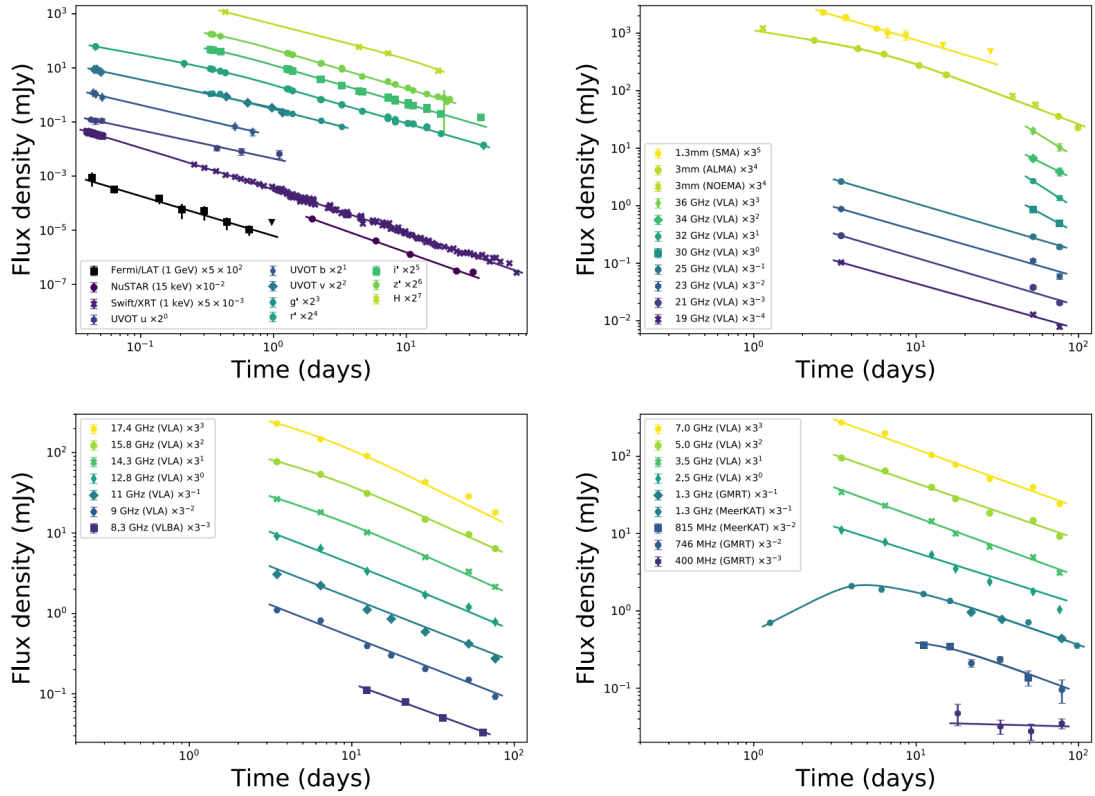


図 1.8: GRB 221009A の 1 GeV から 400 MHz 残光の光度曲線 (Laskar et al. 2023)。

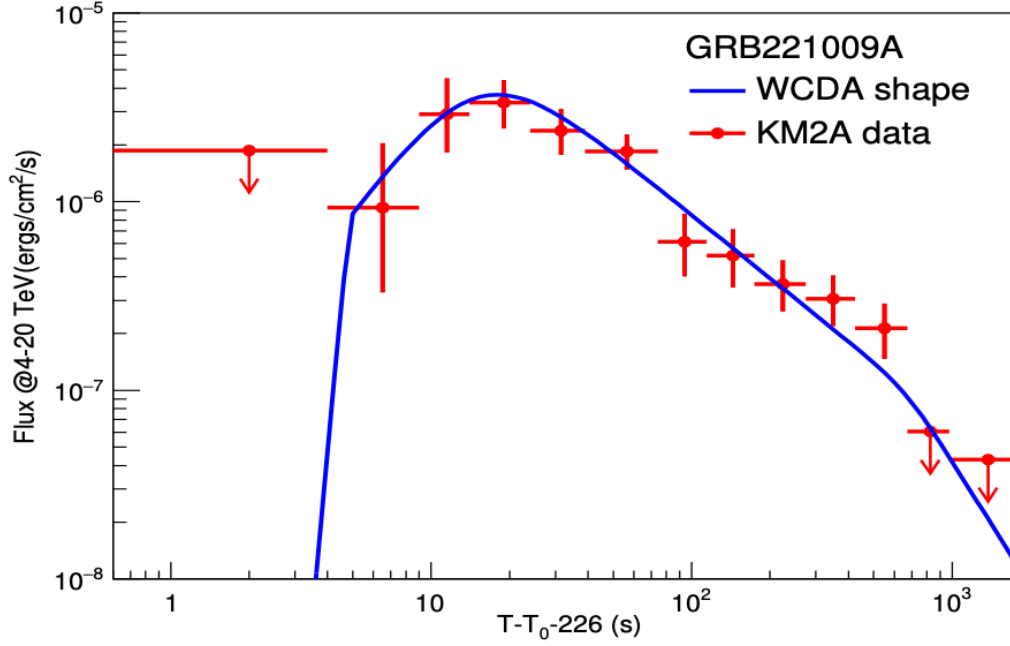


図 1.9: GRB 221009A の 4-20 TeV 残光の光度曲線 (Laskar et al. 2023)。

これらの特徴を説明するため、複数の理論モデルが提案されている。O'Connor et al. (2023) は、残光の後期の時間進化が、予想されているよりも緩やかな減衰である点に対し、ジェット軸近傍にエネルギーが集中するような内部構造を持つジェット (structured jet) を考慮することで、大きすぎる爆発の総エネルギーを自然に解釈できると提案している。Sato et al. (2023) も、単純な均一 (top-hat) 型のジェット一つだけでは、残光放射の総エネルギーを自然に解釈することが困難である点を指摘し、開き角の異なる二成分ジェット構造 (狭角ジェットと広角ジェット) モデルを提案している。TeV 残光については、GRB 190829A と同様に、シンクロトン自己コンプトン散乱が狭角ジェットのから放射源であると解釈している。Kusafuka et al. (2025b) は、TeV ガンマ線残光で見られるブレイクを、強く磁化され、厚みのある噴出物と星周物質を考慮すれば、特殊なジェット構造を持ち込んだジェットブレイクによる説明が不要であるという提案をしている。

1.3 本研究の目的と位置付け

前節までに、ガンマ線バースト (GRB) の発見から現在に至るまでの観測的・理論的研究の発展を概観した。これらの研究により、GRB が相対論的ジェットを伴う宇宙論的爆発現象であること、ならびにその起源が大質量星の崩壊やコンパクト天体合体と深く関係していることは、観測的に確立されつつある。一方で、観測される残光の時間発展やスペクトル進化の多様性が、ジェットの幾何学的性質 (角度構造・視線方向) と周辺環境の物理状態をどのように反映しているのかという点については、いまだ統一的な理解には至っていない。

近年の多波長・高時間分解能観測、とりわけ *Swift* 衛星以降に蓄積された残光データは、2.1 節で述べるような、均一 (top-hat) 型ジェットおよび一様外部媒質を仮定した標準理論モデルでは説明が困難な振る舞いを数多く示している。その代表例の一つが、バースト発生から数千秒付近に可視・赤外帯域の光度曲線に現れる、波長に依存しない極大 (achromatic peak / 無彩色ピーク) であ

る。この特徴は、初期残光においてジェットの角度構造や視線効果、さらには外部媒質の密度分布といった物理量が観測に強く反映される可能性を示唆しており、GRB ジェット物理を探る上で重要な手がかりとなる。

これまで、こうした無彩色ピークを説明するために、ジェットを開き角外方向から観測する off-axis jet モデルや、ジェット構造を考慮した拡張モデルが提案されてきた。しかし、多くの研究は定性的な議論にとどまり、観測データとの定量的な整合性や、異なるモデル間の優劣を統計的に検証した例は限られている。そのため、残光の多様性が示す物理的起源が、幾何学的効果に支配されているのか、あるいはジェットのダイナミクスや周辺環境の違いによるものなのかについて、明確な結論は得られていない。

本研究の目的は、GRB 残光の初期時間帯に見られる無彩色ピークを手がかりとして、ジェット構造・視線角・外部環境という複数の要因を統一的かつ定量的に評価することにある。具体的には、従来、主に定性的に扱われてきた off-axis jet の枠組みを拡張し、角度構造をもつジェットを開き角外方向から観測するモデルとジェットが有限の厚みをもつシェルとして放出され、外部媒質の密度が半径方向に冪乗的に変化する状況を考慮したモデルのそれぞれのモデルに基づく数値計算を行い、観測データとの比較を通じてモデルの妥当性を検証する。

モデルの検証にあたっては、従来の頻度論的手法や経験的なパラメータ調整ではなく、ベイズ推定に基づく統計的枠組みを採用する。これにより、モデルパラメータの事後確率分布を直接評価するとともに、異なる物理モデル間の比較を客観的に行うことが可能となる。

以上の解析を通じて本研究は、GRB 残光の多様性の背後にある幾何学的要因（視線角・ジェット構造）と環境的要因（外部媒質密度分布・シェル厚み）を切り分け、GRB ジェットの物理的性質およびその形成過程に対して新たな制約を与えることを目指す。さらに本研究は、個々の事例の説明にとどまらず、将来の高精度・広帯域観測時代における GRB 残光解釈の基盤を与えるものである。

1.4 本論文の構成

本論文は「ガンマ線バーストの可視・近赤外初期残光に対する理論モデルのベイズ推定による検証」と題し、7章の本文と付録から成る。第3章までは先行研究に基づく、GRB 理論およびベイズ推論の解説であり、第4章以降では本研究で実施した解析と得られた成果を中心に述べる。

第2章では、GRB 残光の放射機構および標準的な理論モデルの概要を述べる。まず、外部衝撃波によって加速された電子によるシンクロトロン放射の理論的枠組みを導入し、残光の時間発展およびスペクトル特性の基本的なスケールリング則を示す。さらに、ジェットの角度構造やシェルの厚み、外部媒質の密度分布といったモデル拡張の理論的背景について整理し、本研究で採用するパラメータ化の方針を明確にする。

第3章では、本研究で採用するベイズ推論の統計的解析手法について述べる。まず、ベイズ推定の基本概念とその物理モデル解析への適用方法を概説し、事後確率分布およびモデル証拠の評価に基づくモデル比較の理論的基盤を示す。次に、マルコフ連鎖モンテカルロ (MCMC) 法と Nested Sampling (CNS) 法それぞれに基づくサンプリング手法の解説を行う。

第4章では、既存の GRB 残光観測の中から本研究で解析対象とするイベントを選定し、観測データの取得、星間減光補正などの前処理手法と、観測データの系統的不確定性などの処理方針についても述べる。また、本研究で検討した理論モデルが実装され、数値計算ツールを概説し、本研究で実施した具体的な解析手順と実装について説明する。

第5章では、ジェットの角度構造、シェルの厚み、外部媒質の密度分布などを考慮した各モデル

を観測データに適用した結果を示す。ベイズ推定に基づく解析により、観測データがどのモデルを支持するか、およびパラメータにどのような制約が得られるかを明らかにする。さらに、モデル証拠に基づく比較検証の結果を示し、複数の理論モデルの相対的妥当性を評価する。

第6章では、得られたパラメータ分布およびモデル証拠に基づいて、異なるモデル間の適合度や物理的妥当性を議論する。また、GRBの放射メカニズムやジェット形成過程に対して得られた新たな示唆、およびベイズ推定手法の有効性と限界について考察する。

第7章では、本研究全体の成果を総括し、GRB残光における多様性の物理的起源、および今後の観測・理論研究への展望について述べる。

第2章 GRB 残光研究の理論的背景

本章では GRB 残光の放射メカニズムについて拠り所となる標準理論モデルを概説し、観測研究の進展により初期残光の振る舞いが明らかになったことで浮き彫りになった同モデルの限界を示す。続いて、この限界から示唆される、初期残光の理論的仮説を詳しく述べる。本研究ではこの理論的仮説の妥当性を検討することにより、GRB の発生起源や発生環境に関する新たな知見を得ることを目指す。

2.1 GRB 残光の標準理論モデル

まず、GRB 発生から即時放射と残光放射発生とその観測の全体的な概観を俯瞰する (Piran 2004; Zhang 2019; 河合誠之 et al. 2019)。大質量星は進化の果てに寿命を迎え、その中心核が重力崩壊を起こし、ブラックホールやマグネターが形成される。長時間 GRB の場合は、このブラックホールやマグネターの形成を通じて、相対論的ジェットが噴出することにより、ガンマ線バーストが引き起こされると考える (A.2章を参照)。

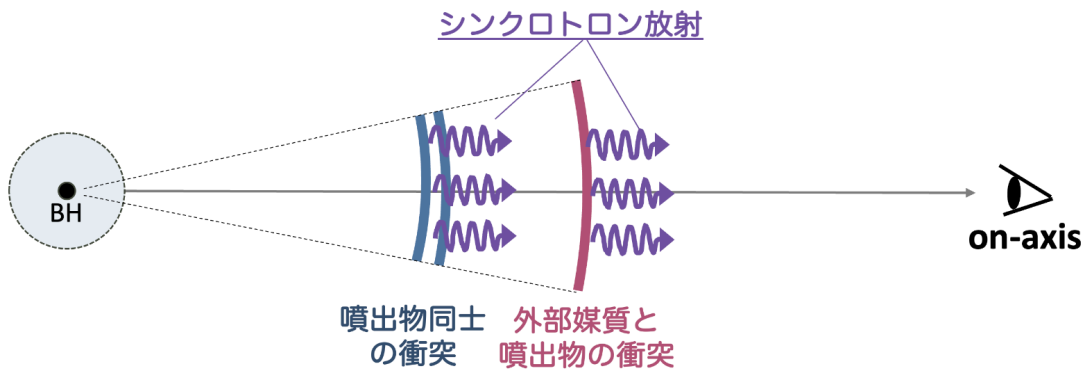


図 2.1: GRB の発生から即時放射と残光放射の発生とその観測の外観。

GRB 残光の標準理論モデルでは、相対論的ジェットが外部媒質と衝突して形成される外部衝撃波からの放射を、ジェット軸上のジェットの進行方向 (on-axis) から観測していると考えられる。外部衝撃波からの放射は、順行衝撃波により相対論的速度まで加速した電子からのシンクロトロン放射であり、電子のエネルギー分布は冪乗分布とする。また、電子と磁場のエネルギーは衝撃波の内部エネルギーから分配されたものと考えられる。さらに簡単のため、放射領域はジェット軸方向に均一 (one-zone) と近似し、ジェット軸に対する仰角方向のエネルギー分布も均一 (Top-hat jet) と近似するのが最も単純な仮定である。外部媒質としては星間物質 (Interstellar Medium; ISM) を想定した、一様密度を仮定するものが最も単純な仮定であるが、長時間 GRB の場合には、崩壊前の星か

らの星風 (Wind) による外部媒質の形成を想定し、冪乗分布を仮定する場合がある。本論文ではより単純なモデルとして ISM モデルを「標準モデル」と呼ぶ。

このように標準理論モデルでは、最も単純な描像を拠り所とすることで、観測結果と比較に用いられる基準モデルとして機能するとともに、各仮定や近似の妥当性や役割を理論的に検証するための出発点を与える。本節では標準理論モデルで用いられる物理について詳細に考え、そこから予言される GRB 残光の光度曲線を導く。

2.1.1 光源の相対論的運動の必要性

GRB の即時放射は、数百 keV から数 MeV にピークを持つ非常に明るいガンマ線放射であるが、このような短時間で莫大なエネルギーが狭い領域から放出されるとすると次のような問題が生じる。放射領域での光子密度が高くと、光子は電子・陽電子対生成により消滅し電子密度が高くなり光学的に厚くなる。そうすれば、ガンマ線の光子はこの領域の外に出ることができないはずである。しかし、実際には数百 keV から数 MeV のガンマ線を検出できている、という問題である。これを「コンパクトネス問題」と呼ぶ。Ruderman (1975) はこの一般的な問題について初めて議論した。まずはこの問題を以下では考える。

ガンマ線源の放射領域の大きさを R とし、この領域についての光学的厚さ τ を考える。光学的厚さ τ は考えている光子の平均自由行程 l を用いて次のように定義できる。

$$\tau \equiv \frac{R}{l} \quad (2.1)$$

放射領域のサイズが平均自由行程より大きい場合、つまり $\tau > 1$ を満たすとき、その光子は放射領域を抜け出てこれない。一方で $\tau < 1$ を満たす場合は、光子は放射領域を抜け出すことができ、観測者にまでその光子が届く可能性があることを示す。平均自由行程 l は、光子がほかの粒子に 1 回散乱されるまでの距離という定義から、粒子数密度 n と散乱断面積 σ を用いて次の関係式を満たす。

$$n\sigma l = 1 \quad (2.2)$$

粒子数密度 n は、放射領域を大雑把に半径 $R/2$ の球とおき、この球内にある粒子数を N とすれば

$$n = \frac{N}{\pi R^3/6} \quad (2.3)$$

とかけるので、光学的厚さ τ は定義式 (2.1) より式 (2.2) と式 (2.3) を用いて

$$\tau = \frac{6\sigma N}{\pi R^2} \quad (2.4)$$

と書き換えられる。

放射領域内でどれだけ電子・陽電子対生成が発生しどれだけの粒子数 N になるかを考えたい。そこでまず、電子・陽電子対生成の発生条件を考える。エネルギーを E 、運動量を $\mathbf{p}$ とし、それぞれ添字は衝突する 2 つのガンマ線光子を γ_1, γ_2 と書き、衝突により生成する電子陽電子を e^-, e^+ と書くと、衝突前後でエネルギーは保存されるので、

$$(E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2})^2 - c^2(\mathbf{p}_{\gamma_1} + \mathbf{p}_{\gamma_2})^2 = (E_{e^+} + E_{e^-})^2 - c^2(\mathbf{p}_{e^+} + \mathbf{p}_{e^-})^2 \quad (2.5)$$

が成り立つ。衝突前の2つの光子の運動方向がなす角を θ 、衝突後の2つの粒子の運動方向が成す角を ϕ とすれば式 (2.5) の左辺と右辺はそれぞれ次のように計算できる。

$$(\text{左辺}) = 2h\nu_1 h\nu_2 (1 - \cos \theta) \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= 2(m_e c^2)^2 + 2(E_{e+} E_{e-} - c\mathbf{p}_{e+} \cdot c\mathbf{p}_{e-}) \\ &= 2(m_e c^2)^2 + 2g(\phi, E_{e+}, E_{e-}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

ここで2つのガンマ線の振動数を ν_1 、 ν_2 とし、電子の質量を m_e とした。さらに、右辺の第二項を関数 $g(\phi, E_{e+}, E_{e-})$ で置き換えた。 $g(\phi, E_{e+}, E_{e-})$ は

$$g(\phi, E_{e+}, E_{e-}) = E_{e+} E_{e-} - \sqrt{E_{e+}^2 - (m_e c^2)^2} \sqrt{E_{e-}^2 - (m_e c^2)^2} \cos \phi \quad (2.8)$$

と書き直せるので、 $\phi = 0$ で ϕ について極値を取り、さらに、 $E_{e+} - E_{e-}$ 空間での関数の対称性により $E_{e+} = E_{e-} = m_e c^2$ で極値を取ることがわかる。したがって、右辺の最小値は

$$(\text{右辺}) = 2(m_e c^2)^2 + 2g(\phi = 0, E_{e+} = m_e c^2, E_{e-} = m_e c^2) = 4(m_e c^2)^2 \quad (2.9)$$

となる。以上より、次の不等式が成り立つ。

$$h\nu_1 \geq \frac{2(m_e c^2)^2}{h\nu_2(1 - \cos \theta)} = \frac{(m_e c^2)^2}{h\nu_2} \quad (\text{if } \theta = \pi) \quad (2.10)$$

この式は、電子・陽電子対生成を起こす、2つのガンマ線光子のエネルギーが満たすべき条件式である。それでは次に、光子のスペクトルを仮定して、具体的に生成された電子と陽電子の粒子数 N を計算する。ガンマ線バーストで観測される光子のスペクトルは冪乗分布を示しているので、光子スペクトル $N(E)$ [個 $\text{erg}^{-1} \text{s}^{-1} \text{cm}^{-2}$] を規格化定数 f を用いて

$$N_\gamma(E) = fE^{-\alpha} \quad (2.11)$$

とおくことにする。エネルギーの最大値を仮に $E_{\max}$ とおくと、対生成を起こすようなガンマ線光子の最低エネルギー $E_{\min}$ は先の式 (2.10) より

$$E_{\min} = \frac{(m_e c^2)^2}{E_{\max}} \quad (2.12)$$

である。電子・陽電子対生成を起こすガンマ線光子の総数 N_γ は、放射領域から距離 d だけ離れている観測者が観測する放射の継続時間 δT とし、光子の放射は等方的だとすると、距離 d における球面 (表面積 $4\pi d^2$) 上に一様に分布すると考えれば、

$$N_\gamma = \delta T \cdot 4\pi d^2 \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} N(E) dE \sim 4\pi d^2 \delta T \left(\frac{f}{\alpha - 1} \right) \left(\frac{(m_e c^2)^2}{E_{\max}} \right)^{1-\alpha} \quad (2.13)$$

と書き下せる。ここで、観測からわかっている $\alpha > 1$ と $E_{\max} \gg E_{\min}$ のもとで計算した。2つの光子が2つの粒子を生成するので、 $N = N_\gamma$ と扱って良い。さらに観測量であるエネルギーフラックス S [erg cm^{-2}] により規格化定数 f を決める。

$$\begin{aligned} S &= \delta T \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} E N(E) dE \sim \delta T \frac{f}{\alpha - 2} (E_{\min}^{2-\alpha}) \\ \therefore f &\sim (\alpha - 2) \frac{S E_{\min}^{\alpha-2}}{\delta T} \end{aligned} \quad (2.14)$$

以上から、観測者から距離 d 離れている放射領域でガンマ線光子が等方的に δT の間放射されることを考えたとき、この放射領域 R での電子・陽電子対生成による光学的厚さは式 (2.4) に式 (2.13) と式 (2.14) を代入し、

$$\tau \sim \frac{24\sigma S d^2}{R^2 m_e c^2} \left(\frac{\alpha - 2}{\alpha - 1} \right) \left(\frac{E_{\min}}{m_e c^2} \right)^{\alpha-2} \left(\frac{E_{\max}}{m_e c^2} \right)^{\alpha-1} \quad (2.15)$$

となる。さらに

$$S_\gamma = \left(\frac{\alpha - 2}{\alpha - 1} \right) \left(\frac{E_{\min}}{m_e c^2} \right)^{\alpha-2} \left(\frac{E_{\max}}{m_e c^2} \right)^{\alpha-1} S \quad (2.16)$$

とおけば

$$\tau \sim \frac{24\sigma S_\gamma d^2}{R^2 m_e c^2} \quad (2.17)$$

と書き直せる。

仮に、放射領域全体から瞬間的に放たれたガンマ線光子を観測していると考え、放射の継続時間 δT は放射領域のうち観測者から最も遠い場所から放たれた光子が観測者に届く時刻 T_1 と放射領域のうち観測者から最も近い場所から放たれた光子が観測者に届く時刻 T_2 の差分の時間だけ観測者にとっては放射が継続するので、

$$\delta T = T_1 - T_2 = \frac{R + d}{c} - \frac{d}{c} = \frac{R}{c} \quad (2.18)$$

とかける。見かけの放射の継続時間から放射領域のサイズ $R = c\delta T$ を推定できるので、典型的な観測と物理定数 $m_e c^2 = 8.19 \times 10^{-7}$ erg、 $\sigma_T = 6.65 \times 10^{-25}$ cm² ($\sigma = 11\sigma_T/180$) を代入すれば

$$\tau \sim 10^{10} \left(\frac{c\delta T}{3 \times 10^{10} \text{ cm}} \right)^{-2} \left(\frac{S_\gamma}{10^{-7} \text{ erg cm}^{-2}} \right) \left(\frac{d}{10^{27} \text{ cm}} \right)^2 \gg 1 \quad (2.19)$$

となり、光学的に厚いことがわかる。このように高エネルギーの放射を短時間で観測するということは、物理的には光学的に厚い状態のため矛盾が生じるという問題が出てくる。

そこで、この問題に対し Goodman (1986) や Paczynski (1986) が放射体は相対論的運動をしていれば解決できると提案した。放射体が観測者に向かって速度 $v = \beta c$ で運動している状況を考える。半径 R の放射体がローレンツ因子 $\Gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ で運動している場合、相対論的ビーミング効果により、観測者から見ると放射体進行方向に放射が集中しているように見える。したがって、観測する放射の継続時間 δT は、観測者系で見て放射領域が観測者に最も近い場所から放出された光子の伝播時間 T_1 と観測者系で見て放射領域が観測者から最も遠い場所から放出された光子の伝播時間 T_2 の差分であるから、

$$\delta T = T_2 - T_1 = \frac{R}{c} \left(1 - \cos \frac{1}{\Gamma^2} \right) \sim \frac{R}{2\Gamma^2 c} \quad (2.20)$$

となる。したがって、放射領域のサイズの見積りは光源が静止しているときに比べて Γ^2 倍も大きいスケールが許容されることになる。さらに、相対論的ドップラー効果により観測される光子の振動数 ν_{obs} は放射体静止系での振動数 ν_{rest} に対して Γ 倍されるので、放射領域での電子・陽電子対生成条件式は

$$h\nu_{\text{obs},1} \geq \frac{\Gamma^2 (m_e c^2)^2}{h\nu_{\text{obs},2}} \quad (2.21)$$

と修正される。つまり、これは電子・陽電子対生成する光子のエネルギー下限値が Γ^2 倍され、対生成が起こる条件が厳しくなる傾向に修正される。従って、電子陽電子対生成を起こす光子の数 N_γ は

$$N_\gamma \sim 4\pi d^2 \delta T \left(\frac{f}{\alpha - 1} \right) \left(\frac{\Gamma^2 (m_e c^2)^2}{E_{\max}} \right)^{1-\alpha} \quad (2.22)$$

となる。以上から、観測者から距離 d 離れていた放射体がローレンツ因子 Γ で観測者に向かって運動している場合の、放射領域 R での電子・陽電子対生成による光学的厚さ τ_{rel} は

$$\tau_{\text{rel}} \sim \frac{24\sigma S_\gamma d^2}{R^2 m_e c^2} \Gamma^{2-2\alpha} \sim \tau \Gamma^{-2-2\alpha} \quad (2.23)$$

となる。観測的には $\alpha \sim 2.5$ なので、光学的厚さのローレンツ因子の依存性は $\propto \Gamma^{-7}$ である。式 (2.19) より d, R, S_γ に観測的な典型値を代入すれば $\tau \sim 10^{10}$ であるため、ローレンツ因子が $\Gamma \sim 10^{1.5}$ 以上、おおよそ 30 を超えていれば、 $\tau_{\text{rel}} < 1$ となることがわかる。つまり、放射体がローレンツ因子 $\Gamma \gtrsim 30$ で運動すれば観測事実の矛盾は解消され、コンパクトネス問題が解決される。しかし、実際の GRB では、高エネルギー光子 (GeV・TeV) の検出やミリ秒以下の時間変動を同時に説明する必要があり、これらを考慮すると、おおよそ $\Gamma > 10^2$ が要求される。

以上より、観測により宇宙論的遠方で発生している ($d \sim 10^{27}$ cm) ことが明らかとなった現代では、GRB 残光の起源は相対論的な運動をしているような天体であると考えるのが最も一般的であり本論文でもこれを大前提に議論を進める。

2.1.2 相対論的效果と宇宙論的效果

前節では放射体が相対論的な運動をしている必要性について述べた。そこで、本節では放射体静止系（共同座標系とも呼ぶ）、外部慣性系（中心エンジン静止系・実験室系とも呼ぶ）、観測者系の 3 つの座標系間でローレンツ変換や光の伝播における効果を整理する。本節以降では、放射体静止系での物理量には全て「 $'$ (ダッシュ)」をつけるものとし、また時間座標を放射体静止系では t' 、外部慣性系では t 、観測者系では T において議論を進める。

外部慣性系において中心エンジン、放射体、観測者が存在する平面内で中心エンジンを原点とする極座標 (r, θ) を貼る。放射体の座標を $(r, \theta) = (R, \theta_e)$ とし、時間原点 $t = 0$ で $R = 0$ とする。また、放射体の速度は $v = \beta c$ (ローレンツ因子 $\Gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$) とする。一方で、観測者の座標は $(r, \theta) = (R_{\text{obs}}, \theta_{\text{obs}}) = (R + d, \theta_e + \psi)$ とする。

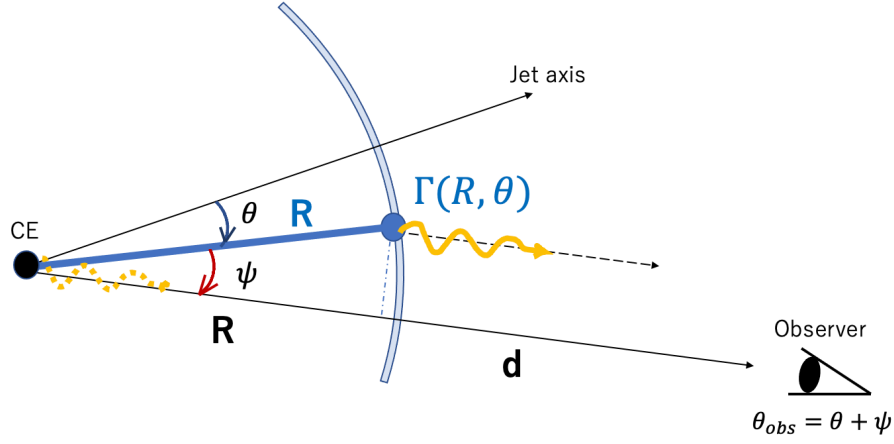


図 2.2: jet-axis と放射体・観測者の位置関係.

観測者系での時間原点 $T = 0$ を、放射体が $R = 0$ で放った光子が観測者に届く時刻と定義すれば、放射体が座標 (R, θ_e) で放った光子が観測者に到達する時刻 T は

$$T = \frac{R}{\beta c} + \frac{d + R - R \cos \psi}{c} - \frac{R + d}{c} = (1 - \beta \cos \psi)t = (1 - \beta \cos \psi)\Gamma t' \quad (2.24)$$

とかける。ただし 3 つ目のイコールはローレンツ変換により得られる時間の伸びの効果 $t' = t/\Gamma$ を用いた。ここで、ドップラー因子

$$D \equiv \frac{1}{\Gamma(1 - \beta \cos \psi)} \sim \frac{2\Gamma}{\Gamma^2 \psi^2 + 1} \quad (2.25)$$

を定義する。ただし、近似式は $\beta \sim 1$ 、 $\psi \ll 1$ のもとで成り立つ。以上をまとめると 3 つの座標系の時間は次の簡単な式で結びつく。

$$T = \frac{1+z}{\Gamma D} t = \frac{1+z}{D} t' \quad (2.26)$$

ここで、宇宙膨張による時間間隔の伸びの効果を考慮し赤方偏移 z を用いた因子を導入した。以降の計算の簡易化のために、放射体の位置 R を明示的に書き下した近似式も示しておく。

$$T \sim \frac{1+z}{\Gamma D} \frac{R}{c} \sim \begin{cases} (1+z) \frac{R}{2c} \psi^2 & (\Gamma^2 \psi^2 \gg 1), \\ (1+z) \frac{R}{2c\Gamma^2} & (\Gamma^2 \psi^2 \ll 1). \end{cases} \quad (2.27)$$

なお、 β や Γ は一般には時間変化するが、各時刻各位置 (t, R, θ_e) で上記の関係式は成り立つ。

経過時間が座標系によって式 (2.26) に従い変化するため、放射体静止系で放つ光の周波数 ν' と観測者系で観測される周波数 ν_{obs} は、宇宙膨張による距離の伸びの効果も考慮すると

$$\nu_{\text{obs}} = \frac{D}{1+z} \nu' \quad (2.28)$$

の関係で結びつく。

2.1.3 等到着時刻面 (Equal arrival time surface)

観測者時間のある時刻 t_{obs} で検出される光子は CE 系で同時に放射されたものではない。なぜなら、点源球対称爆発であるならば、図2.3に示すように放射体は曲率を持っていると考えられ、観測者までの距離が放射体の進行方向と観測者方向のなす角度に依存して異なるからである。

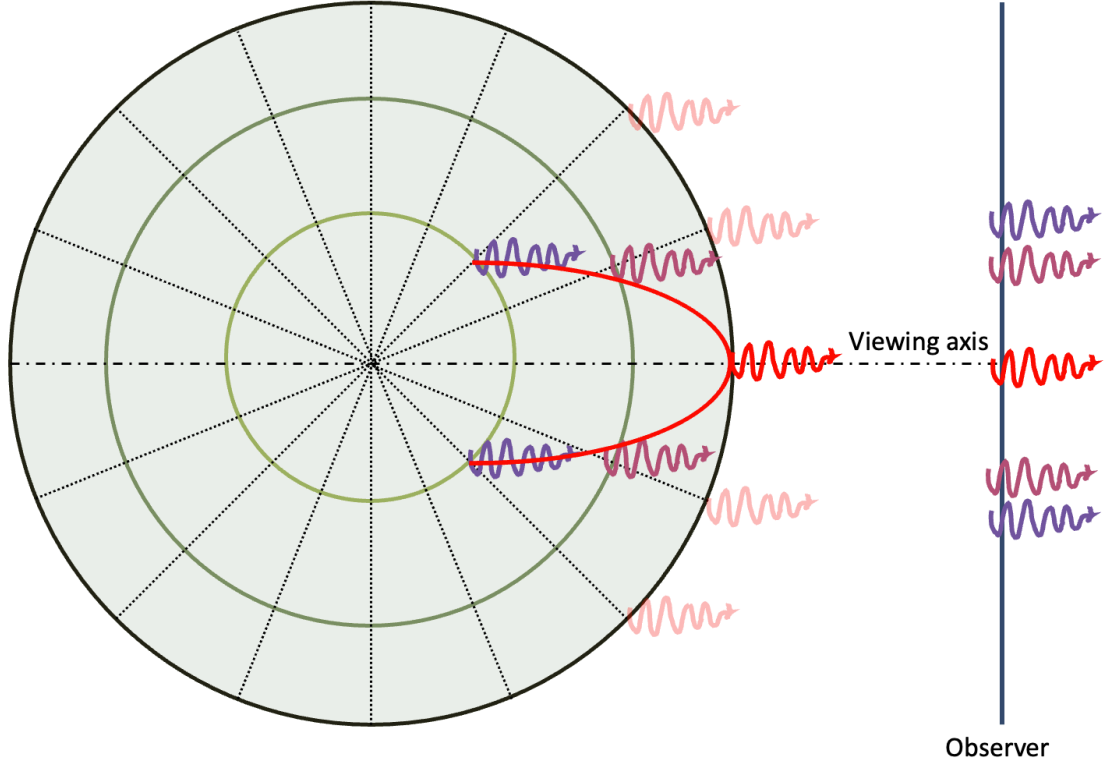


図 2.3: 等到着時刻面: Equal arrival time surface

観測者のいる場所に同時に届く光子が放射される場所を、結ぶことで成す曲面（図2.3は CE が通る面で切った断面図なので赤で示した曲線に相当）を Equal arrival time surface (EATS) という (Granot 2005; Waxman 1997)。ここでは “THE PHYSICS OF GAMMA-RAY BURST” (Zhang 2019) の教科書や Huang et al. (2000) を参考に、EATS を表す方程式を導く。これまでの議論と同様、CE 系での四元座標を次のように定義する。

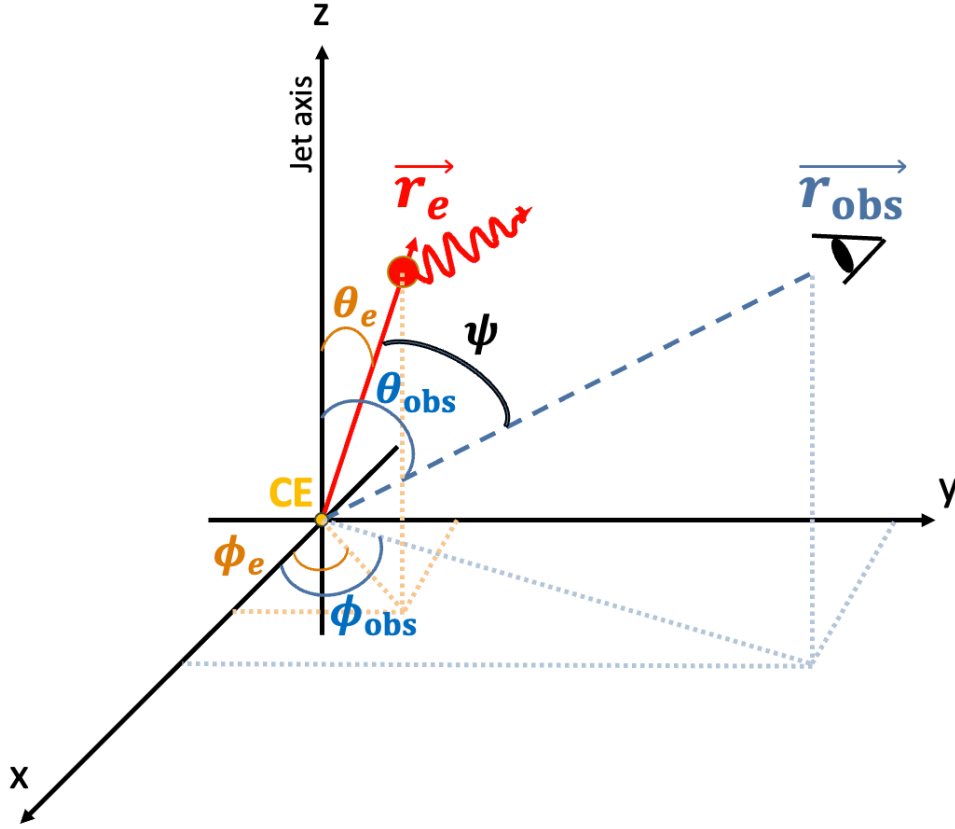


図 2.4: 外部慣性系の中心エンジン (CE) を原点とした座標

- 爆発原点: $(ct, r, \theta, \phi) = (0, 0, 0, 0)$,
- ジェットの中心軸: $(\theta, \phi) = (0, 0)$
- 放射体を構成する点光源の放射時刻と放射位置、進行方向: $(ct_e, r_e, \theta_e, \phi_e)$,
- 観測者が観測する時刻、観測者のいる位置・方向: $(ct_{\text{obs}}, r_{\text{obs}}, \theta_{\text{obs}}, \phi_{\text{obs}})$.

点光源は速度 $v = \beta c$ で運動しているとする、

$$r_e = \beta ct_e \quad (2.29)$$

という関係を満たす。また、点光源が放射を継続する時間 dt_e は観測者時間 dt_{obs} との関係は

$$t_{\text{obs}} + dt_{\text{obs}} = t_e + dt_e + \frac{r_{\text{obs}} - r_e \cos \psi - \beta \cos \psi c dt_e}{c} \quad (2.30)$$

$$t_{\text{obs}} = t_e + \frac{r_{\text{obs}} - r_e \cos \psi}{c} \quad (2.31)$$

であるから、

$$dt_{\text{obs}} = (1 - \beta \cos \psi) dt_e \quad (2.32)$$

とかける。ただし、 ψ は放射体の進行方向と観測者の方向のなす角度であり、以下で書き表される。

$$\cos \psi = \frac{\vec{r}_{\text{obs}} \cdot \vec{r}_e}{|\vec{r}_{\text{obs}}| |\vec{r}_e|} = \cos(\phi_{\text{obs}} - \phi_e) \sin \theta_{\text{obs}} \sin \theta_e + \cos \theta_{\text{obs}} \cos \theta_e \quad (2.33)$$

今、観測者時刻 t_{obs} に同時に到着する光子の放射される位置 r_e や方向 θ_e 、 ϕ_e の集合 (= EATS) を知りたい。式 (2.32) の両辺に光速 c をかけて、式 (2.29) を用いると、

$$cdt_{\text{obs}} = (1 - \beta \cos \psi) \frac{dr_e}{\beta} \quad (2.34)$$

と式変形できる。観測者時刻 t_{obs} から $t_{\text{obs}} + dt_{\text{obs}}$ に届く放射をする点光源 r_e の足し合わせが EATS である。したがって、式 (2.34) を両辺積分して変形した式

$$t_{\text{obs}} = \int_0^r \frac{1 - \beta \cos \psi}{\beta c} dr_e \quad (2.35)$$

が EATS を求めるための方程式である。EATS 面上の放射を積分することで、観測される光度曲線やスペクトル進化を計算する。ただし、2.1.7 節では、簡単のために、EATS 面での積分値ではなく点光源からの放射による光度曲線を示す。

2.1.4 相対論的衝撃波

相対論的ジェットが形成する外部衝撃波は相対論的衝撃波である。ここでは相対論的衝撃波による物理量の変化と、外部衝撃波の構造について考える。「放射体」とこれまで呼んでいたものは、外部衝撃波を構成する下流領域として扱うのが標準的である。また、GRB 残光の主成分は順行衝撃波からの放射であると仮定する背景について説明する。

まず、相対論的衝撃波の衝撃波面静止系での物理量の変化についてレビューを行う。このレビューは主に教科書『特殊相対論』(高原文郎 2012) に従い、簡単のため、ダッシュ (') は一時的に省略して記述する。流体の物理量として、速度を $v_i = \beta_i c$ 、ローレンツ因子を γ_i 、圧力を p_i 、エネルギー密度を ϵ_i 、質量密度を n_i とし、上流側の物理量には添字 $i = 1$ 、下流側の物理量には添字 $i = 2$ をつけて表す。また、上流から下流に向かう向きを正とする。

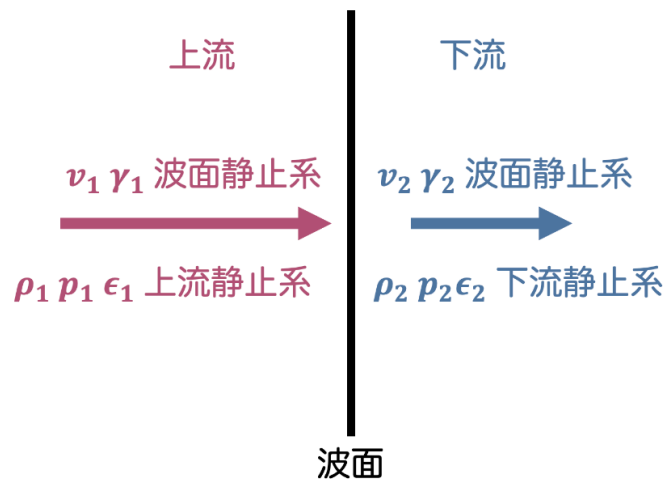


図 2.5: 相対論的衝撃波の構造

この時、衝撃波面前後でのエネルギーと運動量の保存則はそれぞれ

$$\frac{\epsilon_1 + p_1}{c^2} \gamma_1^2 v_1 = \frac{\epsilon_2 + p_2}{c^2} \gamma_2^2 v_2, \quad (2.36)$$

$$\frac{\epsilon_1 + p_1}{c^2} \gamma_1^2 v_1^2 + p_1 = \frac{\epsilon_2 + p_2}{c^2} \gamma_2^2 v_2^2 + p_2, \quad (2.37)$$

とかける。この式を整理すれば、上流と下流の速度をそれぞれ次のように熱力学量 (ϵ_i, p_i) で書き表せる。

$$\beta_1 = \frac{v_1}{c} = \sqrt{\frac{(p_2 - p_1)(\epsilon_2 + p_1)}{(\epsilon_2 - \epsilon_1)(\epsilon_1 + p_2)}} \quad (2.38)$$

$$\beta_2 = \frac{v_2}{c} = \sqrt{\frac{(p_2 - p_1)(\epsilon_1 + p_2)}{(\epsilon_2 - \epsilon_1)(\epsilon_2 + p_1)}} \quad (2.39)$$

詳細な計算過程はA.8節を参照。さらに、対応するローレンツ因子はそれぞれ、

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} = \sqrt{\frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)(\epsilon_1 + p_2)}{(\epsilon_1 + p_1)(\epsilon_2 - \epsilon_1 - p_2 + p_1)}} \quad (2.40)$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_2^2}} = \sqrt{\frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)(\epsilon_2 + p_1)}{(\epsilon_2 + p_2)(\epsilon_2 - \epsilon_1 - p_2 + p_1)}} \quad (2.41)$$

となる。以上から、上流と下流の流体間の相対速度 v_{rel} とこれに対応するローレンツ因子 γ_{rel} は

$$\beta_{\text{rel}} = \frac{v_{\text{rel}}}{c} = \frac{\beta_1 - \beta_2}{c(1 - \beta_1 \beta_2)} = \sqrt{\frac{(p_2 - p_1)(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{(\epsilon_1 + p_2)(\epsilon_2 + p_1)}} \quad (2.42)$$

$$\gamma_{\text{rel}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{\text{rel}}^2}} = \gamma_1 \gamma_2 (1 - \beta_1 \beta_2) = \sqrt{\frac{(\epsilon_1 + p_2)(\epsilon_2 + p_1)}{(\epsilon_1 + p_1)(\epsilon_2 + p_2)}} \quad (2.43)$$

となる。

さらに、上流の物理量を与えて下流の物理量を得ること、つまり相対論的衝撃波の場合のランキン・ユゴニオの関係式を考える（非相対論的な衝撃波におけるレビューはA.7節を参照）。エネルギー保存則の式 (2.36) と運動量保存則の式 (2.37) に加え、粒子数保存の式

$$n_1 \gamma_1 v_1 = n_2 \gamma_2 v_2 \quad (2.44)$$

を連立させて、速度とローレンツ因子を消去し整理すると、

$$\frac{(\epsilon_1 + p_1)(\epsilon_1 + p_2)}{n_1^2} = \frac{(\epsilon_2 + p_2)(\epsilon_2 + p_1)}{n_2^2} \quad (2.45)$$

を得る（詳細な計算過程についてはA.8節を参照）。式 (2.45) が相対論的な場合のランキン・ユゴニオ関係式であり、この式と上流の速度 β_1 （式 (2.38)）と状態方程式とを合わせて下流の物理量 (ϵ_2, p_2, n_2) を求められ、式 (2.39) から v_2 も求められる。

ここで簡単な例として、強い衝撃波の極限 ($p_1 = 0$, $\epsilon_1 = n_1 mc^2$) の場合を考える。これは、上流の流体 (ガンマ線バーストの場合は星間空間) が cold な場合に対応している。このとき、ランキン・ユゴニオ関係式から

$$\frac{\epsilon_2}{n_2} = \gamma_{\text{rel}} mc^2 \quad (2.46)$$

となり、下流の一流紙あたりの内部エネルギーが γ_{rel} になることがわかる。さらに、状態方程式として

$$p = (\gamma_c - 1)(\epsilon - nmc^2) \quad (2.47)$$

を採用すると、 $\epsilon_2 = p_2/(\gamma_c - 1) + n_2 mc^2$ とかけることから、

$$\frac{p_2}{n_2} = (\gamma_c - 1)(\gamma_{\text{rel}} - 1)mc^2 \quad (2.48)$$

を得る。これらをランキン・ユゴニオの関係式に代入し、衝撃波面前後での数密度比を求めると

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\gamma_{\text{rel}}\gamma_c + 1}{\gamma_c - 1} \quad (2.49)$$

を得る。相対論的粒子 ($\gamma_c = 4/3$) の場合、

$$\begin{aligned} \frac{n_2}{n_1} &= \frac{(4/3)\gamma_{\text{rel}} + 1}{(4/3) - 1} = 4\gamma_{\text{rel}} + 3 \\ \therefore n_2 &\sim 4\gamma_{\text{rel}}n_1 \end{aligned} \quad (2.50)$$

となり、これを式 (2.46) や式 (2.48) に代入して、

$$\epsilon_2 = n_2 \gamma_{\text{rel}} mc^2 \sim 4n_1 mc^2 \gamma_{\text{rel}}^2 \quad (2.51)$$

$$p_2 = n_2 \{(4/3) - 1\}(\gamma_{\text{rel}} - 1)mc^2 \sim \frac{4}{3}n_1 mc^2 \gamma_{\text{rel}}^2 \quad (2.52)$$

となる。このように、上流の物理量を与えれば下流の物理量を得ることができる。

一般に、2つの冷たい流体が衝突するとその流体の境界に「接触不連続面」が形成され、その境界の前方と後方にそれぞれ「順行衝撃波」と「逆行衝撃波」が生じ、3つの不連続面で仕切られた4つの領域を形成する (非相対論的の詳細は付録A.7を参照)。以下ではガンマ線バースト残光の発生の描像と照らし合わせて、相対論的衝撃波を扱っていく。接触不連続面は噴出物 (ejecta) と星間空間の境目に対応しており、順行衝撃波の星間空間を通過していない領域が「上流1」、順行衝撃波の星間空間を通過した領域が「下流2」とする。一方、逆行衝撃波の ejecta を通過した領域が「下流3」、通過していない領域が「上流4」とする。接触不連続面では下流2と3の圧力が釣り合っている。接触不連続面静止系では、順行衝撃波と逆行衝撃波が接触不連続面から遠ざかっていく。

一方で、ここでは上流の物理量を与えて、下流の物理量を知るために、まずは衝撃波面静止系で議論する。順行衝撃波静止系では、上流1と下流2が負の方向に流れていくように見え、逆行衝撃波は静止系では、下流3と下流4が正の方向に流れていくように見える。それぞれの衝撃波面静止系で定義される流体のローレンツ因子を γ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) で示し、上流1と下流2の相対ローレンツ因子を γ_{12} 、下流3と上流4の相対ローレンツ因子を γ_{34} とする。それぞれの衝撃波面静止系での4つの領域の構造を図2.6に示す。

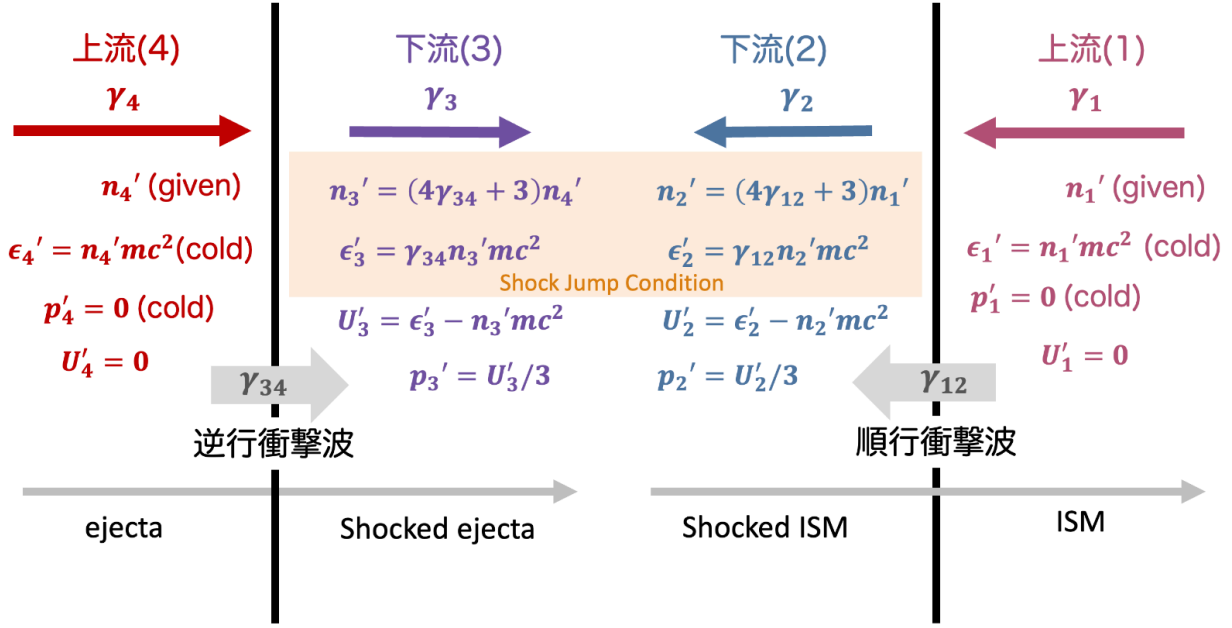


図 2.6: 順行衝撃波面静止系および逆行衝撃波面静止系から見た 4 つの領域の流体の構造。

それぞれ衝撃波面前後では、相対論的な場合のランキン・ユゴニオ関係式 (2.45) が成り立つので、強い衝撃波 ($p_{\text{up}} \sim 0$, $\epsilon_{\text{up}} \sim n_{\text{up}} mc^2$)、つまり上流 1 と 4 が cold な場合は式 (2.46) から、

$$\frac{n_2'}{n_1'} = 4\gamma_{12} + 3 \sim 4\gamma_{12} \quad (2.53)$$

$$U_2' = \epsilon_2 - n_2' mc^2 = (\gamma_{12} - 1)n_2' mc^2 \sim \gamma_{12} n_2' mc^2 \quad (2.54)$$

$$\frac{n_3'}{n_4'} = 4\gamma_{34} + 3 \quad (2.55)$$

$$U_3' = \epsilon_3 - n_3' mc^2 = (\gamma_{34} - 1)n_3' mc^2 \quad (2.56)$$

が成り立つ (Blandford et al. 1976)。ただし、 U_2' と U_3' はそれぞれ下流 2、下流 3 の内部エネルギー密度である。

外部慣性系 (上流 1 静止系) では、これらの衝撃波は中心エンジンから遠ざかる方向へ運動しているように見える。外部慣性系で定義される流体のローレンツ因子を Γ_i ($i = 0, 1, 2, 3$) で示し、外部慣性系で定義される順行衝撃波のローレンツ因子を Γ_{FS} 、逆行衝撃波の相対ローレンツ因子を Γ_{RS} とする。ただし、ここで上流 4 の外部慣性系から見たローレンツ因子の添字は便宜上 4 ではなく 0 とした。外部慣性系での 4 つの領域の構造を図 2.7 に示す。

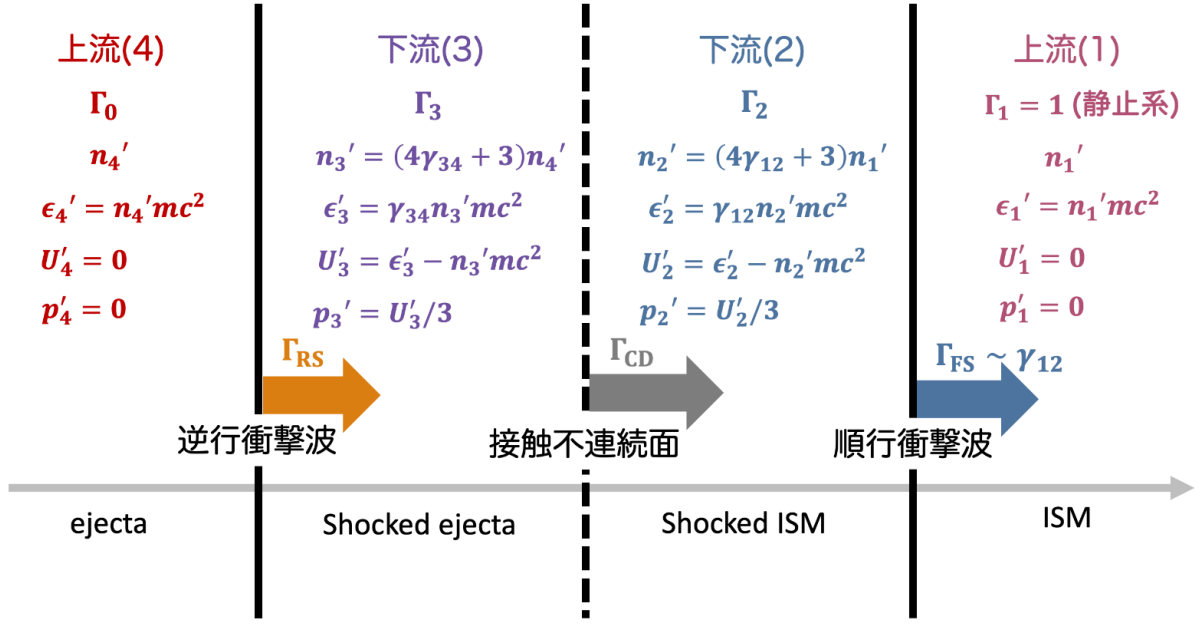


図 2.7: 外部慣性系 (中心エンジン静止系・実験室系) から見た 4 つの領域の流体の構造。
外部慣性系で定義される流体のローレンツ因子を Γ_i ($i = 0, 1, 2, 3$) で示し、外部慣性系で定義される順行衝撃波のローレンツ因子を Γ_{FS} 、逆行衝撃波の相対ローレンツ因子を Γ_{RS} とする。ただし、それぞれの流体静止系での物理量にはダッシュ (') をつけて示している。

順行衝撃波の相対ローレンツ因子 γ_{12} は、上流 1 の静止系 ($\gamma_1 = 1$) から見た下流 2 の速度に対応するローレンツ因子なので、

$$\gamma_{12} = \gamma_1 \gamma_2 (1 - \beta_1 \beta_2) = \gamma_2 \quad (\because \gamma_1 = 1, \beta_1 = 0) \quad (2.57)$$

と書き換えられ、さらにこれは外部慣性系 (= 上流 1 静止系) での順行衝撃波 Γ_{FS} と同等である。また、外部慣性系から見た下流 2 のローレンツ因子 Γ_2 は、シェル内部の構造を詳細に考えれば半径 R に依存する量だが、逆行衝撃波が ejecta を通過する前段階であれば、一様だと仮定して $\Gamma_2 = \Gamma_{FS}$ と扱える。つまり、

$$\Gamma_{FS} = \Gamma_2 = \gamma_{12} \sim \gamma_2 \quad (2.58)$$

である。また、接触不連続面で接している下流 2 と 3 のそれぞれの静止系での圧力 p_2' と p_3' は釣り合っているので、外部慣性系から見た下流 2 と下流 3 は同じ速度で運動しているとみなすことができ、

$$\Gamma_3 = \Gamma_2 = \Gamma_{FS} = \gamma_{12} \sim \gamma_2 \quad (2.59)$$

である。逆行衝撃波の相対ローレンツ因子 γ_{34} は

$$\gamma_{34} = \Gamma_3 \Gamma_4 (1 - \beta_3^{\text{lab}} \beta_4^{\text{lab}}) \sim \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma_0}{\Gamma_3} + \frac{\Gamma_3}{\Gamma_0} \right) \quad (2.60)$$

とかける。ただし、 β_i^{lab} は外部慣性系から見たそれぞれの流体の速度を光速で割った量である。一方で、 γ_3 や γ_4 は実験室系から見た逆行衝撃波から見た、実験室系から見た領域 3 の速度の合成、そ

して、実験室系から見た逆行衝撃波から見た、実験室系から見た領域 4 の速度の合成であるので、

$$\gamma_3 = \Gamma_3 \Gamma_{RS} (1 - \beta_3^{\text{lab}} \beta_{RS}) \sim \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma_{RS}}{\Gamma_{FS}} + \frac{\Gamma_{FS}}{\Gamma_{RS}} \right) \quad (2.61)$$

$$\gamma_4 = \Gamma_0 \Gamma_{RS} (1 - \beta_4^{\text{lab}} \beta_{RS}) \sim \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma_{RS}}{\Gamma_0} + \frac{\Gamma_0}{\Gamma_{RS}} \right) \quad (2.62)$$

という関係性で結ばれる。なお、下流 (3) から見た上流 (4) の相対ローレンツ因子 γ_{34} は、衝撃波面静止系で見ても、実験室系で見ても同じ値になるはずであり、

$$\gamma_{34} = \gamma_3 \gamma_4 (1 - \beta_3 \beta_4) = \Gamma_3 \Gamma_4 (1 - \beta_3^{\text{lab}} \beta_4^{\text{lab}}) \sim \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma_0}{\Gamma_3} + \frac{\Gamma_3}{\Gamma_0} \right) \quad (2.63)$$

とかける。

ところで、接触不連続面前後でも流体の運動量フラックスが保存していることから、 $p'_2 = p'_3$ が成り立つので、この等式と式 (2.53)、式 (2.54)、式 (2.55)、式 (2.56)、を連立させると、以下のように上流 1 と 4 の密度比が 2 つの相対ローレンツ因子 γ_{12} と γ_{34} の関係を決める式を得る。

$$\frac{n'_4}{n'_1} = \frac{(\gamma_{12} - 1)(4\gamma_{12} + 3)}{(\gamma_{34} - 1)(4\gamma_{34} + 3)} \quad (2.64)$$

式 (2.64) を $\Gamma_{FS} = \gamma_{12} \gg 1$ のもとで、式 (2.59)、式 (2.60) を用いて式変形すると、次に示すように外部慣性系における順行衝撃波（ないしは下流 2、3）のローレンツ因子を書き下すことができる。

$$\Gamma_{FS} = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \frac{\Gamma_0}{\left[1 + 2\Gamma_0 \sqrt{\frac{n'_1}{n'_4}} \right]^{1/2}} \quad (2.65)$$

これは下流 2 と 3 が接触不連続面で釣り合っている（式 (2.64) が成立する）ことと、外部慣性系から見て順行衝撃波、下流 3 と 4 が相対論的な運動をしている（ $\Gamma_{FS}, \Gamma_3, \Gamma_4 \gg 1$ ）ことが満たされている場合に成り立つ。

逆行衝撃波が ejecta を通過する間にシェルのダイナミクスを特徴づける 4 つの半径（逆行衝撃波の相対ローレンツ因子が相対論的になる半径 R_N 、逆行衝撃波が ejecta を横切る半径 R_Δ 、シェルがかき集める外部物質のエネルギーが爆発エネルギーに匹敵する半径 R_γ 、シェルの厚みの膨張が無視できなくなる半径 R_{sp} ）を示す (Sari et al. 1995)。ここで、非相対論的なシェルがかき集めた周囲の物質エネルギー $M_{\text{sp}} c^2$ が爆発物の総エネルギー E_0 と等しくなる半径をセドフ長 l_S と定義すれば、

$$l_S \equiv \left(\frac{3E_0}{4\pi n_{\text{ex}} m_p c^2} \right)^{\frac{1}{3}} \sim 1.2 \times 10^{18} \text{ cm} \left(\frac{E_0}{10^{52} \text{ erg}} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{n_{\text{ex}}}{1 \text{ cm}^{-3}} \right)^{-\frac{1}{3}} \quad (2.66)$$

とかける。ただし n_{ex} は一様な外部物質密度、 m_p は陽子の質量である。

逆行衝撃波の相対ローレンツ因子が相対論的である条件は、 $\gamma_{34} \gg 1$ を満たすことであり、これを満たす半径 R_N を考える。式 (2.60) より、 $\gamma_{34} \gg 1$ は $\Gamma_0 \gg \Gamma_3$ と書き換えられる。従って、逆行衝撃波の相対ローレンツ因子が相対論的であるとき、 $\gamma_{34} \sim \Gamma_0 / 2\Gamma_3$ と近似できる。式 (2.65) より Γ_3 を消去し、

$$\gamma_{34} \sim \frac{1}{2} \left(1 + 2\Gamma_0 \sqrt{\frac{n'_1}{n'_4}} \right)^{1/2} \gg 1 \implies \frac{\Gamma_0^2}{n'_4 / n'_1} \gg 1 \quad (2.67)$$

と逆行衝撃波の相対ローレンツ因子が相対論的になる条件を書き換えられる。 n'_4 は上流 4 の粒子数密度、すなわち ejecta 静止系での粒子数密度であり、 n'_1 は上流 1 の粒子数密度、すなわち外部物質の粒子数密度 $n'_1 = n_{\text{ex}}$ である。ejecta の初期幅が Δ_0 であるとき全粒子数を N_0 とすれば、

$$n'_4 = \frac{N_0}{4\pi R^2 \Delta_0} = \frac{E'_0/(\Gamma_0 m_p c^2)}{4\pi R^2 \Delta_0} \quad (2.68)$$

さらに $E_0 = \Gamma_0 E'_0$ だから

$$\frac{n'_4}{n'_1} = \frac{E_0}{4\pi n_{\text{ex}} m_p c^2 R^2 \Delta_0 \Gamma_0^2} = \frac{l_S^3}{3R^2 \Delta_0 \Gamma_0^2} \quad (2.69)$$

とかける。これより、半径 R が大きくなればなるほど n'_4/n'_1 は小さくなるので、式 (2.67) を満たす半径が存在し、このとき逆行衝撃波は下流 3 に対して相対論的になる。 $\Gamma_0^2 = n'_4/n'_1$ を満たす半径を R_N とすれば

$$R_N = \frac{l_S^{3/2}}{\sqrt{3\Delta_0 \Gamma_0^2}} \quad (2.70)$$

となる。次に、逆行衝撃波が ejecta を横切る半径 R_Δ を求める。逆行衝撃波が ejecta を横切るのにかかる時間（外部慣性系）は逆行衝撃波の相対ローレンツ因子が相対論的であるか否かに関わらず、

$$t_\Delta \sim \frac{\Gamma_0 \sqrt{n'_4/n'_1} \Delta_0}{c} \quad (2.71)$$

と評価できるので（詳細は A.8 節を参照）、

$$R_\Delta \sim ct_\Delta \sim \left(\frac{l_S^3 \Delta_0}{3} \right)^{1/4} \quad (2.72)$$

となる。次に、シェルがかき集める外部物質のエネルギーが爆発エネルギーに匹敵する半径 R_γ について考える。今、外部物質の密度分布は一様を仮定しているので、半径 R_γ までにシェルが掃き集める物質のエネルギーは $4\pi R_\gamma^3 n_{\text{ex}} m_p c^2 \Gamma_0^2 / 3$ と見積もれ、これが爆発エネルギー E_0 と等しくなるので、

$$R_\gamma = l_S \Gamma_0^{-2/3} \quad (2.73)$$

となる。最後に、ejecta の厚みの膨張が無視できなくなる半径 R_{sp} を考える。これまで、ejecta の幅 Δ_0 は中心エンジンから噴出したときの幅がそのままであると仮定して考えてきた。しかし、実際にはシェルの中に速度分散が存在し、半径に応じて ejecta 幅が変化しているはずである。ejecta 内部の前方を走る物質の速度を β_F 、後方を走る物質の速度を β_B とし、半径 R でのシェル幅を $\Delta(R)$ とすると、

$$\Delta(R) = \Delta_0 + (\beta_F - \beta_B)ct = \Delta_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma_F^2} + \frac{1}{\gamma_B^2} \right) R \quad (2.74)$$

ここで、前方の物質の方が後方の物質よりも速く運動している、すなわち $\gamma_F^2 \gg \gamma_B^2$ の場合、また、遅い物質のローレンツ因子が ejecta の初期ローレンツ因子をになっている $\gamma_B \sim \Gamma_0$ とするならば、

$$\Delta(R) \sim \Delta_0 + \frac{R}{2\Gamma_0^2} \quad (2.75)$$

となる。 R が小さい時、第二項は無視できるが、進化するにつれ第二項が Δ_0 程度になると無視できなくなる。したがって、

$$R_{\text{sp}} \sim \Delta_0 \Gamma_0^2 \quad (2.76)$$

と評価できる。ここで、無次元量 ξ を以下のように定義する。

$$\xi = \left(\frac{l_S}{\Delta_0} \right)^{1/2} \Gamma_0^{-\frac{4}{3}} \quad (2.77)$$

これを用いると 4 つの半径は、

$$\xi^{-1} R_N = \xi^{1/2} R_\Delta = R_\gamma = \xi^2 R_{\text{sp}} (= l_S \Gamma_0^{-\frac{2}{3}}) \quad (2.78)$$

という関係式でかけることがわかる。この関係式から、与えられたパラメータにより構成された無次元パラメータ ξ が 1 より大きいかわからないかによって、4 つの半径の大小関係が決まる。

$\xi < 1$ ($\Delta_0 > l_S / \Gamma_0^{8/3}$) の場合を “thick shell”、あるいは Relativistic Reverse Shock (=RRS) と呼ぶ。この時のダイナミクスを特徴づける 4 つの半径の大小関係は $R_N < R_\gamma < R_\Delta < R_{\text{sp}}$ となり、最も早い段階で逆行衝撃波の相対ローレンツ因子が相対論的になる。また、 R_{sp} が最も大きい半径なので、逆行衝撃波が伝播する間はシェル幅及び ξ は一定とみなせる。続いて、シェルがかき集めた外部物質と ejecta mass が等しくなる半径 R_γ を迎えるが、順行衝撃波と逆行衝撃波のダイナミクスには影響がない。そして、逆行衝撃波がシェルを通過してしまうと、その情報が順行衝撃波に伝わったタイミングで、シェルの厚みが無視できる段階へと移る。ただし式 (2.78) より、 R_γ と R_Δ の違いはわずか $\xi^{1/2} = l_s^{1/4} \Delta_0^{-1/4} \Gamma_0^{-2/3} \sim 1.1$ であるため、速やかに BM 解に移行すると考えられる。ここで、 $l_S \sim 10^{18}$ cm、 $\Delta_0 \sim 100 \text{ sec} \times c \sim 3 \times 10^{12}$ cm、 $\Gamma_0 \sim 100$ とした。

一方で、 $\xi > 1$ ($\Delta_0 < l_S / \Gamma_0^{8/3}$) の場合を “thin shell”、あるいは Newtonian Reverse Shock (=NRS) と呼ぶ。大小関係は $R_{\text{sp}} < R_\Delta < R_\gamma < R_N$ となる。シェル幅が小さいが R_{sp} が最も小さい半径であるため、非相対論的な逆行衝撃波はまだほとんどシェル内部を伝播しない段階でシェル幅 $\Delta(R)$ が膨らみ始める。シェルが膨らみ始める上に逆行衝撃波も非相対論的なので R_Δ に到達するより前に、 $\xi \sim 1$ つまり $\Delta(R) \sim l_S \Gamma_0^{-4/3}$ に到達すると考えられる。そうなるしまえば、一気に $R_{\text{sp}} \sim R_N \sim R_\gamma \sim R_\Delta$ となり、逆行衝撃波は相対論的になると同時にシェルは減速を開始する。

2.1.5 火の玉モデルと爆風の伝播

相対論的な速度の流れを作る一つの有力な機構は熱膨張である。有限の体積に閉じ込められていた高圧の気体は、閉じ込めを解かれると膨張を始める。この過程で、内部エネルギーを運動エネルギーに転化する事になる。このような機構で膨張する天体現象の例としては、非相対論的な場合は超新星爆発や太陽風が挙げられる。相対論的な場合は「火の玉モデル (Fireball model)」と呼び、ガンマ線バーストの有力なモデルの一つだと考えられている。

本節ではまず、主に教科書『特殊相対論』(高原文郎 2012) に従い一般的な火の玉モデルについてレビューを行う。火の玉モデルの膨張が周囲の物質に影響されない場合を「自由膨張」、周囲の物質に衝突して減速して行く場合を「爆風」と呼ぶ。まず、自由膨張について考察する。基礎方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}(n'\Gamma) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}[r^2 n' \Gamma v] = 0 \quad (2.79)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\epsilon' + \frac{v^2}{c^2} p' \right) \Gamma^2 \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \Gamma^2 (\epsilon' + p') v] = 0 \quad (2.80)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [(\epsilon' + p') \Gamma^2 v] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \Gamma^2 (\epsilon' + p') v^2] + c^2 \frac{\partial p'}{\partial r} = 0 \quad (2.81)$$

の三つである。式 (2.79) は球対称座標 (r 方向) の粒子数保存の式 (連続の式) であり、 n' は流体静止系での粒子数密度、 Γ は外部慣性系での流体のローレンツ因子である。式 (2.80) はエネルギー保存則に対応しており、 ϵ' と p' はそれぞれ流体静止系での流体の内部エネルギー密度、圧力である。式 (2.81) は運動量保存則で、 $(\epsilon' + p') \Gamma^2 v$ は相対論的な運動量密度、 $(\epsilon' + p') \Gamma^2 v^2$ は運動量フラックス、 $c^2 \partial p' / \partial r$ は圧力勾配による力である。

相対論的な場合なので速度は $v \sim c$ とし、流体の局所固有系から見れば一様膨張をすると考えられるが実験室系 (上流静止系) から見た膨張の様子は非相対論的な場合に比べて大きく異なる。膨張する物質 (ejecta) の先端はほぼ光速 c で進むので、火の玉の半径は $R \sim ct$ である。膨張運動のローレンツ因子を Γ とすると、膨張物質の厚さ ΔR はローレンツ収縮の効果により、 $\Delta R \sim R/\Gamma$ 程度のシェル状の領域に集中する。シェル状の ejecta 内部はほとんど一様だと仮定し、圧力は $p' = \epsilon'/3$ として、数密度 n' 、内部エネルギー ϵ' 、ローレンツ因子 Γ の時間発展を考える。シェル状の ejecta の体積 V は

$$V = \frac{4}{3} \pi (R + \Delta R)^3 - \frac{4}{3} \pi R^3 \sim 4\pi R^2 \Delta R = 4\pi R^3 \Gamma^{-1} \quad (2.82)$$

であり、全粒子数 $N = \Gamma n' V$ は保存されるので、

$$N = n' \Gamma 4\pi R^3 \Gamma^{-1} = 4\pi n' R^3 = \text{const.} \\ \therefore n' \propto R^{-3} \propto t^{-3} \quad (2.83)$$

全エネルギー $E = \Gamma^2 \epsilon' V$ も保存されるので、

$$E = \Gamma^2 \epsilon' 4\pi R^3 \Gamma^{-1} = 4\pi \epsilon' \Gamma R^3 = \text{const.} \\ \therefore \epsilon' \Gamma \propto R^{-3} \propto t^{-3} \quad (2.84)$$

となる。また、断熱変化ではエンタルピー密度 $\epsilon' + p'$ が保存されるので、

$$\frac{d\epsilon'}{\epsilon' + p'} = -\frac{dV}{V} \quad (2.85)$$

今、状態方程式は $p' = \epsilon'/3$ だから、

$$\frac{d\epsilon'}{\epsilon' + \epsilon'/3} = -\frac{dV}{V} \\ \therefore \epsilon' \propto V^{-4/3} \propto n'^{4/3} \quad (2.86)$$

従って、

$$\epsilon' \propto t^{-4} \quad (2.87)$$

$$\Gamma \propto t \quad (2.88)$$

という時間進化をすることがわかる。つまり、膨張運動のローレンツ因子が時間に比例して増加することがわかる。これは相対論的な自由膨張の最大の特徴だ。内部エネルギーの断熱的な時間変化が加速を引き起こすことが上記の議論からわかる。これは、内部エネルギーを消費し尽くすまで続くと考えられるので、 $\epsilon' \sim n' mc^2$ となった時点で終端ローレンツ因子 ($= \Gamma_0$) に達し、その後は一定のローレンツ因子で膨張を続ける。

膨張を続けたのち、外部物質との相互作用により2.1.4節で見たように接触不連続面、順行衝撃波が、逆行衝撃波が形成される。逆行衝撃波は短時間で ejecta を突き抜けるため、以降のダイナミクスは掃き集めた外部質量によって支配される。この段階を「爆風」と呼ぶ。残光の標準モデルでは、放射は主に順行衝撃波下流から放たれるため、逆行衝撃波からの寄与は無視できると考える。爆風の内部構造は Blandford–McKee 解により自己相似的に記述できるが (Blandford et al. 1976)、本論文では簡単のため一様シェル近似を採用してダイナミクスを考察する。

以下では2.1.4節での考察と対応づけて、外部慣性系は上流 1 静止系であり、この系で定義した一様密度の外部物質の粒子数密度、順行衝撃波下流の粒子数密度、下流の内部エネルギー密度をそれぞれ n_{ex} 、 n_d 、 U_d とする。また順行衝撃波下流（下流 2 に対応）静止系での下流の粒子数密度、下流の内部エネルギー密度を n'_d 、 U'_d とする。式 (2.53) と式 (2.54) より

$$n'_d \sim 4\Gamma_{\text{FS}} n_{\text{ex}} \quad (2.89)$$

$$U'_d \sim \Gamma_{\text{FS}} n'_d mc^2 \sim 4\Gamma_{\text{FS}}^2 n_{\text{ex}} mc^2 \quad (2.90)$$

とかける。さらにローレンツ変換により

$$n_d = \Gamma_{\text{FS}} n'_d \quad (2.91)$$

$$U_d = \Gamma_{\text{FS}} U'_d \quad (2.92)$$

である。順行衝撃波の半径を R とすると、掃き集められた全粒子数 N は

$$N = \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \, n_0 r^2 \sin \theta = \frac{4\pi}{3} R^3 n_{\text{ex}} \quad (2.93)$$

であり、かき集められた星間物質が波面に ΔR の厚みのシェルを形成するとシェル内部にある全粒子数は

$$N = \int_R^{R+\Delta R} dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \, n_d r^2 \sin \theta = 4\pi R^2 \Delta R n_d \quad (2.94)$$

である。衝撃波面前後で粒子数は保存するので、

$$\frac{4\pi}{3} R^3 n_{\text{ex}} = 4\pi R^2 \Delta R n_d \quad (2.95)$$

を満たす。 ΔR について式 (2.89) と式 (2.91) を用いて書き換えると

$$\Delta R = \frac{n_0}{3n_d} R \sim \frac{1}{12\Gamma_{\text{FS}}^2} R \quad (2.96)$$

が得られる。また、爆発の全エネルギーは掃き集められたシェルに担われていると考え、

$$E_0 = \int_R^{R+\Delta R} dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi U_d r^2 \sin \theta = 4\pi R^2 \Delta R U_d \quad (2.97)$$

が成り立つ。残光の放射効率は低いという断熱近似を仮定すると式 (2.90) と式 (2.96) より

$$\Gamma_{\text{FS}} = \left(\frac{3E_0}{4\pi n_{\text{ex}} m_p c^2 R^3} \right)^{1/2} \propto R^{-3/2} \quad (2.98)$$

となり、順行衝撃波のダイナミクスは半径の $-3/2$ 乗で減速することがわかる。ここで、断熱減速期が開始する半径 R_{dec} はシェルがかき集める外部物質のエネルギーが爆発エネルギーに匹敵する半径 R_γ であると考えられ、式 (2.73) より

$$R_{\text{dec}} = R_\gamma = l_S \Gamma_0^{-2/3} = \left(\frac{3E_0}{4\pi n_0 m_p c^2 \Gamma_0^2} \right)^{1/3} \quad (2.99)$$

である。

2.1.6 順行衝撃波からのシンクロトロン放射

順行衝撃波下流で増幅された磁場と加速された電子によるシンクロトロン放射を考える。まずは、順行衝撃波下流で増幅される磁場について評価する。順行衝撃波の下流静止系での下流の内部エネルギー密度を U'_d 、相対論的電子に輸送されるエネルギーの割合を ϵ_e 、磁場に輸送されるエネルギーの割合を ϵ_B とし、下流静止系での下流の電子のエネルギー密度 U'_e と下流の磁場のエネルギー密度 U'_B をそれぞれ

$$U'_e = \epsilon_e U'_d \quad (2.100)$$

$$U'_B = \epsilon_B U'_d \quad (2.101)$$

とかけるとする。磁場のエネルギー密度は $U'_B = B'^2/8\pi$ であるので、式 (2.101) と式 (2.90) より、

$$B' = \sqrt{8\pi\epsilon_B U'_d} \sim \sqrt{32\pi\epsilon_B n_{\text{ex}} m_p c^2 \Gamma} \quad (\because \Gamma \gg 1) \quad (2.102)$$

と書き直せる。外部慣性系で外部物質の粒子数密度 n_{ex} は一様であることと、磁場に転化される下流の内部エネルギーの割合 ϵ_B が時間に対して一定であるという仮定のもとで、衝撃波下流の磁場はローレンツ因子 Γ に比例することがわかる。すなわち、シンクロトロン放射を担う磁場の大きさは自由膨張期では外部慣性系の時間に比例して増加し、断熱減速期では外部慣性系の時間の $-3/2$ 乗で減少する。

次に、順行衝撃波下流で加速された電子密度 n'_{inj} と最低エネルギー γ'_m について評価する。加速機構については現在でも研究が盛んであるが、GRB 残光の標準理論モデルではフェルミ加速 (Bell 1978a,b; Blandford et al. 1978) を仮定する。フェルミ加速では電子のエネルギースペクトルは冪乗分布となるので、この冪指数を p とし係数 A を用いて

$$n'_{\text{inj}}(\gamma'_e) d\gamma'_e = A \gamma_e'^{-p} d\gamma'_e \quad (\gamma'_m \leq \gamma'_e) \quad (2.103)$$

とかける。ただし、下流静止系での電子のローレンツ因子を γ'_e とし、その下限値を γ'_m とする。以下では、順行衝撃波面で成り立つ shock jump condition から γ'_m と A を評価する。相対論的電子のエネルギー密度 U'_e は

$$U'_e = \int_{\gamma'_m}^{\infty} \gamma'_e m_e c^2 n'_{\text{inj}} d\gamma'_e = A m_e c^2 \frac{\gamma'^{2-p}_m}{p-2} \quad (p > 2) \quad (2.104)$$

とかけ、式 (2.100) から

$$\epsilon_e U'_d = A m_e c^2 \frac{\gamma'^{2-p}_m}{p-2} \quad (2.105)$$

という関係式が成り立つ。また、相対論的電子の数密度 n'_e は

$$n'_e = \int_{\gamma'_m}^{\infty} A \gamma'^{-p}_e d\gamma'_e = A \frac{\gamma'^{1-p}_m}{p-1} \quad (2.106)$$

とかけ、下流の電子のうち加速される電子の割合を f_e とおけば、加速された電子の個数は $n'_e = f_e n'_d$ であるから、

$$f_e n'_d = A \frac{\gamma'^{1-p}_m}{p-1} \quad (2.107)$$

という関係式が成り立つ。式 (2.105) と式 (2.107) から定数 A を消去し、shock jump condition の式 (2.89)、式 (2.90) を用いて n'_d と U'_d を消去して γ'_m について解けば、

$$\gamma'_m \sim \frac{\epsilon_e m_p}{f_e m_e} \frac{p-2}{p-1} \Gamma \quad (\because \Gamma \gg 1) \quad (2.108)$$

) と書き下せる。順行衝撃波で加速される電子の最低ローレンツ因子は、 ϵ_e と f_e が時間に対して一定であるという仮定のもとで順行衝撃波のローレンツ因子 Γ に比例することがわかる。シンクロトロン放射を担う典型的なエネルギーは、冷却が無視できる場合には γ'_m であるから、シンクロトロン放射の典型的なエネルギー自体が順行衝撃波のダイナミクスを反映することを示している。これは、放射の支配的なエネルギー帯が刻々と変化することを意味し、chromatic な振る舞いを示すと考えられる。続いて、式 (2.105) に式 (2.90) を代入して定数 A について解くと、

$$A \sim 4 \epsilon_e n_{\text{ex}} (p-2) \frac{m_p}{m_e} \gamma'^{p-2}_m \Gamma^2 \quad (2.109)$$

と書き下せる。係数 A はシンクロトロン放射を担う典型的なエネルギーを持つ電子の数に相当する量であり、これについても一様密度と一定 ϵ_e の仮定のもとで、順行衝撃波のローレンツ因子 Γ の p 乗で発展すると考えられる。以上から、順行衝撃波により加速された電子のエネルギースペクトルは以下のようにかける。

$$n'_{\text{inj}}(\gamma'_e) d\gamma'_e = 4 f_e n_{\text{ex}} (p-1) \left(\frac{\gamma'_e}{\gamma'_m} \right)^{-p} \frac{d\gamma'_e}{\gamma'_m} \Gamma \quad (2.110)$$

ここまでで、相対論的衝撃波によって増幅される磁場と、加速される電子についてのエネルギースペクトルを与えることができた。

次に、相対論的衝撃波下流での磁場とエネルギースペクトルの電子が放つシンクロトロン放射のスペクトルを求める。ただし以降では、下流静止系での量にはこれまで通りダッシュを1つ付け、これと区別するために電子静止系での量にはダッシュ2つ付けることにする。

シンクロトロン放射とは、相対論的電子が一樣磁場の周りで円運動し、加速度運動することによって電磁波が放射されることである。衝撃波下流での電子のローレンツ因子が γ'_e 、磁場が B' である場合、電子の回転運動の周波数 ω_{se} は

$$\omega'_{se} = \frac{eB'}{\gamma'_e m_e c} \quad (2.111)$$

である。また、加速度は $\dot{u} = \omega_{se} v_{\perp} = \omega_{se} \beta_e c \sin \alpha$ (α はピッチ角) だから、リエナーの公式より全放射強度 $dE'/dt' = P'_{syn}$ は

$$P'_{syn} = \frac{2}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 c (\gamma_e'^2 \beta_e^2 B'^2 \sin^2 \alpha) \sim \frac{1}{6\pi} \sigma_T c \gamma_e'^2 B'^2 \quad (2.112)$$

とかける。ただし、ここで $\beta_e \sim 1$ とし、また電子の速度分布が等方的であるとして平均ピッチ角 $\langle \sin^2 \alpha \rangle = 2/3$ で書き換えた。また、単一電子からのシンクロトロン放射のエネルギー・スペクトル (単位周波数あたりの放射強度) $P'_{\omega'}(\gamma'_e)$ は

$$P'_{\omega'}(\gamma'_e) = \frac{dE'}{d\omega' dt''} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{e^3 B'}{m_e c^2} F(x') \quad (2.113)$$

とかける (Rybicki et al. 1979; 観山正見 et al. 2015)。ただし、 $F(x')$ は

$$F(x') = x' \int_{x'}^{\infty} K_{5/3}(y) dy, \quad x' = \frac{2m_e c}{3eB'\gamma_e'^2} \omega' \quad (2.114)$$

で定義される関数であり、 $K_{\nu}(y)$ は変形されたベッセル関数 (マクドナルド関数とも呼ばれる) である。この関数は、 $x' \ll 1$ のとき $F(x) \propto x^{1/3}$ 、 $x' \gg 1$ のとき $F(x) \propto e^{-x}$ という漸近形を持つことが知られている。すなわち、単一電子の放射スペクトルは低周波数側でゆるやかな立ち上がりを示し、高周波数側で指数的に減衰する。したがって、ローレンツ因子が γ'_e である単一電子からの一樣磁場 B' における、シンクロトロン放射の典型的な周波数 ν'_{syn} は、 $x' \sim 1$ を満たす ω' なので

$$\nu'_{syn}(\gamma'_e, B') = \frac{\omega'}{2\pi} = \frac{3}{4} \frac{eB'}{\pi m_e c} \gamma_e'^2 \quad (2.115)$$

となる。また、この周波数における放射強度、すなわち単一電子からのシンクロトロン放射の典型的な放射エネルギー $P'_{\nu',peak}$ は、大まかに $P'_{syn} \sim \nu'_{syn} P'_{\nu',peak}$ だと考ええると

$$\left. \frac{dE'}{d\omega' dt''} \right|_{peak} \equiv P'_{\nu',peak} \sim \frac{P'_{syn}}{\nu'_{syn}} \sim \frac{2}{9e} m_e c^2 \sigma_T B' \quad (2.116)$$

となり、典型的な放射エネルギーは γ_e に依らないことがわかる。

ところで、式 (2.112) からわかる通り、シンクロトロン放射により電子は時間と共にエネルギーを失う。シンクロトロン放射 (単位時間あたりの放射エネルギー; P'_{syn}) によって、電子が持っているエネルギー $\gamma_e m_e c^2$ を全て使い切ってしまうまでの衝撃波下流静止系での時間 (冷却時間) t'_c は、式 (2.112) より

$$t'_c \sim \frac{6\pi m_e c}{\sigma_T B'^2 \gamma_e'} \quad (2.117)$$

と見積もれる。これに基づき、 t' の時間だけ経過し冷却された電子のローレンツ因子として、冷却ローレンツ因子 γ'_c を次のように定義する。

$$\gamma'_c = \frac{6\pi m_e c}{\sigma_T B'^2 t'} = \frac{6\pi m_e c}{\sigma_T B'^2 t_{\text{obs}}} \frac{1+z}{D} \quad (2.118)$$

ただし、2つ目の等号は (2.26) を用いて観測者時間に変換した。 $\gamma'_e > \gamma'_c$ の電子だった場合、電子は $\gamma'_e = \gamma'_c$ に到達するまで、時間 t'_c かけてエネルギーを失う。従って、冷却時間全体で観測される単一電子からのエネルギー・スペクトルは、 $\nu' > \nu'_c$ の領域では式 (2.116) と (2.117) を用いて、

$$\frac{dE'}{d\nu'} \sim P'_{\nu', \text{peak}} \times t'_c = \frac{4\pi}{3e} (m_e c^2)^2 B'^{-1} \gamma_e^{-1} \propto B'^{-\frac{1}{2}} \nu'^{-\frac{1}{2}} \quad (2.119)$$

に従う冪乗分布になる。

相対論的衝撃波下流で加速される、単位体積、単位ローレンツ因子 γ'_e あたりの電子は式 (2.110) でも紹介したように、 $n'_{\text{inj}} \propto \gamma_e'^{-p}$ に従うエネルギー・スペクトルを成す。一方で、 $\gamma'_c < \gamma'_e$ の電子は冷却の効果が効く。つまり、電子が単位時間あたりに衝撃波下流での加速により獲得するエネルギー (電子へのエネルギー注入率) n'_{inj} と、電子が単位時間あたりに放射により失うエネルギー $P'_{\text{syn}} \propto \gamma_e'^2$ (式 (2.112) より) が存在する。したがって、定常状態 ($\frac{\partial n_e}{\partial t} = 0$) のとき、エネルギー空間での連続の式は、

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_e'} [P'_{\text{syn}} n'_e(\gamma'_e)_{\text{cool}}] = n'_{\text{inj}} \quad (2.120)$$

とかける。ただし、ここで粒子の系からの逃走は無視した。 $\gamma'_e > \gamma'_m$ の領域では相対論的衝撃波により $n'_{\text{inj}} \propto \gamma_e'^{-p}$ の割合でエネルギーが注入されるので、

$$n'_e(\gamma'_e)_{\text{cool}} = \frac{24\pi f_e n_{\text{ex}} \Gamma}{\sigma_T c \gamma_m'^2 B'^2} \left(\frac{\gamma'_e}{\gamma'_m} \right)^{-(p+1)} \propto \gamma_e'^{-(p+1)} \quad (\gamma'_e > \gamma'_c) \quad (2.121)$$

となる。一方で、 $\gamma'_e < \gamma'_m$ の領域には注入される電子がない、つまり $n'_{\text{inj}} = 0$ なので、

$$n'_e(\gamma'_e)_{\text{cool}} = \frac{24\pi f_e n_{\text{ex}} \Gamma}{\sigma_T c \gamma_m'^2 B'^2} \left(\frac{\gamma'_e}{\gamma'_m} \right)^{-2} \propto \gamma_e'^{-2} \quad (\gamma'_e < \gamma'_m) \quad (2.122)$$

となる。以上より、冷却の効果が効く電子が少ない $\gamma'_c > \gamma'_m$ (遅延冷却; slow cooling) の場合と全ての電子に冷却の効果が効く $\gamma'_m > \gamma'_c$ (急速冷却; fast cooling) の場合で、それぞれ電子のエネルギー・スペクトルの形は

$$n'_e(\gamma_e)_{\text{slow}} \propto \begin{cases} \gamma_e'^{-p} & (\gamma'_m < \gamma'_e < \gamma'_c) \\ \gamma_e'^{-(p+1)} & (\gamma'_m < \gamma'_c < \gamma'_e) \end{cases} \quad (2.123)$$

$$n'_e(\gamma_e)_{\text{fast}} \propto \begin{cases} \gamma_e'^{-2} & (\gamma'_c < \gamma'_e < \gamma'_m) \\ \gamma_e'^{-(p+1)} & (\gamma'_c < \gamma'_m < \gamma'_e) \end{cases} \quad (2.124)$$

となることがわかる。

以上を踏まえ、相対論的衝撃波下流で加速された多数電子からのシンクロトロン放射のスペクトルを求める。単位体積あたりの放射スペクトル $j'_{\nu'}$ (放射係数; A.3節参照) は

$$j'_{\nu'} = \frac{dE'}{dV' d\Omega' dt'' d\nu'} = \frac{1}{4\pi} \int n'_e(\gamma_e)_{\text{slow/fast}} \left(\frac{dE'}{d\omega' dt''} \right) \frac{d\omega'}{d\nu'} d\gamma'_e = \frac{P'_{\nu'}}{4\pi} \quad (2.125)$$

を計算すれば良い。ただし、 $P'_{\nu'}$ は単位体積あたりの放射パワーとし、

$$P'_{\nu'} \equiv \int n'_e(\gamma_e)_{\text{slow/fast}} P'_{\nu'}(\gamma'_e) d\gamma'_e \quad (2.126)$$

を計算していく。 $P'_{\nu'}(\gamma'_e)$ は式 (2.113) で与えられているが、変形されたベッセル関数を含む式であり、厳密に計算するには、二重積分を実行する必要がある。ここでは、単一電子からのシンクロトロン放射の周波数は式 (2.115) で与えた ν_{syn} に集中するとし、それぞれの電子が式 (2.112) で与えた P'_{syn} の放射強度を放つから、

$$P'_{\nu'} d\nu' \sim P'_{\text{syn}}(\gamma'_e(\nu')) n'_e(\gamma'_e(\nu')) d\gamma'_e \quad (2.127)$$

として扱う。式 (2.115) より、

$$\gamma'_e(\nu') \propto \nu'^{1/2}, \quad \frac{d\gamma'_e}{d\nu'} \propto \nu'^{-1/2} \quad (2.128)$$

である。また、冷却を考慮した電子のエネルギースペクトルは式 (2.123) と式 (2.124) で与えたが、まとめて $n'_e(\gamma'_e)_{\text{slow/fast}} \propto \gamma_e'^{-s}$ とおいて、式変形すると、

$$P'_{\nu'} \propto \nu'^{\frac{1-s}{2}} \quad (2.129)$$

となる。式 (2.123) と式 (2.124) で示した、冪指数をそれぞれに s に代入すれば、遅延冷却と急速冷却を考慮した多数電子からのシンクロトロン放射スペクトルはそれぞれ

$$P'_{\nu', \text{slow}} \propto \begin{cases} \nu'^{1/3} & (\nu' < \nu'_m) \\ \nu'^{-(p-1)/2} & (\nu'_m < \nu' < \nu'_c) \\ \nu'^{-p/2} & (\nu'_m < \nu'_c < \nu') \end{cases} \quad (2.130)$$

$$P'_{\nu', \text{fast}} \propto \begin{cases} \nu'^{1/3} & (\nu' < \nu'_c) \\ \nu'^{-1/2} & (\nu'_c < \nu' < \nu'_m) \\ \nu'^{-p/2} & (\nu'_c < \nu'_m < \nu') \end{cases} \quad (2.131)$$

となる。ただし、 $\nu' < \min(\nu'_m, \nu'_c)$ の帯域は、単一電子のエネルギースペクトルの式 (2.114) の $F(x') \propto x'^{1/3}$ ($x' \ll 1$) の重ね合わせに過ぎないので、 $P'_{\nu'} \propto \nu'^{1/3}$ である。また、 ν'_m と ν'_c はそれぞれ、電子のローレンツ因子が $\gamma'_e = \gamma'_m$ と $\gamma'_e = \gamma'_c$ である時のシンクロトロン周波数であり、

$$\nu'_m = \nu'_{\text{syn}}(\gamma'_m, B') = \frac{3eB'}{4\pi m_e c} \gamma_m'^2 \quad (2.132)$$

$$\nu'_c = \nu'_{\text{syn}}(\gamma'_c, B') = \frac{3eB'}{4\pi m_e c} \gamma_c'^2 \quad (2.133)$$

である。

次に、単位体積あたりの放射スペクトルの最大値を考える。遅延冷却および急速冷却のエネルギースペクトルの形、式 (2.123) と式 (2.124) から、 $\gamma'_q = \min(\gamma'_m, \gamma'_c)$ のエネルギーを持つ電子の数密度が最も多くなり、最低エネルギーの電子が数的に圧倒することになる。つまり、加速された電子のほ

とんどが γ'_q のエネルギーを持つと考える。単位体積あたりに加速された電子の数は $f_e n_{\text{ex}}$ なので、これらの電子がそれぞれ典型的な放射パワー (式 (2.115)) を放射すると考えれば、放射スペクトルの最大値 $P'_{\nu',\text{max}}$ は、

$$P'_{\nu',\text{max}} = f_e n'_{\text{ex}} P'_{\nu',\text{peak}} = \frac{2m_e c^2 \sigma_T}{9e} f_e n_{\text{ex}} B' [\text{erg s}^{-1} \text{ Hz}^{-1} \text{ cm}^{-3}] \quad (2.134)$$

となる。

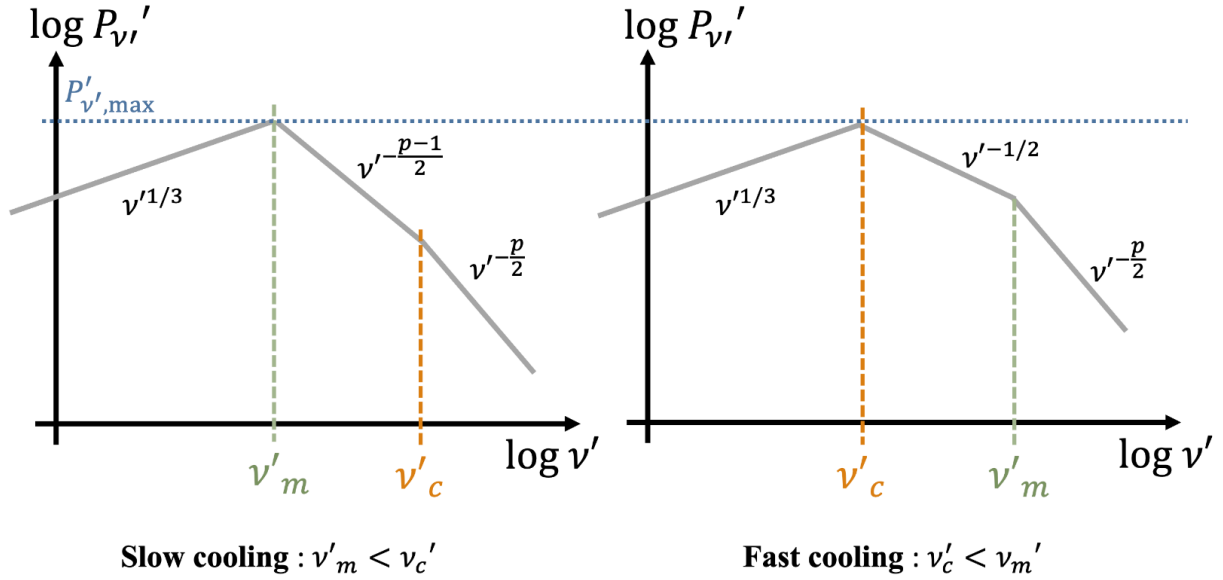


図 2.8: 相対論的衝撃波で加速された電子からのシンクロトロン放射のスペクトル

以上より、冷却を考慮した場合の、順行衝撃波下流静止系における、順行衝撃波で加速された電子からの単位体積あたりのシンクロトロン放射のスペクトルがもとまった。ただし、シンクロトロン自己吸収が効く低周波側のスペクトルには折れ曲がりが見れる (A.4節参照)。

2.1.7 標準理論モデルが预言する光度曲線

前節では、相対論的衝撃波下流静止系での相対論的衝撃波からのシンクロトロン放射のスペクトルを求めた。本節では、放射源から宇宙論的距離にいて、ジェットの中心軸上にいる観測者に観測されるシンクロトロン放射のスペクトルと光度曲線を書き下す。

まず、スペクトルの観測者にとっての時間進化を考える。スペクトルの折れ曲がり成す周波数 ν_m と ν_c は、放射体から宇宙論的距離にいる観測者に対して、式 (2.28) より、次のようにかける。

$$\nu_m = \frac{D}{1+z} \nu'_m = \frac{D}{1+z} \frac{3eB'}{4\pi m_e c} \gamma_m'^2 = \frac{3\sqrt{2}em_p^{5/2}}{(1+z)\pi^{1/2}m_e^3} \epsilon_e^2 f_e^{-2} \epsilon_B^{1/2} n_{\text{ex}}^{1/2} \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^2 \Gamma^4 \quad (2.135)$$

$$\nu_c = \frac{D}{1+z} \nu'_c = \frac{D}{1+z} \frac{3eB'}{4\pi m_e c} \gamma_c'^2 = \frac{1+z}{t_{\text{obs}}^2} \frac{27em_e}{128\sqrt{2}\pi^{1/2}m_p^{3/2}c^2\sigma_T^2} \epsilon_B^{-3/2} n_{\text{ex}}^{-3/2} \Gamma^{-4} \quad (2.136)$$

ただし、 D はドップラー因子 (2.1.2節参照) であり、ここでは観測者はジェット軸上にいる ($\psi = 0$) とした。以上から、外部衝撃波のローレンツ因子 Γ に依存する。断熱減速期の場合、式 (2.98) に従い進化し、半径 R からの放射が観測者に届く時間は式 (2.27) の関係にあるので、それぞれの周波数は観測者にとって次のような時間依存性があることがわかる。

$$\nu_{m,\text{adi}}(t_{\text{obs}}) = \frac{3\sqrt{3}em_p^2}{4\pi m_e^3 c^{5/2}} (1+z)^{1/2} \epsilon_e^2 f_e^{-2} \epsilon_B^{1/2} E_0^{1/2} \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^2 t_{\text{obs}}^{-3/2} \quad (2.137)$$

$$\nu_{c,\text{adi}}(t_{\text{obs}}) = \frac{27c^{1/2}em_e}{32\sqrt{3}m_p\sigma_T^2} (1+z)^{-1/2} \epsilon_B^{-3/2} n_{\text{ex}}^{-1} E_0^{-1/2} t_{\text{obs}}^{-1/2} \quad (2.138)$$

次に、スペクトルのピークの時間進化を考える。式 (2.134) では、衝撃波下流静止系における、単位体積あたりのシンクロトロン放射の最大値を求めた。観測されるフラックス $F_{\nu,\text{max}}$ は、宇宙論的效果と相対論的效果を考慮すると、光度距離 d_L 、赤方偏移 z 、ドップラー因子 D を用いて

$$F_{\nu,\text{max}} = \frac{1+z}{4\pi d_L^2} L_{\nu,\text{max}} = \frac{1+z}{4\pi d_L^2} D^3 \int 4\pi j'_{\nu',\text{max}} dV' = \frac{1+z}{4\pi d_L^2} D^3 \int P'_{\nu',\text{max}} dV' \quad (2.139)$$

とかける。外部衝撃波が半径 R まで膨張したとき、放射体静止系での放射体体積は $4\pi R^2 \Delta R'$ であり、 $\Delta R' \sim R/\Gamma^2$ とかけることに注意し、ここでも観測者はジェット軸上 ($\psi = 0$) と考えると、

$$F_{\nu,\text{max}} = \frac{1+z}{4\pi d_L^2} \frac{2m_e c^2 \sigma_T}{9e} f_e n_{\text{ex}} \epsilon_B^{1/2} B' R^3 \Gamma \propto f_e n_{\text{ex}}^{3/2} R^3 \Gamma^2 \quad (2.140)$$

となる。断熱減速期の場合、式 (2.98) に従い進化し、半径 R からの放射が観測者に届く時間は式 (2.27) の関係にあるので、

$$F_{\nu,\text{max,adi}} = \frac{1+z}{d_L^2} \frac{2\sqrt{2}m_e c \sigma_T}{3e\pi^{1/2}m_p^{1/2}} f_e n_{\text{ex}}^{1/2} \epsilon_B^{1/2} E_0 \quad (2.141)$$

とかけ、観測されるピークフラックスは時間変化しないことがわかる。これは、膨張により放射を担う電子が増加する効果と、減速によるビーミングの効果の減衰により暗くなる効果がちょうど釣り合っていることを意味する。以上から、遅延冷却と急速冷却のそれぞれの場合について、観測されるスペクトルは次のようにまとめられる。

$$F_{\nu, \text{slow}} = F_{\nu,\text{max}} \begin{cases} \left(\frac{\nu}{\nu_m}\right)^{1/3} & (\nu < \nu_m < \nu_c), \\ \left(\frac{\nu}{\nu_m}\right)^{-(p-1)/2} & (\nu_m < \nu < \nu_c), \\ \left(\frac{\nu_c}{\nu_m}\right)^{-(p-1)/2} \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{-p/2} & (\nu_m < \nu_c < \nu) \end{cases} \quad (2.142)$$

$$F_{\nu, \text{fast}} = F_{\nu,\text{max}} \begin{cases} \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{1/3} & (\nu < \nu_c < \nu_m), \\ \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{-1/2} & (\nu_c < \nu < \nu_m), \\ \left(\frac{\nu_m}{\nu_c}\right)^{-1/2} \left(\frac{\nu}{\nu_m}\right)^{-p/2} & (\nu_c < \nu_m < \nu) \end{cases} \quad (2.143)$$

さらに、断熱膨張期における時間依存性は次のようになる。

$$F_{\nu,\text{slow,adi}}(t_{\text{obs}}) \propto \begin{cases} \nu^{\frac{1}{3}} t_{\text{obs}}^{\frac{1}{2}} & (\nu < \nu_m < \nu_c), \\ \nu^{-\frac{p-1}{2}} t_{\text{obs}}^{-\frac{3(p-1)}{4}} & (\nu_m < \nu < \nu_c), \\ \nu^{-\frac{p}{2}} t_{\text{obs}}^{-\frac{3p-2}{4}} & (\nu_m < \nu_c < \nu) \end{cases} \quad (2.144)$$

$$F_{\nu,\text{fast,adi}}(t_{\text{obs}}) \propto \begin{cases} \nu^{\frac{1}{3}} t_{\text{obs}}^{\frac{1}{6}} & (\nu < \nu_c < \nu_m), \\ \nu^{-\frac{1}{2}} t_{\text{obs}}^{-\frac{1}{4}} & (\nu_c < \nu < \nu_m), \\ \nu^{-\frac{p}{2}} t_{\text{obs}}^{-\frac{3p-2}{4}} & (\nu_c < \nu_m < \nu) \end{cases} \quad (2.145)$$

次に、例として可視光 ($\nu = 5 \times 10^{14}$ Hz) と X 線 ($\nu = 1 \times 10^{18}$ Hz) の光度曲線の概形を考える。 $z = 0$ 、 $p = 2.5$ 、 $n_{\text{ex}} = 1 \text{ cm}^{-3}$ 、 $\epsilon_e = 0.1$ 、 $\epsilon_B = 0.01$ 、 $E_0 = 10^{52} \text{ erg}$ の時の、 $\nu_{m,\text{adi}}$ と $\nu_{c,\text{adi}}$ の時間進化を描画すると図2.9となる。

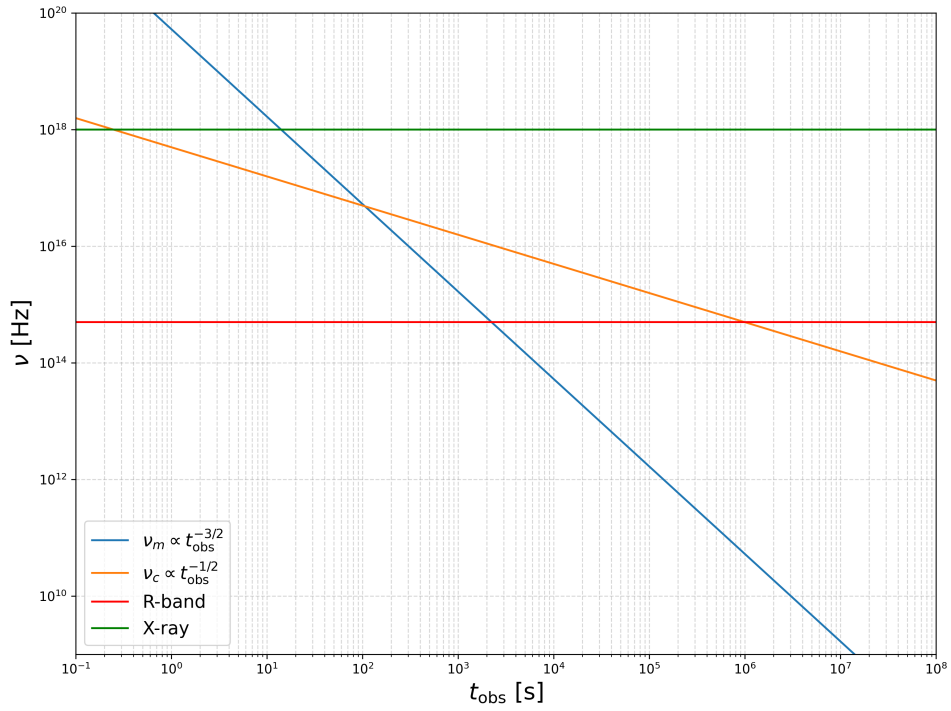


図 2.9: 放射スペクトルの折れ曲がりに対応する周波数 ν_m と ν_c の時間進化と、可視光・X 線の周波数との関係

図より、 $T_{\text{cross}} \sim 10^2 \text{ s}$ が急速冷却と遅延冷却の境目の時間になっていることがわかる。可視光は $t_{\text{obs}} < 10^2 \text{ s} = T_{\text{cross}}$ の時間帯で $\nu_R < \nu_c < \nu_m$ 、 $T_{\text{cross}} < t_{\text{obs}} \lesssim 2 \times 10^3 \text{ s} = T_1$ の時間帯で $\nu_R < \nu_m < \nu_c$ 、 $T_1 < t_{\text{obs}} < 10^6 \text{ s} = T_2$ の時間帯で $\nu_m < \nu_c < \nu_R$ のスペクトルに対応することがわ

かり、X線についても同様に、 $t_{\text{obs}} \lesssim 0.2 \text{ s} = T_3$ の時間帯で $\nu_X < \nu_c < \nu_m$ 、 $T_3 < t_{\text{obs}} \lesssim 15 \text{ s} = T_4$ の時間帯で $\nu_c < \nu_X < \nu_m$ 、 $T_4 < t_{\text{obs}} < T_{\text{cross}}$ の時間帯で $\nu_c < \nu_m < \nu_X$ 、 $t_{\text{obs}} > T_{\text{cross}}$ では、 $\nu_m < \nu_c < \nu_X$ の関係にある。従って、標準理論モデルで予言される可視光 ($\nu = 5 \times 10^{14} \text{ Hz}$) と X線 ($\nu = 1 \times 10^{18} \text{ Hz}$) の光度曲線の概形は次のようになる。

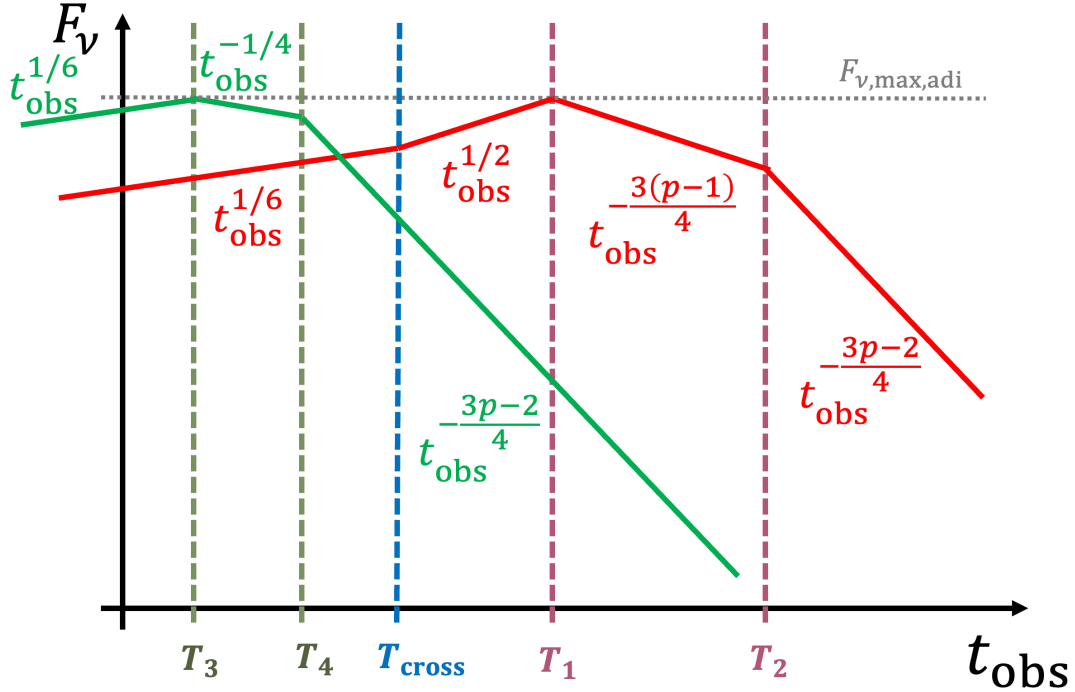


図 2.10: 可視光 (赤線) と X 線 (緑線) の光度曲線の概形。

2.2 標準理論モデルの限界

前節では、標準理論モデルから予言される光度曲線を導出した。しかし、標準理論モデルでは説明困難なイベントが多数報告されている。Liang et al. (2013) は、2011 年 11 月までに可視光残光 (R-band) が検出されたすべての GRB の X 線残光と可視光残光 (R-band) を分析し、225 個のイベントのうち 146 個について十分なサンプリングが得られていることを示した。この 146 個の中で、GRB 050308 (de Ugarte Postigo et al. 2007)、GRB 070419A (Melandri et al. 2009)、GRB 071010A (Covino et al. 2008)、XRF 071031 (Krühler et al. 2009b)、XRF 080330 (Guidorzi et al. 2009)、GRB 080603A (Guidorzi et al. 2011)、GRB 080710 (Krühler et al. 2009a)、GRB 090510 (Nicuesa Guelbenzu et al. 2012)、GRB 110205A (Cucchiara et al. 2011) のイベントにおいて、多波長で残光が観測され、バースト発生から数千秒で光度が極大に達する特徴が見られた。また、可視光領域においては無彩色的な振る舞いをしている。

さらに、Ror et al. (2025) でも 2005 年から 2018 年までに UVOT (紫外線) および XRF (X 線) で観測された 200 個の GRB 残光の時間的特徴について統計解析を行ない、標準理論モデルで予言されるような、単純なべき乗則に従う減衰を示す残光は全体の 30% 程度であることを示している。Ror et al. (2025) で示された GRB の中で、GRB 060614 (Mangano et al. 2007)、GRB 090123、

GRB 101023A、GRB 120326A (Melandri et al. 2014)、GRB 170519A、GRB 180115A の残光の光度曲線に、バースト発生から数千秒以降で無彩色的な極大が見られている。

本節では、以上の観測結果で見られる、無彩色的な極大を示す残光曲線は、標準理論モデルでは説明困難であることを説明する。標準理論モデルから予想されるピーク時刻は 2.1.7 節での考察からもわかるように、スペクトルのピークを形成する周波数が、観測された残光の周波数を横切る時刻であると考えられる。例えば、遅延冷却の場合は ν_m が赤外・可視光帯域を横切る時刻に対応する。式 (2.137) より、 ν_m が赤外・可視光帯域 $\nu_{\text{IR,Opt}}$ に到達する時刻 T_m は

$$T_m = A^{2/3} \nu_{\text{IR,Opt}}^{-2/3} \quad (2.146)$$

とかける。ただし、ここで式 (2.137) の係数部分を A で置き換えた。したがって、光度が極大を迎える時刻は、周波数に依存することがわかる。これは、急速冷却の場合にも同様のことが言え、依存性は $T_c \propto \nu_{\text{IR,Opt}}^{-2}$ となり、遅延冷却の場合よりも依存性が強くなる。したがって、観測で見られている、無彩色的な光度の極大を断熱減速期のシンクロトン放射の時間発展で解釈することは困難である。

自由膨張期から断熱減速期 (爆風) へ移行変わる時刻で光度の極大を形成しているとすれば、無彩色的な光度の極大を説明できる可能性がある。自由膨張期でのジェットの実進は、式 (2.88) で与えられた。したがって、自由膨張期の順行衝撃波からのシンクロトン放射の時間進化も 2.1.7 節と同様に、次のように導くことができる。

まず、スペクトルの折れ曲がり形成する周波数 ν_m と ν_c は式 (2.135)、式 (2.136) より

$$\nu_{m,\text{free}}(t_{\text{obs}}) \propto t_{\text{obs}}^0 \quad (2.147)$$

$$\nu_{c,\text{free}}(t_{\text{obs}}) \propto t_{\text{obs}}^{-2} \quad (2.148)$$

とかける。また、式 (2.140) より自由膨張期での観測されるスペクトルの最大値は

$$F_{\nu,\text{max,free}} \propto t_{\text{obs}}^3 \quad (2.149)$$

とかける。

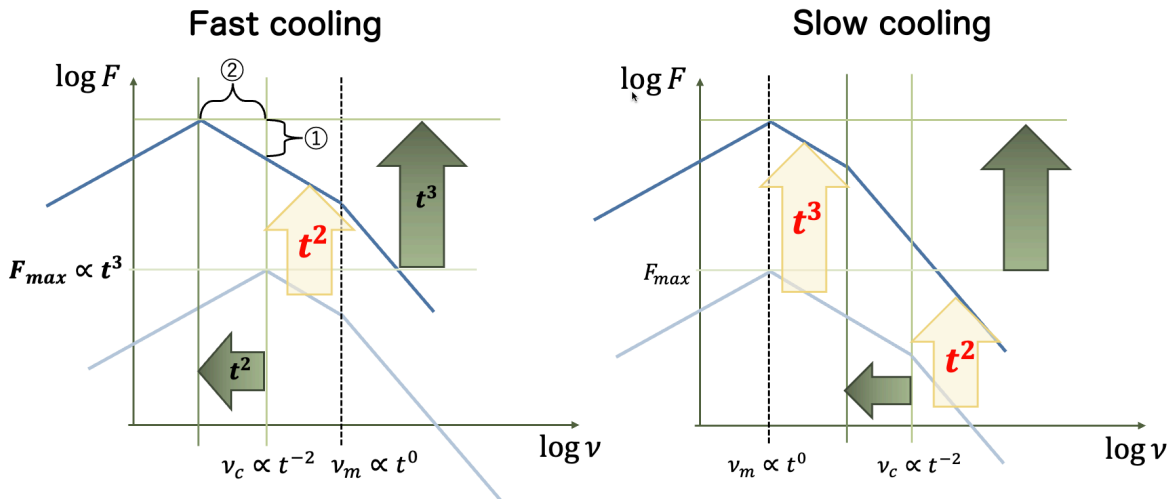


図 2.11: 自由膨張期での順行衝撃波からのシンクロトン放射のスペクトルの進化

したがって、光度曲線は遅延冷却の場合、

$$F_\nu = F_{\nu, \max} \begin{cases} \left(\frac{\nu}{\nu_m}\right)^{1/3} \\ \left(\frac{\nu}{\nu_m}\right)^{(1-p)/2} \\ \left(\frac{\nu_c}{\nu_m}\right)^{(1-p)/2} \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{-p/2} \end{cases} \propto \begin{cases} t_{\text{obs}}^3 & (\nu < \nu_m), \\ t_{\text{obs}}^3 & (\nu_m < \nu < \nu_c), \\ t_{\text{obs}}^2 & (\nu_c < \nu) \end{cases} \quad (2.150)$$

$$(2.151)$$

となり、急速冷却の場合、

$$F_\nu = F_{\nu, \max} \begin{cases} \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{1/3} \\ \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{-1/2} \\ \left(\frac{\nu_m}{\nu_c}\right)^{-1/2} \left(\frac{\nu}{\nu_m}\right)^{-p/2} \end{cases} \propto \begin{cases} t_{\text{obs}}^{11/3} & (\nu < \nu_c), \\ t_{\text{obs}}^2 & (\nu_c < \nu < \nu_m), \\ t_{\text{obs}}^2 & (\nu_m < \nu) \end{cases} \quad (2.152)$$

以上から、自由膨張期では、光度曲線は増光することがわかる。したがって、自由膨張期間から断熱減速期間への移り変わりでは、周波数に寄らないピークを形成できる可能性がある。ただし、観測から報告されている、増光指数 0 乗や 1 乗よりも急激な増光が予想されるため、整合性がとれない。さらに、自由膨張期間から断熱減速期間への移り変わる観測者系での典型的な時刻も

$$T_{\text{dec}} = (1+z) \frac{R_{\text{dec}}}{2c\Gamma_0^2} \sim 90 \text{ 秒} \left(\frac{E_0}{10^{52} \text{ erg}} \right)^{1/3} \left(\frac{\Gamma_0}{100} \right)^{-8/3} \left(\frac{n_0}{1 \text{ cm}^{-3}} \right)^{-1/3} \quad (2.153)$$

と評価されるので、数千秒まで自由膨張を再現するには、より大きな爆発エネルギー E_0 あるいは、より小さい密度 n_0 など、極端なパラメータ値が要求されると考えられる。

2.3 初期残光に対する理論モデル

前節では、標準理論モデルでは説明が困難な観測結果を示した。相対論的衝撃波下流での粒子加速機構や起源天体の性質には未解明の部分が多く、さらに計算の簡略化のために標準モデルはいくつかの仮定が置かれている。これらの仮定の範囲を超えた観測結果は、標準モデルが捉えていない情報を含んでいる可能性がある。

本節では、標準理論モデルで未考慮であった要素を詳細に検討することで、初期残光の観測結果を説明する可能性を検討する。具体的には、以下の三つの仮説について取り扱う：

1. 構造を持つジェットの開き角外視線 (off-axis structured jet) モデル
2. 冪乗則に従う外部媒質密度分布モデル
3. シェルの厚みの効果を考慮したモデル

これらの仮説を検証することで、初期残光が与える理論的制約を明らかにし、ガンマ線バーストの起源の理解につなげることを目的とする。本研究ではまず、構造を持つジェットの開き角外視線モデルを検証した。その結果得られた示唆に基づき、次に冪乗則に従う外部媒質密度分布およびシェルの厚みの効果に関する仮説を検討した。

2.3.1 構造を持つジェットの開き角外視線モデル (off-axis structured jet)

標準的な残光モデルでは、ジェットの内部構造は考慮せず、一様なエネルギー分布をもつジェットを軸上方向から観測する描像が広く用いられてきた。しかし実際のジェットは必ずしも一様ではなく、数値シミュレーションではガウス型や冪乗分布など、より複雑な角度依存性を示すことが報告されている (Gottlieb et al. 2021; Mizuta et al. 2013; Morsony et al. 2007; Zhang et al. 2003)。このような「構造をもつジェット」の描像では、ジェット軸からの角度によって放射の寄与が異なるため、観測者の視線角との組み合わせが観測される残光に顕著な影響を及ぼす。したがって、残光観測からジェットの角度構造を推定できれば、中心エンジンにおけるジェットの形成過程や伝播機構を理解する上で重要な手がかりとなる (Gottlieb et al. 2021; Mizuta et al. 2013; Morsony et al. 2007; Zhang et al. 2003)。

本節では、先行研究で提案されてきた代表的な構造ジェットモデル (Top-hat 型、Gaussian 型) に基づき、ジェットの開き角よりも外側から観測された場合に期待される残光の特徴について説明する (Ryan et al. 2020)。そのためにまず、ジェットの角度依存性を表現する量を定義する。軸対称ジェットの中心軸を $\theta = 0$ とし、この座標系において単位立体角あたりのエネルギーを $dE/d\Omega$ とする。これを球対称に換算したエネルギー分布

$$E(\theta) \equiv 4\pi \frac{dE}{d\Omega} \quad (2.154)$$

を導入し、ジェット構造の違いを $E(\theta)$ の形で記述する。

本研究では $E(\theta)$ として、単純でありながら広く用いられている Top-hat 型と Gaussian 型の 2 種類を採用する。Top-hat 型ジェットは

$$E(\theta) = \begin{cases} E_0 & (\theta \leq \theta_j), \\ 0 & (\theta > \theta_j), \end{cases} \quad (2.155)$$

と表され、角度 θ_j まで一様なエネルギー分布を仮定する。一方、Gaussian 型ジェットは

$$E(\theta) = \begin{cases} E_0 \exp\left(-\frac{\theta^2}{2\theta_c^2}\right) & (\theta \leq \theta_j), \\ 0 & (\theta > \theta_j), \end{cases} \quad (2.156)$$

で与えられ、中心軸付近 ($\theta \lesssim \theta_c$) にエネルギーが強く集中する特徴をもつ。ここで、ジェットの開口角で補正される「真のジェットエネルギー」 E_j は

$$E_j = 2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta_j} d\theta \sin \theta \frac{E(\theta)}{4\pi} \quad (2.157)$$

で定義される。この定義を用いると、Top-hat 型のジェット構造を課した場合の真のジェットエネルギーは $E_j \sim E_0 \theta_j^2/2$ となり、Gaussian 型のジェット構造を課した場合は $E_j \sim E_0 \theta_c^2 [1 - \exp(-\theta_j^2/2\theta_c^2)]$ となる。さらに、ジェットの角度構造を特徴づけるもう一つの重要な量は初期ローレンツ因子の角度分布 $\Gamma(\theta)$ である。本研究ではこれについて、Ryan et al. (2020) に従って以下の 2 つの仮定を考える。1 つは $\Gamma(\theta) = \Gamma_0$ とし、角度に依存せず一定とする場合 (Gamma Flat: 以下、GF) である。もうひとつは $\Gamma(\theta) = 1 + (\Gamma_0 - 1)E(\theta)/E_0$ とし、初期の質量分布が角度に対して一様である場合 (Gamma-Even Mass: 以下、GEM) である。

ジェットを中心軸からの角度に応じて異なるエネルギーをもつ放射体のダイナミクスは異なるため、位置 $r(\theta)$ にいる放射体からの放射が観測者に届く時間は

$$T(\theta) \equiv T(r(\theta), \theta) \sim (1+z) \frac{r(\theta)}{2c\Gamma(r, \theta)^2} (1 + \Gamma(r, \theta)^2 |\theta_{\text{obs}} - \theta|^2) \quad (2.158)$$

と、角度依存性を示す。これより、断熱減速期が開始する半径 $R_{\text{dec}}(\theta)$ で放射された光子が観測者に届く時刻 $T_{\text{dec}}(\theta)$ は

$$T_{\text{dec}}(\theta) = T(R_{\text{dec}}(\theta), \theta) \sim (1+z) \left(\frac{3E(\theta)}{32\pi n_0 m_p c^5} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{1 + \Gamma(\theta)^2 |\theta_{\text{obs}} - \theta|^2}{\Gamma(\theta)^{8/3}} \quad (2.159)$$

と見積もられる。ただし、 $\Gamma(r=0, \theta) = \Gamma(\theta)$ である。一方、断熱減速期に相対論的ビーミング角を外れている観測者に明るい放射が届き始める時刻 $T_b(\theta)$ は、 $\theta_{\text{obs}} - \theta \sim \Gamma(r, \theta)^{-1}$ を満たす半径 $r = R_b(\theta)$ で放射された光子を考えれば良いので、

$$T_b(\theta) = T(R_b(\theta), \theta) \sim (1+z) \left(\frac{3E(\theta)}{4\pi n_0 m_p c^5} \right)^{\frac{1}{3}} |\theta_{\text{obs}} - \theta|^{\frac{8}{3}} \quad (2.160)$$

と見積もれる。したがって、ジェットの端の放射が観測者に届く (ジェットブレイク) 時刻 T_{jet} は

$$T_{\text{jet}} = T_b(\theta_j) \sim (1+z) \left(\frac{3E(\theta_j)}{4\pi n_0 m_p c^5} \right)^{\frac{1}{3}} |\theta_{\text{obs}} \pm \theta_j|^{\frac{8}{3}} \quad (2.161)$$

となる。

ここで、 $T_b(\theta)$ で観測されるシンクロトロン放射の光度 $F_{\nu, b}(\theta)$ を見積もる。この期間は断熱減速期であるため、ジェット軸からの角度 θ 方向に運動するそれぞれの放射体から放射されるシンクロトロン放射は、2.1.7節で説明したスペクトル進化をするので、

$$F_{\nu, \text{max}}(\theta) = \frac{\Omega N_e}{4\pi} \frac{P_{\nu, \text{max}}}{\Omega d_L^2} \sim \frac{\sqrt{2}\sigma_T c m_e}{3\pi^{1/2} e d_L^2 m_p^{1/2}} f_e n_0^{1/2} \epsilon_B^{1/2} E(\theta) \quad (2.162)$$

$$\nu_m(r, \theta) = \frac{3\sqrt{2}em_p^{5/2}}{(1+z)\pi^{1/2}m_e^3} \epsilon_B^{1/2} \epsilon_e^2 f_e^{-2} n_0^{1/2} \left(\frac{p-2}{p-1} \right)^2 \frac{\Gamma(r, \theta)^4}{\Gamma(r, \theta)^2 |\theta_{\text{obs}} - \theta|^2 + 1} \quad (2.163)$$

$$\nu_c(r, \theta) = \frac{27em_e(1+z)}{128\sqrt{2}\pi^{1/2}\sigma_T^2 c^2 m_p^{3/2}} \epsilon_B^{-3/2} n_0^{-3/2} \frac{(\Gamma(r, \theta)^2 |\theta_{\text{obs}} - \theta|^2 + 1)^2}{\Gamma(r, \theta)^4} \frac{1}{T(\theta)^2} \quad (2.164)$$

である。 $r = R_b(\theta)$ を満たす時刻では、 $\Gamma(r, \theta) = \Gamma(R_b, \theta) = (\theta_{\text{obs}} - \theta)^{-1}$ を満たすのであったから、

$$\nu_m(R_b, \theta) = \frac{3\sqrt{2}em_p^{5/2}}{(1+z)2\pi^{1/2}m_e^3} \epsilon_B^{1/2} \epsilon_e^2 f_e^{-2} n_0^{1/2} \left(\frac{p-2}{p-1} \right)^2 (\theta_{\text{obs}} - \theta)^{-4} \quad (2.165)$$

$$\nu_c(R_b, \theta) = \frac{27em_e(1+z)}{32\sqrt{2}\pi^{1/2}\sigma_T^2 c^2 m_p^{3/2}} \epsilon_B^{-3/2} n_0^{-3/2} (\theta_{\text{obs}} - \theta)^4 T_b(\theta)^{-2} \quad (2.166)$$

と書き換えられる。したがって、急速冷却 (fast cooling) の場合

$$F_{\nu,b}(\theta) = F_{\nu,\max}(\theta) \begin{cases} \left(\frac{\nu}{\nu_c(R_b, \theta)}\right)^{\frac{1}{3}} \\ \left(\frac{\nu}{\nu_c(R_b, \theta)}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \left(\frac{\nu_m(R_b, \theta)}{\nu_c(R_b, \theta)}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\nu}{\nu_m(R_b, \theta)}\right)^{-\frac{p}{2}} \end{cases} \propto \begin{cases} E(\theta)^{\frac{11}{9}} |\theta_{\text{obs}} - \theta|^{\frac{4}{9}} & (\nu < \nu_c), \\ E(\theta)^{\frac{2}{3}} |\theta_{\text{obs}} - \theta|^{-\frac{2}{3}} & (\nu_c < \nu < \nu_m), \\ E(\theta)^{\frac{2}{3}} |\theta_{\text{obs}} - \theta|^{\frac{4-6p}{3}} & (\nu_m < \nu) \end{cases} \quad (2.167)$$

遅延冷却 (slow cooling) の場合

$$F_{\nu,b}(\theta) = F_{\nu,\max}(\theta) \begin{cases} \left(\frac{\nu}{\nu_m(R_b, \theta)}\right)^{\frac{1}{3}} \\ \left(\frac{\nu}{\nu_m(R_b, \theta)}\right)^{\frac{1-p}{2}} \\ \left(\frac{\nu_c(R_b, \theta)}{\nu_m(R_b, \theta)}\right)^{\frac{1-p}{2}} \left(\frac{\nu}{\nu_c(R_b, \theta)}\right)^{-\frac{p}{2}} \end{cases} \propto \begin{cases} E(\theta) |\theta_{\text{obs}} - \theta|^{\frac{4}{3}} & (\nu < \nu_m), \\ E(\theta) |\theta_{\text{obs}} - \theta|^{2(1-p)} & (\nu_m < \nu < \nu_c), \\ E(\theta)^{\frac{2}{3}} |\theta_{\text{obs}} - \theta|^{\frac{4-6p}{3}} & (\nu_c < \nu) \end{cases} \quad (2.168)$$

となる。これは、 $\theta \neq \theta_{\text{obs}}$ を運動する放射体からの放射が、断熱減速期による相対論的ビーミング効果の弱まりによって観測者に明るい放射が届き始める時刻でのフラックスを与える。

以上から、初期残光の観測結果で示される増光指数 ~ 1 を断熱減速期における構造化ジェットの相対論的ビーミング効果が弱まることにより説明するためには、構造化ジェットのさまざまな角度からの放射が次々に観測者に届き増光を形成するような

$$\frac{\log(F_{\nu,b}(\theta_{\max})/F_{\nu,b}(\theta_{\text{near}}))}{\log(T_b(\theta_{\max})/T_b(\theta_{\text{near}}))} \sim 1 \quad (\text{観測されている増光指数}) \quad (2.169)$$

を満たすジェット構造、あるいは視線方向が要求され则认为られる。ただし、 $\theta_{\max}$ とは、 T_b の時刻で観測された光度の極大値とその時刻を与えるような放射体の運動方向である。また、 θ_{near} とは、視線方向の最も近くを運動する放射体の運動方向であり、 $\theta_{\text{near}} = \min(\theta_j, \theta_{\text{obs}})$ である。ただし、 $T_b(\theta_{\text{obs}}) = 0$ であるため、 $\min(\theta_j, \theta_{\text{obs}}) = \theta_{\text{obs}}$ の場合は式 (2.158) より $T(\theta_{\text{obs}})$ で与えられると考える。 θ_{near} から $\theta_{\max}$ への変化に伴って、 $F_{\nu,b}(\theta)$ は増加するような関数型であると考えられる。さらに、 $\nu < \min(\nu_m, \nu_c)$ の場合では、相対論的ビーミング効果が弱まることで増光した後、 $\propto T^{1/2}$ または $\propto T^{1/6}$ で増光し、周波数に依存するような光度の極大極大時刻を迎えてしまう。無彩色的な極大時刻を示す周波数帯は $\nu > \min(\nu_m, \nu_c)$ を満たすことも要求され则认为られる。

ただし、構造をもつジェットからの残光の光度曲線についての解析的評価には限界があり、数値計算を行うことで、仮説の妥当性について検討する必要がある。

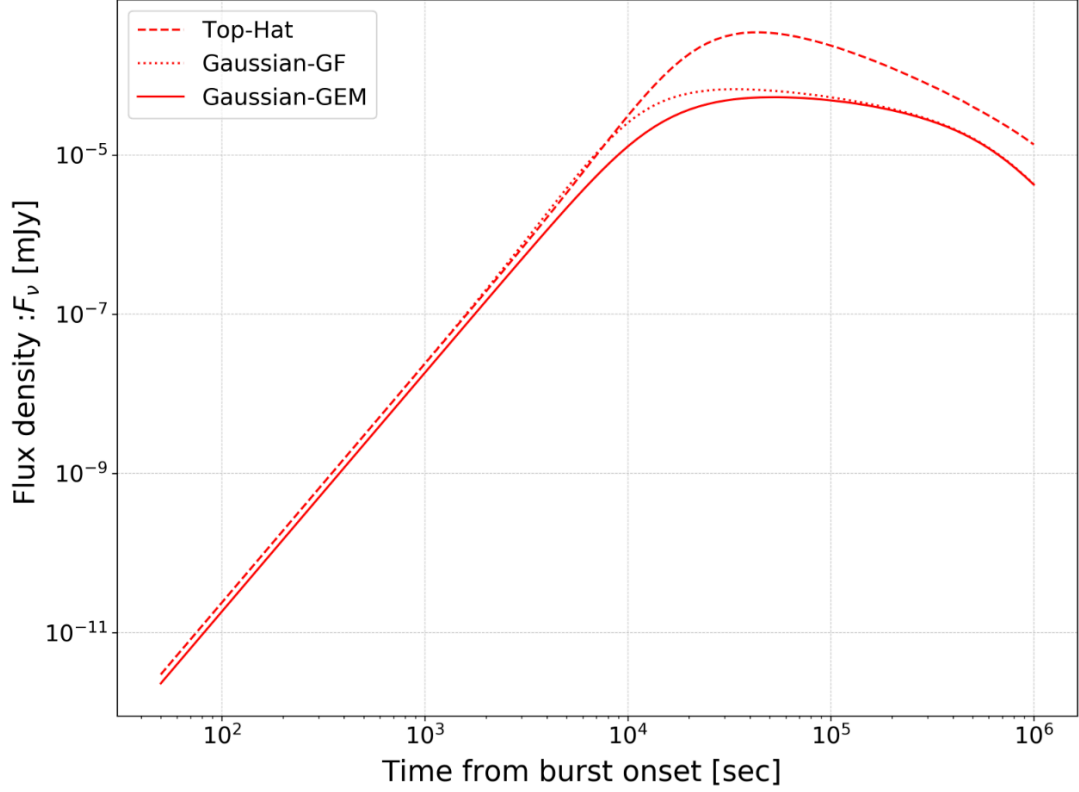


図 2.12: 3つのジェットモデルを仮定した場合の可視光 (5×10^{14} Hz) の残光曲線。パラメータは
 いずれのジェットモデルにおいても、 $E_0 = 10^{53}$ erg、 $\Gamma_0 = 200$ 、 $\theta_c = 0.05$ rad (Gaussian 型のみ)、
 $\theta_j = 0.1$ rad、 $\theta_{\text{obs}} = 0.15$ rad、 $n_0 = 1 \text{ cm}^{-3}$ 、 $\epsilon_e = 0.01$ 、 $\epsilon_B = 0.001$ 、 $f_e = 0.5$ とした。なお、残
 光の計算には `afterglowpy` (4.2.1 節参照) を用いた。

2.3.2 冪乗則に従う外部媒質密度分布モデル

標準的な理論モデルでは、外部媒質は一様密度分布をもつと仮定した ISM 型密度分布が広く採用されてきた。しかし、実際の外部媒質は爆発前の親星から吹く星風の影響や、伴星からの降着物質などにより、非一様な密度分布中をジェットが伝播し残光を放射している可能性がある (Chevalier et al. 1999, 2000; Mimica et al. 2011) (A.2.2 も参照)。外部媒質の密度構造はジェットのダイナミクスに直接影響し、その結果として残光の増光・減光指数に反映される。したがって、増光期間の観測データは外部媒質の密度分布に関する情報を含んでおり、残光の理論的解釈を通じて爆発環境や起源の解明に迫る重要な手がかりとなり得る (Chevalier et al. 1999, 2000; Mimica et al. 2011)。

本節では、これらの先行研究に従い、外部媒質の密度分布が冪乗則に従うと仮定した場合に予想される、残光の光度曲線について定量的に考察する。質量放出率が一定 ($\dot{M} = \text{const.}$) で、星表面での初速度を保ったまま一定の速度 (v_w) で噴出物が広がっていく場合を考えると、噴出物の密度 ρ は

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= 4\pi r^2 v_w \rho = \text{const.} \\ \rho &= \frac{\dot{M}}{4\pi r^2 v_w} \text{ [g/cm}^3\text{]} \end{aligned} \quad (2.170)$$

となる。この噴出物を恒星風と仮定すると、その粒子数密度 n は

$$n = \frac{\rho}{\mu m_p} = \frac{\dot{M}}{4\pi\mu m_p r^2 v_w} \propto r^{-2} \quad (2.171)$$

となる。ここで μ は平均分子量であり、恒星風中の元素組成に応じて $\mu \sim 1$ と置く。本研究ではより一般に、周囲の物質の密度が

$$n_{\text{ex}} = n_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-k} \quad (2.172)$$

で分布していると仮定する。 $k = 0$ の場合は一様密度分布の星間物質 (ISM 型密度分布) を意味し、 $k = 2$ の場合は質量放出率及び噴出物の速度が一定の星風 (Wind) 型密度分布を意味する。Wind 型密度分布を仮定した超新星近傍の $\dot{M}$ や v_w の値を参考にと (Yaron et al. 2017)、

$$n_0 r_0^2 = \frac{\dot{M}}{4\pi m_p v_w} \sim 1.4 \times 10^{35} \text{ cm}^{-1} \left(\frac{m_p}{1.7 \times 10^{-24} \text{ g}} \right)^{-1} \left(\frac{\dot{M}}{10^{-6} M_\odot \text{ yr}^{-1}} \right) \left(\frac{v_w}{10^8 \text{ cm/s}} \right)^{-1}$$

という値になることがわかる。以降では、この一般化した密度分布式 (2.172) を仮定して議論を進める。

2.1.5節で述べた、外部物質との相互作用をしながら伝播する爆風のダイナミクスが、冪乗則に従う外部媒質密度分布を仮定することにより次のように修正される。順行衝撃波が中心エンジンから半径 R に到達した段階で掃き集められている全粒子数は

$$N(R) = \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi n_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-k} r^2 \sin \theta = \frac{4\pi n_0 r_0^k}{3-k} R^{3-k} \quad (2.173)$$

となる。かき集められた星間物質が波面に ΔR の厚みのシェルを形成すると、シェル内部にある全粒子数は

$$N(R) = \int_R^{R+\Delta R} dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi n_d r^2 \sin \theta \sim 4\pi n_d \Delta R R^2 \quad (\because \Delta R/R \ll 1) \quad (2.174)$$

である。衝撃波面前後での粒子数保存より、

$$\frac{4\pi n_0 r_0^k}{3-k} R^{3-k} = 4\pi n_d \Delta R R^2 \quad (2.175)$$

を満たす。相対論的衝撃波面前後で成り立つジャンプ条件式 (2.89) と式 (2.91) は今の場合も順行衝撃波面前後で成り立つので、これらを代入し ΔR について解くと、

$$\Delta R \sim \frac{r_0^k}{3-k} \frac{1}{4\Gamma_{\text{FS}}^2} R^{1-k} \quad (2.176)$$

となる。また、爆発の全エネルギーは掃き集められたシェルに担われていると考え、式 (2.97) は成り立つ。ジャンプ条件式 (2.90) と式 (2.176) より、断熱近似の元での順行衝撃波のローレンツ因子 Γ_{FS} は

$$\Gamma_{\text{FS}} = \sqrt{\frac{3-k}{4\pi n_0 r_0^k m_p c^2}} R^{\frac{k-3}{2}} E_0^{1/2} \propto \begin{cases} R^{-3/2} & (\text{if } k=0), \\ R^{-1/2} & (\text{if } k=2). \end{cases} \quad (2.177)$$

となる。この結果から、外部媒質の密度分布が一様である ISM 型に比べて、密度勾配がある Wind 型の方が減速を受けにくいことがわかる。また、断熱減速期が開始する半径 R_{dec} はシェルが引き集める外部物質のエネルギーが爆発エネルギーに匹敵する半径なので、

$$R_{\text{dec}} = \left(\frac{(3-k)E_0}{4\pi n_0 m_p c^2 \Gamma_0^2} \right)^{\frac{1}{3-k}} r_0^{\frac{k}{k-3}} = \begin{cases} \left(\frac{3E_0}{4\pi n_0 m_p c^2 \Gamma_0^2} \right)^{1/3} & (\text{if } k = 0), \\ \frac{E_0}{4\pi n_0 m_p c^2 \Gamma_0^2} \frac{1}{r_0^2} & (\text{if } k = 2). \end{cases} \quad (2.178)$$

となる。

次に、冪乗則に従う外部媒質密度分布の場合の、シンクロトロン放射のスペクトル進化を考える。衝撃波下流で増幅される磁場は

$$B' = \sqrt{32\pi\epsilon_B n_0 r_0^k m_p c^2} R^{-k/2} \Gamma_{\text{FS}} \quad (2.179)$$

となる。観測者が観測するエネルギーフラックスの最大値 $F_{\nu, \text{max}}$ は、観測者から光源までの距離を d_L とすると

$$F_{\nu, \text{max}} = \frac{\Omega N_e}{4\pi} \frac{P_{\nu, \text{max}}}{\Omega d_L^2} \sim \frac{4\sqrt{2}\pi^{1/2} c^3 \sigma_T m_e m_p^{1/2}}{3e(3-k)d_L^2} f_e (n_0 r_0^k)^{3/2} \epsilon_B^{1/2} R^{3(2-k)/2} \Gamma_{\text{FS}}^2 \quad (2.180)$$

となる。したがって、自由膨張期 ($\Gamma_{\text{FS}} = \Gamma_0$) におけるスペクトルの最大値の観測者時間に対する依存性は

$$F_{\nu, \text{max}, \text{free}} \propto R^{\frac{3(2-k)}{2}} \Gamma_0^2 \propto t_{\text{obs}}^{\frac{3(2-k)}{2}} \propto \begin{cases} t_{\text{obs}}^3 & (\text{if } k = 0), \\ t_{\text{obs}}^0 & (\text{if } k = 2). \end{cases} \quad (2.181)$$

となる。また、断熱減速期 ($\Gamma_{\text{FS}} \propto R^{(k-3)/2}$) におけるスペクトルの最大値の観測者時間に対する依存性は

$$F_{\nu, \text{max}, \text{dec}} \propto R^{\frac{3(2-k)}{2}} \Gamma_{\text{FS}}^2 \propto R^{\frac{-k}{2}} \propto t_{\text{obs}}^{-\frac{k}{2(4-k)}} \propto \begin{cases} t_{\text{obs}}^0 & (\text{if } k = 0), \\ t_{\text{obs}}^{-1/2} & (\text{if } k = 2). \end{cases} \quad (2.182)$$

となる。これらの結果を整理すると次のようになる。

- ISM 型分布 ($k = 0$)：自由膨張期では t_{obs}^3 に比例して急激に増光するが、断熱減速期に入ると時間依存性が消え、ほぼ一定の明るさとなる。
- Wind 型分布 ($k = 2$)：自由膨張期ではほぼ一定に保たれるが、断熱減速期に入ると $t_{\text{obs}}^{-1/2}$ に比例して急激に減光する。

この差は、各ダイナミクスにおける「掃き集められる電子数」と「衝撃波下流で増幅される磁場」の時間発展の違いに起因する。ISM 型では自由膨張期に磁場がほぼ一定に保たれるため、膨張に伴う電子数の増加がそのまま放射へ反映される。対して Wind 型では、膨張とともに磁場が弱まり、電子数の増加も抑制されるため、明るさの増光は見られない。さらに断熱減速期では、ジャンプ条件が緩和されることで磁場増幅が弱まり、ISM 型では光度が一定に落ち着くのに対し、Wind 型では

急速な減光へと転じる。以上より、自由膨張期・断熱減速期のいずれにおいても、光度進化を決定づける主要因は「掃き集める放射電子数」と「増幅される磁場強度」であり、それらの時間発展が媒質分布の違いを通じて観測的特徴に直結していることがわかる。

次に、スペクトルの折れ曲がりの特徴づける周波数 ν_m および ν_c について、外部媒質の密度分布が冪乗則に従う場合を考える。まず、衝撃波面で加速された電子の典型的なエネルギー γ_m を担う電子が放射する周波数 ν_m は

$$\nu_m = \frac{D}{1+z} \frac{eB'}{2\pi m_e c} \gamma_m'^2 = \frac{4\sqrt{2}em_p^{5/2}}{(1+z)\pi^{1/2}m_e^3} \epsilon_B^{1/2} \epsilon_e^2 f_e^{-2} \sqrt{n_0 r_0^k} \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^2 \frac{\Gamma_{\text{FS}}^4}{\Gamma_{\text{FS}}^2 \psi^2 + 1} R^{-\frac{k}{2}} \quad (2.183)$$

で与えられる。観測者が光源の運動方向にほぼ一致している ($\Gamma_{\text{FS}}^2 \psi^2 \ll 1$) 場合、 $\nu_m \propto \Gamma_{\text{FS}}^4 R^{-k/2}$ の依存性をもつ。特に自由膨張期 ($\Gamma_{\text{FS}} = \Gamma_0$) では

$$\nu_{m, \text{ on-axis, free}} = \frac{4 \times 2^{\frac{1-k}{2}} e c^{-k/2} m_p^{5/2}}{(1+z)^{\frac{2-k}{2}} \pi^{1/2} m_e^3} \epsilon_B^{1/2} \epsilon_e^2 f_e^{-2} \sqrt{n_0 r_0^k} \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^2 \Gamma_0^{4-k} t_{\text{obs}}^{-k/2} \propto t_{\text{obs}}^{-k/2} \quad (2.184)$$

となり、密度勾配が急な媒質ほど ν_m は観測者時間に対して急激に減少する。この挙動は、放射を担う電子の加速を誘導する下流磁場の増幅が、周囲の密度勾配が大きいほど抑制されることに起因する。 γ_m 自身は式 (2.108) に示される通り、自由膨張期には媒質の密度勾配には依存しない。したがって、 ν_m の時間進化を決定する主要因は「磁場強度の時間発展」であることがわかる。一方、断熱膨張期 ($\Gamma_{\text{FS}} \propto R^{(k-3)/2}$) では

$$\nu_{m, \text{ on-axis, dec}} \sim (1+z)^{1/2} \frac{3(3-k)^{1/2} e m_p^2}{4\pi m_e^3 c^{5/2}} \epsilon_B^{1/2} \epsilon_e^2 f_e^{-2} E_0^{1/2} \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^2 t_{\text{obs}}^{-3/2} \propto t_{\text{obs}}^{-3/2} \quad (2.185)$$

となる。外部慣性系における距離 R 依存性は $\nu_m(R) \propto R^{-\frac{12-3k}{2}}$ であり、密度勾配 k が大きいほど ν_m の減少は緩やかになる。これは、媒質の密度勾配が急な場合、シェルが膨張しても減速が弱く、放射を担う電子のエネルギーが比較的保たれるためである。しかし、観測者時間に対する挙動では、 $t_{\text{obs}} \propto R/\Gamma^2$ の変換により、 $\nu_m(R)$ の k 依存性が打ち消され、最終的に $\nu_m \propto t_{\text{obs}}^{-3/2}$ という普遍的な時間依存性が得られる。言い換えると、密度分布の違いはダイナミクス (R - Γ の関係) には現れるが、観測者が測る時間進化では Γ の効果と相殺され、 k に依存しないスケーリングが現れる。

次に、冷却周波数 ν_c について考える。冷却時間 T_c は下流で増幅される磁場 B' が密度勾配の影響を受けることにより

$$T_c = \frac{1+z}{D} \frac{6\pi m_e c}{\sigma_T \gamma_e B'^2} \frac{(\Gamma\psi)^2 + 1}{\Gamma} = \frac{1+z}{\Gamma^2 D} \frac{3m_e}{16\sigma_T \gamma_e \epsilon_B m_p c} \frac{R^k}{n_0 r_0^k} \quad (2.186)$$

となる。したがって、 $T_c = T$ を満たす電子のローレンツ因子は

$$\gamma'_c = \frac{1+z}{\Gamma^2 D} \frac{3m_e}{16\sigma_T \epsilon_B m_p c} \frac{R^k}{n_0 r_0^k} \frac{1}{T} \quad (2.187)$$

となる。よって、 ν_c は

$$\nu_c = \frac{D}{1+z} \frac{eB'}{2\pi m_e c} \gamma_c'^2 = \frac{9\sqrt{2}em_e(1+z)}{128\pi^{1/2}\sigma_T^2 c^2 m_p^{3/2} \epsilon_B^{3/2}} \frac{R^{3k/2}}{(n_0 r_0^k)^{3/2}} \frac{((\Gamma\psi)^2 + 1)^2}{\Gamma^4} \frac{1}{T^2} \quad (2.188)$$

で与えられる。観測者が光源の運動方向にほぼ一致している ($\Gamma_{\text{FS}}^2 \psi^2 \ll 1$) 場合、 $\nu_c \propto \Gamma_{\text{FS}}^{-4} R^{3k/2} t_{\text{obs}}^{-2}$ の依存性をもつ。特に自由膨張期 ($\Gamma_{\text{FS}} = \Gamma_0$) では

$$\nu_{c, \text{ on-axis, free}} \sim \frac{9 \times 2^{\frac{1+3k}{2}} e m_e c^{\frac{3k-4}{2}} (1+z)^{\frac{2-3k}{2}}}{128 \pi^{1/2} \sigma_T m_p^{3/2} \epsilon_B^{3/2} (n_0 r_0)^{3/2}} \Gamma_0^{3k-4} t_{\text{obs}}^{\frac{3k-4}{2}} \propto t_{\text{obs}}^{\frac{3k-4}{2}} \quad (2.189)$$

となり、断熱膨張期 ($\Gamma_{\text{FS}} \propto R^{(k-3)/2}$) では

$$\nu_{c, \text{ on-axis, dec}} \sim \frac{(1+z)^{-\frac{k+4}{8-2k}} 27 \times 2^{\frac{8-3k}{4-k}} (3-k)^{\frac{3k-4}{8-2k}} e m_e E_0^{\frac{3k-4}{8-2k}} t_{\text{obs}}^{\frac{3k-4}{8-2k}}}{128 \pi^{\frac{2k}{8-2k}} \sigma_T^2 c^{\frac{3k-4}{8-2k}} m_p^{\frac{8-k}{8-2k}} \epsilon_B^{3/2} (n_0 r_0^k)^{\frac{4}{4-k}}} \propto t_{\text{obs}}^{\frac{3k-4}{8-2k}} \quad (2.190)$$

となる。

以上のスペクトルの時間進化の議論から導かれる光度曲線を以下の示す。自由膨張期で、急速冷却 (fast cooling) の場合

$$F_\nu = F_{\nu, \text{max}} \begin{cases} \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{1/3} \\ \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{-1/2} \\ \left(\frac{\nu_m}{\nu_c}\right)^{-1/2} \left(\frac{\nu}{\nu_m}\right)^{-p/2} \end{cases} \propto \begin{cases} t_{\text{obs}}^{\frac{11-6k}{3}} & (\nu < \nu_c), \\ t_{\text{obs}}^{\frac{8-3k}{4}} & (\nu_c < \nu < \nu_m), \\ t_{\text{obs}}^{\frac{8-k(2+p)}{4}} & (\nu_m < \nu) \end{cases} \quad (2.191)$$

自由膨張期で、遅延冷却 (slow cooling) の場合

$$F_\nu = F_{\nu, \text{max}} \begin{cases} \left(\frac{\nu}{\nu_m}\right)^{1/3} \\ \left(\frac{\nu}{\nu_m}\right)^{(1-p)/2} \\ \left(\frac{\nu_c}{\nu_m}\right)^{(1-p)/2} \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{-p/2} \end{cases} \propto \begin{cases} t_{\text{obs}}^{\frac{9-4k}{3}} & (\nu < \nu_m), \\ t_{\text{obs}}^{\frac{12-(5+p)k}{4}} & (\nu_m < \nu < \nu_c), \\ t_{\text{obs}}^{\frac{8-(2+p)k}{4}} & (\nu_c < \nu) \end{cases} \quad (2.192)$$

断熱膨張期で、急速冷却 (fast cooling) の場合

$$F_\nu = F_{\nu, \text{max}} \begin{cases} \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{1/3} \\ \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{-1/2} \\ \left(\frac{\nu_m}{\nu_c}\right)^{-1/2} \left(\frac{\nu}{\nu_m}\right)^{-p/2} \end{cases} \propto \begin{cases} t_{\text{obs}}^{\frac{-2-3k}{3(4-k)}} & (\nu < \nu_c), \\ t_{\text{obs}}^{\frac{-k-4}{2(8-2k)}} & (\nu_c < \nu < \nu_m), \\ t_{\text{obs}}^{\frac{-3p(8-2k)-12}{4(8-2k)}} & (\nu_m < \nu) \end{cases} \quad (2.193)$$

断熱膨張期で、遅延冷却 (slow cooling) の場合

$$F_\nu = F_{\nu, \text{max}} \begin{cases} \left(\frac{\nu}{\nu_m}\right)^{1/3} \\ \left(\frac{\nu}{\nu_m}\right)^{(1-p)/2} \\ \left(\frac{\nu_c}{\nu_m}\right)^{(1-p)/2} \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{-p/2} \end{cases} \propto \begin{cases} t_{\text{obs}}^{\frac{2-k}{4-k}} & (\nu < \nu_m), \\ t_{\text{obs}}^{\frac{12-5k-3p(4-k)}{4(4-k)}} & (\nu_m < \nu < \nu_c), \\ t_{\text{obs}}^{\frac{8-2k-3p(4-k)}{2(8-2k)}} & (\nu_c < \nu) \end{cases} \quad (2.194)$$

となる。以上から、初期残光の観測結果で示される増光指数 ~ 1 を説明するためには、自由膨張期であれば、密度勾配は $0.8 < k < 2.2$ の範囲に制約され、断熱減速期であれば、式 (2.194) より $k \sim 2.33$ (ただし $\nu < \nu_c < \nu_m$ を満たす場合) が要求されることが分かる。ただし、 ν_m や ν_c の交差時刻で光度が極大を迎えるシナリオでは、無彩色的なピークを形成することはできない。自由膨張期から断熱減速期へ移行するタイミングでは、無彩色的なピークを実現できるので (2.2節参照)、その観点からも自由膨張期における増光を考えることが自然である。

2.3.3 シェルの厚みの効果を考慮したモデル

前節 (2.3.2) では、増光指数 ~ 1 を説明し得る密度勾配について検討した。しかし、自由膨張期から断熱減速期への移行は典型的に 100 秒程度で起こると考えられ (2.2節参照)、数千秒規模で現れる、遅く無彩色的な光度の極大を説明するには不十分である。したがって、より長い時間スケールで観測される初期残光を説明するためには、追加の物理的要素を導入することが自然である。

標準的な残光モデルでは、外部衝撃波 (接触不連続面、逆行衝撃波、順行衝撃波から構成される) が形成された後、残光放射は主として順行衝撃波に支配されると仮定し、シェルの厚みの効果はしばしば無視されてきた。しかし近年の数値シミュレーションは、この効果が無視できず、とくに数千秒から数万秒までの初期残光において顕著に現れることを示唆している (Kusafuka et al. 2025a, 2023)。

そこで本節では、シェルの厚みの効果を考慮したモデルを検討する (Kusafuka et al. 2025a,b; Yi et al. 2013)。具体的には、式 (2.65) で与えた順行衝撃波のダイナミクスを拡張し、冪乗則に従う外部媒質密度分布のもとでの進化を導出する。その上で、予想される残光の光度曲線を定量的な評価を行う。

まず、セドフ長 l_S は式 (2.66) で定義したが、冪乗則に従う外部媒質密度分布を考慮し、次のように定義し直す。

$$l_S = \left(\frac{(3-k)E_0}{4\pi m_p c^2 (n_0 r_0^k)} \right)^{\frac{1}{3-k}} \quad (0 < k < 3) \quad (2.195)$$

ただし、セドフ長が 0 以下になってしまうので物理的に非整合になることを避けるため、 $0 < k < 3$ で成り立つものとした。半径 R まで膨張した時の ejecta 静止系での ejecta の粒子数密度 n'_4 は

$$n'_4 = \frac{E_0}{4\pi m_p c^2 R^2 \Delta_0 \Gamma_0^2} \quad (2.196)$$

とかける。ejecta が半径 R まで膨張した時の星間空間の粒子数密度は、

$$n'_1 = n_0 \left(\frac{R + \Delta_0}{r_0} \right)^{-k} = n_0 \left(\frac{R}{r_0} \right)^{-k} \left(1 + \frac{\Delta_0}{R} \right)^{-k} \simeq n_0 \left(\frac{R}{r_0} \right)^{-k} \quad (R \gg \Delta_0) \quad (2.197)$$

なので、

$$\frac{n'_4}{n'_1} = \frac{E_0}{4\pi m_p c^2 (n_0 r_0^k) R^{2-k} \Delta_0 \Gamma_0^2} = \frac{l_S^{3-k}}{(3-k) \Delta_0 \Gamma_0^2} R^{k-2} \quad (2.198)$$

となる。以上より、逆行衝撃波が相対論的になる半径 R_N は、

$$R_N = \left(\frac{l_S^{3-k}}{(3-k) \Delta_0 \Gamma_0^4} \right)^{\frac{1}{2-k}} \quad (2.199)$$

とかける。ただし、 $k \neq 2$ とした。 $k = 2$ のときは f_n は半径依存性を持たなくなり、相対論的な逆行衝撃波かそうでないかは初期値で決まる。相対論的な逆行衝撃波になる条件は、初期のシェル幅とローレンツ因子が

$$\Delta_0 \Gamma_0^4 \geq l_S \quad (2.200)$$

を満たすことである。また、 $2 < k < 3$ のときは括弧内の物理量が大きくなればなるほど、 R_N は小さい値になる関係性であることがわかる。逆行衝撃波がシェルを横切る半径 R_Δ は

$$R_\Delta = A^{\frac{2}{4-k}} \left(\frac{1}{3-k} \right)^{\frac{1}{4-k}} l_S^{\frac{3-k}{4-k}} \Delta_0^{\frac{1}{4-k}} \quad (2.201)$$

ただし、逆行衝撃波が相対論的な場合 ($\Gamma_0^2/f_n \gg 1$) は $A = 1/2$ を取り、非相対論的な場合 ($\Gamma_0^2/f_n \ll 1$) は $A = 3/\sqrt{14}$ をとるものとする。シェルのかき集めた星周物質質量が噴出物質質量に等しくなる半径 R_γ は

$$R_\gamma = l_S \Gamma_0^{-\frac{2}{3-k}} \quad (2.202)$$

となる。最後に、シェルの厚みの膨張が無視できなくなる半径 R_{sp} は星間空間の密度勾配は関係ないので、式 (2.76) と同等である。ここで、無次元量 ξ_k を以下のように定義する。

$$\xi_k \equiv \left(\frac{l_S}{\Delta_0} \right)^{1/2} \Gamma_0^{-\frac{4-k}{3-k}} \quad (2.203)$$

これを用いると、冪乗則に従う外部媒質密度分布を仮定した場合の、シェルの厚みの効果を考慮したダイナミクスを特徴づける半径は

$$\xi_k^{-\frac{2}{2-k}} R_N \sim \xi_k^{\frac{2}{4-k}} R_\Delta \sim R_\gamma = \xi_k^2 R_{sp} \quad (0 < k < 3, k \neq 2) \quad (2.204)$$

の関係性で結びつくことがわかる (Yi et al. 2013)。順行衝撃波下流と、逆行衝撃波下流が接触不連続面で釣り合い、外部慣性系から見た順行衝撃波および逆行衝撃波の上下流が相対論的運動をしている場合には、式 (2.65) が成り立つ。分母の n'_1/n'_4 が式 (2.198) に従うことから、

$$\Gamma_{FS} = \frac{\Gamma_0}{\left[1 + 2\Gamma_0 \sqrt{\frac{n'_1(R)}{n'_4(R)}} \right]^{1/2}} = \Gamma_0 \left(1 + 2\Gamma_0^2 \sqrt{\frac{(3-k)\Delta_0}{l_S^{3-k}} R^{\frac{2-k}{2}}} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.205)$$

が得られる。なお、自由膨張期から遷移期への移行はおおよそ式 (2.205) の分母の第二項が 1 程度になる段階と推定され、その半径 R_{tra} は

$$R_{tra} \sim \left(\frac{l_S^{3-k}}{4(3-k)\Delta_0\Gamma_0^4} \right)^{\frac{1}{2-k}} = \left(\frac{E_0}{16\pi m_p c^2 (n_0 r_0^k) \Delta_0 \Gamma_0^4} \right)^{\frac{1}{2-k}} \quad (2.206)$$

となる。遷移期間が支配的となる状況は分母の第一項の 1 が無視できる時であり、近似形：

$$\Gamma_{FS} \sim \left(\frac{l_S^{3-k}}{4(3-k)\Delta_0} \right)^{1/4} R^{\frac{k-2}{4}} \quad (2.207)$$

が成り立つ状況を考える。この近似は $\Gamma \gg 1$ かつ $n'_1(R) \gtrsim n'_4(R)$ の領域で成り立ち、すなわちシェルの膨張により噴出物の粒子数密度 ($n'_4 \propto R^{-2}$) が外部媒質の密度 ($n'_1 \propto R^{-k}$) より小さくなる段階に対応する。外部衝撃波の中心エンジンからの距離 R が大きくなるにつれて、そのローレンツ因子は、図2.13 に示すように、自由膨張期から遷移期、そして断熱減速期へと移り変わっていく。

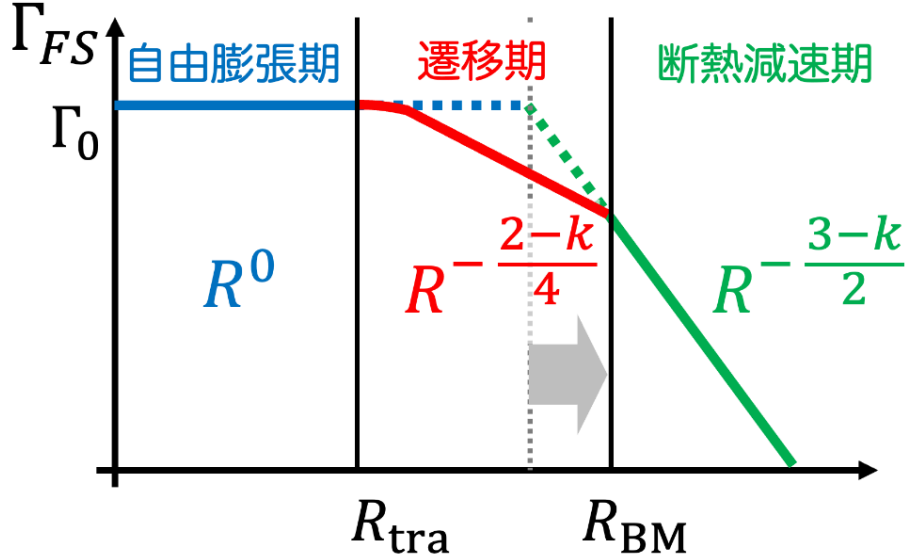


図 2.13: シェルの厚みの効果を考慮した外部衝撃波のダイナミクスの概形。 R_{tra} は自由膨張期から遷移期へ移り変わる半径で、 R_{BM} は遷移期から断熱減速期へ移り変わる半径を表す。

断熱減速期で近似できるようになる半径が、シェルの厚みを考慮しない場合に比べて遅れることが予想される。遷移期間におけるシンクロトン放射のスペクトルの時間進化から、緩やか (観測者時間の 1 乗や 0 乗) な光度曲線が再現できるかをここでは考える。

観測者が観測するエネルギーフラックスの最大値 $F_{\nu, \text{max}}$ は式 (2.181) で与えられるので、遷移期間 ($\Gamma_{\text{FS}} \propto R^{(k-2)/4}$) におけるスペクトルの最大値の観測者時間に対する依存性は

$$F_{\nu, \text{max}, \text{trans}} \propto R^{\frac{3(2-k)}{2}} \Gamma_{\text{FS}}^2 \propto R^{2-k} \propto t_{\text{obs}}^{\frac{2(2-k)}{4-k}} \quad (2.208)$$

で与えられる。衝撃波面で加速された電子の典型的なエネルギー γ_m を担う電子が放射する周波数 ν_m は

$$\nu_{m, \text{on-axis}, \text{trans}} \sim \frac{3\sqrt{2}em_p^2}{8\pi c^2 m_e^3} \epsilon_B^{1/2} \epsilon_e^2 f_e^{-2} \left(\frac{p-2}{p-1} \right)^2 E_0^{1/2} \Delta_0^{-1/2} t_{\text{obs}}^{-1} \propto t_{\text{obs}}^{-1} \quad (2.209)$$

となり、冷却周波数 ν_c は

$$\nu_{c, \text{on-axis}, \text{trans}} \sim \frac{27em_e(1+z)^{\frac{2k}{k-4}}}{2^{\frac{36-5k}{2(4-k)}} \pi^{\frac{k}{4-k}} \sigma_T^2 m_p^{\frac{4}{4-k}}} \epsilon_B^{-\frac{3}{2}} (n_0 r_0^k)^{\frac{4}{k-4}} E_0^{\frac{3k-4}{8-2k}} \Delta_0^{\frac{4-3k}{8-2k}} t_{\text{obs}}^{\frac{3k-4}{4-k}} \propto t_{\text{obs}}^{\frac{3k-4}{4-k}} \quad (2.210)$$

となる。以上より、シェルの厚みを考慮した場合の順行衝撃波からのシンクロトン放射のスペク

トルの時間進化は次のようになる。急速冷却（fast cooling）の場合

$$F_\nu = F_{\nu, \max} \begin{cases} \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{1/3} \\ \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{-1/2} \\ \left(\frac{\nu_m}{\nu_c}\right)^{-1/2} \left(\frac{\nu}{\nu_m}\right)^{-p/2} \end{cases} \propto \begin{cases} t_{\text{obs}}^{\frac{16-9k}{3(4-k)}} & (\nu < \nu_c), \\ t_{\text{obs}}^{\frac{1}{2}} & (\nu_c < \nu < \nu_m), \\ t_{\text{obs}}^{-\frac{p-2}{2}} & (\nu_m < \nu) \end{cases} \quad (2.211)$$

遅延冷却（slow cooling）の場合

$$F_\nu = F_{\nu, \max} \begin{cases} \left(\frac{\nu}{\nu_m}\right)^{1/3} \\ \left(\frac{\nu}{\nu_m}\right)^{(1-p)/2} \\ \left(\frac{\nu_c}{\nu_m}\right)^{(1-p)/2} \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{-p/2} \end{cases} \propto \begin{cases} t_{\text{obs}}^{\frac{16-7k}{3(4-k)}} & (\nu < \nu_m), \\ t_{\text{obs}}^{\frac{12-5k-(4-k)p}{2(4-k)}} & (\nu_m < \nu < \nu_c), \\ t_{\text{obs}}^{-\frac{p-2}{2}} & (\nu_c < \nu) \end{cases} \quad (2.212)$$

となる (Gao et al. 2013; Yi et al. 2013)。以上より、遷移期間に放射されたシンクロトン放射が、初期残光の増光指数 ~ 1 を形成しているとすれば、関心のある波長 ν が $\nu < \min(\nu_c, \nu_m)$ である場合のみで、 $k \sim 0.6$ or 1 程度であることが要求される。

また、 R_{BM} を迎えたシェルからの放射が観測者に届く時間 T_{BM} を見積もる。逆行衝撃波がシェルを通過する時間は、式 (2.27) と式 (2.201) より、

$$T_\Delta / (1+z) \sim \frac{R_\Delta}{2c\Gamma^2} \sim \frac{1}{2c\Gamma^2} \left(\frac{1}{3-k}\right)^{\frac{1}{4-k}} l_S^{\frac{3-k}{4-k}} \Delta_0^{\frac{1}{4-k}} \quad (2.213)$$

$R = R_{\text{BM}}$ における順行衝撃波のローレンツ因子 Γ は BM 解のダイナミクスも満たすので、式 (2.177) と $R_\Delta \sim 2c\Gamma^2 T_\Delta$ の関係式を代入して整理すれば、

$$T_\Delta \sim \left(\frac{\Delta_0}{2c}\right) \left(\frac{1}{3-k}\right)^{\frac{4-k}{4}} \quad (2.214)$$

となる。さらに、逆行衝撃波がシェルを通過した後の希薄波が順行衝撃波まで到達するまでの時間 ΔT_{RW} についても考える。外部慣性系で噴出物の厚みが Δ_0 であり、噴出物の共動座標系での噴出物の厚みは $\Delta'_0 = \Gamma_3 \Delta_0$ である。ただし、 Γ_3 は外部慣性系から見た逆行衝撃波下流のローレンツ因子である (2.1.4 節参照)。噴出物の共動座標系で、この厚み Δ'_0 を希薄波が音速 c_s で伝播する時間は $\Delta t'_{\text{Tr}} = \Gamma_3 \Delta_0 / c_s$ となる。これを、外部慣性系での時間に直すと

$$\Delta t_{\text{Tr}} \sim \Gamma_3 \Delta t'_{\text{Tr}} = \Gamma_3^2 \Delta_0 / c_s \quad (2.215)$$

となり、さらに観測者系での時刻に直せば、

$$\Delta T_{\text{Tr}} \sim \Delta t_{\text{Tr}} / (2\Gamma_3^2) \sim \Delta_0 / c_s \sim \sqrt{3} \Delta_0 / c \quad (2.216)$$

と見積もれる。従って、 R_{BM} を迎えたシェルからの放射が観測者に届く時間 T_{BM} は、

$$T_{\text{BM}}/(1+z) = T_{\Delta} + \Delta T_{\text{Tr}} \sim \left\{ \sqrt{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3-k} \right)^{\frac{4-k}{4}} \right\} \frac{\Delta_0}{c} \quad (2.217)$$

となる。光度の極大を与える時刻 T_{BM} が決まることで、シェルの厚み Δ_0 がおおよそ決まることを示している。観測で見られている、光度の極大を与える時刻は数千秒だったので、 $\Delta_0 \sim 10^{13}$ cm と制約されることになる。なお、式 (2.206) から、式 (2.207) で近似されるダイナミクス (遷移期) が顕著になり始めるタイミングで放射された光子が観測者に届く時刻 T_{tra} は

$$T_{\text{tra}}/(1+z) \sim \frac{R_{\text{tra}}}{2c\Gamma_0^2} \sim \frac{1}{2c\Gamma_0^2} \left(\frac{E_0}{16\pi m_p c^2 (n_0 r_0^k) \Delta_0 \Gamma_0^4} \right)^{\frac{1}{2-k}} \quad (2.218)$$

なお、このタイムスケールとは独立して、かき集められた星間物質と噴出物の質量が等しくなるタイミングで放射された光子が観測者に届く時間 T_{dec} は、式 (2.202) より、

$$T_{\text{dec}}/(1+z) \sim \frac{l_S}{2c} \Gamma_0^{-\frac{8-2k}{3-k}} \quad (2.219)$$

と見積もれる。

第3章 ベイズ推定によるモデル検証方法

多くの観測的・実験的研究では、モデルの検定に頻度論的手法が用いられてきた。しかし、ガンマ線バースト（GRB）のように未解明の物理過程を多く含む複雑な系では、頻度論的手法による解析はしばしば困難である。実際、残光観測に基づく仮説検証においては、観測データを最もよく再現するパラメータ値を手作業で探索し、その結果から理論的示唆を導くという方法が一般的に行われてきた。しかしこの方法では、最適値と思われる値が本当に観測データを最もよく再現するものか、他の解釈が排除できるのかを厳密に主張することは難しい。また、モデルが観測を十分に表現できていない場合には、最尤値自体の物理的意義が不明瞭になるという問題もある。

これに対し、ベイズ推定は単一の最尤値に依存せず、パラメータ空間全体にわたる事後分布を評価できる点で本質的に異なる。これにより、各パラメータの不確実性や相関を定量的に把握し、「データと整合的な範囲」を直接的に議論することが可能となる。また、異なる仮説やモデルの比較も、ベイズ因子やモデル証拠（Bayesian evidence）に基づいて統計的に評価できるため、従来の手探り的な解析よりも客観的かつ体系的に仮説の妥当性を検証できる。

本章ではベイズ推定の基礎と、GRB 残光モデルの検証におけるベイズ推定の意義を説明し、実際にベイズ推定を行う計算ツール `emcee` (Foreman-Mackey et al. 2013) と `MultiNest` (Feroz et al. 2008, 2009; Feroz et al. 2019) の計算方法を説明する。

3.1 ベイズ推定の基礎

本節では、主に教科書『物理のためのデータサイエンス入門』（植村誠 2023）と『ベイズ統計データ解析』（姜興起 2010）を参考に、本研究におけるベイズ推定の理論的基礎とその役割について説明する。

3.1.1 ベイズの定理

ベイズの定理とは X が得られたという条件のもとでの θ の確率である。 X が生じる確率を $p(X)$ 、 θ_i が生じる確率を $p(\theta_i)$ 、 X と θ_i が同時に生じる確率を $p(\theta_i, X)$ 、 X が生じた前提で θ_i が生じる確率を $p(\theta_i|X)$ 、 θ_i が生じた前提で X が生じる確率を $p(X|\theta_i)$ とする。すると、 $p(\theta_i|X)$ と $p(X|\theta_i)$ は条件付き確率であり、以下のように書き表せる。

$$p(\theta_i|X) = \frac{p(\theta_i, X)}{p(X)} \quad (3.1)$$

$$p(X|\theta_i) = \frac{p(\theta_i, X)}{p(\theta_i)} \quad (3.2)$$

上記の2つの式から、 $p(\theta_i, X)$ を消去し $p(\theta_i|X)$ について解くと、

$$p(\theta_i|X) = \frac{p(X|\theta_i)p(\theta_i)}{p(X)} \quad (3.3)$$

と書き表せる。ここで、 X を結果の事象、 θ_i を原因の事象だと捉えると、式 (3.3) の左辺は「結果 X を得た場合に原因が θ_i である確率」、右辺の $p(X|\theta_i)$ は「原因が θ_i であった時に結果として X を得る確率」、 $p(\theta_i)$ は「原因が θ_i である確率」と読み替えることができる。このことから、 $p(\theta_i)$ と $p(X|\theta_i)$ を結果がわかる前（事前）と結果を得た後（事後）の原因が θ_i の確率という意味に由来して、それぞれ「事前確率」と「事後確率」と呼ぶ。そして $p(X|\theta_i)$ は尤度として取り扱うことができる。また、 $p(X)$ は「結果として X を得る確率」と読み替えることができる。この $p(X)$ は、あらゆる原因 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ の元で X が得られる時の確率であるべきなので、

$$p(X) = \sum_{i=1}^n p(X|\theta_i)p(\theta_i) \quad (3.4)$$

とかける。したがって、式 (3.3) は次のように書き換えることができる。

$$p(\theta_i|X) = \frac{p(X|\theta_i)p(\theta_i)}{\sum_{i=1}^n p(X|\theta_i)p(\theta_i)} \quad (3.5)$$

より一般に、複数ある観測事実の集合 $\vec{X}$ 、複数ある原因の集合 $\vec{\Theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_D\}$ に置き換え、 θ_i は連続的に値を取り得る場合も含めると、

$$p(\vec{\Theta}|\vec{X}) = \frac{p(\vec{X}|\vec{\Theta})p(\vec{\Theta})}{\int_{\vec{\Theta}} d^D \vec{\Theta} p(\vec{X}|\vec{\Theta})p(\vec{\Theta})} = \frac{p(\vec{X}|\vec{\Theta})p(\vec{\Theta})}{Z} \quad (3.6)$$

とまとめることができる。これがベイズの定理である。

ベイズの定理の分母に相当する $Z = \int_{\vec{\Theta}} d^D \vec{\Theta} p(\vec{X}|\vec{\Theta})p(\vec{\Theta})$ はそのモデルの不定性の範囲で観測結果の起こりやすさの尺度を意味しており、「モデル証拠」あるいは「周辺尤度」と呼ばれる。

ベイズ推論では、観測データとモデルから事後分布を求めることが主要な目的のひとつである。事後分布を得るためには、ベイズの定理に含まれるモデル証拠（周辺尤度）を計算する必要があり、これは全パラメータ空間での積分を伴うため、一般には解析的に求めることは困難である。モデル証拠の積分はモンテカルロ法により数値的に評価されるが、D 次元のパラメータ空間を総当たりで探索することは非現実的である。そのため、近年では効率的に事後分布やモデル証拠を評価するためのさまざまなサンプリング法が開発されている。事後分布の形状を精密に求めることが主目的である場合、モデル証拠の計算を省略し、パラメータ空間の高尤度領域を重点的に探索するマルコフ連鎖モンテカルロ（MCMC）法が広く用いられる。一方、モデル証拠の計算や事後分布の大まかな概形を得ることが目的の場合、低尤度領域のサンプリング密度を抑えることで効率化した Clustered Nested Sampling（CNS）法が有用である。CNS 法は Nested Sampling を拡張し、複数のモードを持つ事後分布に対しても効率的に証拠の推定を行うことができる。

本研究ではどちらの方法でも計算を行った。MCMC 法を用いる場合は公開パッケージである `emcee` (Foreman-Mackey et al. 2013) を、CNS 法を用いる場合は公開パッケージである `MultiNest` (Feroz et al. 2008, 2009; Feroz et al. 2019) を使用し、実装のために `PyMultiNest` (Buchner 2016) を用いた。(これらのサンプリングアルゴリズムや事後分布とモデル証拠の計算方法は3.3 節と 3.4 節を参照)

3.1.2 事前分布の選択

事前分布 $p(\vec{\Theta})$ はベイズ推定における基本的要素であり、観測データをどのような立場で解釈するかを反映するものである。ここでいう「立場」とは、推論の主体が有する事前情報に基づいて設定されるものであり、異なる主体が同一の観測データを用いたとしても、それぞれが異なる知見や前提を持っていれば、異なる事前分布を設定し、結果として異なる事後分布を得ることがある。

事前分布の設定が不適切な場合、尤度の影響が十分に反映されず、事後分布が事前分布とほぼ一致してしまい、観測データを利用する意義が損なわれる。事前知識が存在しない場合には無情報事前分布がしばしば用いられ、典型的には一様分布を課すことで実装される。ただし、一様分布を用いる場合でも、どのパラメータに対して、どのような範囲で一様性を仮定するかを慎重に検討する必要がある。

本研究で検証対象とした仮説モデル (2.3 で解説したモデル) に含まれるパラメータを表3.1に示す。事前分布を設定する際には、それぞれのパラメータの物理的意味を踏まえ、数桁にわたって値を取り得るのか、あるいは特定のスケールでのみ意味を持つのかを考慮した。その上で、対数空間または線形空間のいずれに一様分布を課すかを判断した。

表 3.1: 本研究で用いたモデルパラメータ

パラメータ $\vec{\Theta}$	意味	一様を課す空間
E_0 [erg]	爆発の全エネルギー	対数
Γ_0	ジェットローレンツ因子の初期値	対数
Δ_0/c [cm]	シエルの厚みの初期値	対数
k	冪乗型密度分布の冪指数	線形
n_0 [cm ^{k-3}]	初期半径での外部物質の密度	対数
θ_j [rad]	ジェットの開き角	線形
α	開き角と Gaussina 型ジェットのコア角の比 (θ_j/θ_c)	線形
β	θ_j に対する観測者の見込み角 ($\theta_{\text{obs}}/\theta_j$)	線形
ϵ_B	磁場への内部エネルギー変換効率	対数
ϵ_e	電子への内部エネルギー変換効率	対数
p	電子のエネルギー分布の冪指数	線形
f_e	電子の加速効率	対数

例えば、爆発エネルギーやローレンツ因子、シエルの厚みといった物理量は数桁にわたって変動するため対数空間に一様分布を課した。一方で、冪指数を担う k , p や角度に関するパラメータは有限の範囲でのみ意味を持つため、線形空間に一様分布を課した。また、割合や効率を意味するパラメータは 0~1 の範囲で数桁にわたり得られる可能性があるため、対数空間に一様分布を課した。

なお、現実的な計算のためには無限に広がる領域に一様分布を設定することはできないため、事前分布の区間も明示的に指定した。ある区間を設定して計算を行えば事後分布が得られるが、その区間を変更することは推論主体の「立場」を変更することに相当し、得られる事後分布が変化する可能性がある。本研究では仮説の妥当性を検証するため、複数の区間設定を試み、それぞれから得

られる事後分布を比較した。設定した具体的な区間については、5章で詳しく述べる。

3.1.3 尤度関数の定義

尤度関数 $p(D|\vec{\Theta})$ は、モデルのパラメータ $\vec{\Theta}$ が与えられたときに観測データ D が得られる確率を表すもの (パラメータ $\vec{\Theta}$ のもとでの観測データ D の得られやすさ; likelihood) であり、ベイズ推定を構成するもう一つの基本的要素である。尤度関数の具体的な形は、観測誤差の性質や、モデル化の過程で採用した物理的・統計的仮定に依存して決まる。本研究では GRB 残光の測定値が全て正規分布に従うと仮定し、尤度関数を次式で定義する。

$$L(\vec{\Theta}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \prod_{i=1}^n \sigma_i} \exp \left(- \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - f_i(\vec{\Theta}))^2}{2\sigma_i^2} \right) \quad (3.7)$$

ただし n は測定値の総数、 X_i は i 番目の測定値、 σ_i は i 番目の測定値の誤差、 $f_i(\vec{\Theta})$ は $\vec{\Theta}$ を与えた時に理論モデルから算出される i 番目の期待値である。

一度尤度の関数型を定めれば、観測データと仮説を組み込んだ理論モデルを与えることで、尤度の値を算出できる。仮説検証のために用いた観測データについては4.1節で、また仮説を組み込んだ理論モデルの計算ツールについては4.2節で詳しく述べる。

3.1.4 モデル証拠とベイズ因子

モデル証拠 Z は事後分布の正規化定数であり、次式で表される。

$$Z = \int_{\vec{\Theta}} d\vec{\Theta} p(\vec{X}|\vec{\Theta})p(\vec{\Theta}) = p(\vec{X}). \quad (3.8)$$

これは観測データ $\vec{X}$ が生じる確率そのものであり、与えられたモデルに対して定数となる。したがって、事後分布の分布するパラメータ領域のみを得ることが目的であれば、モデル証拠を計算する必要はない。実際、3.3 章で解説するメトロポリス-ヘイスティング法に代表される MCMC 法は、事後分布に比例する分布から直接サンプルを生成できるため、正規化定数に相当するモデル証拠を求めずに推論を実行できる。一方で、異なるモデルの比較を目的とする場合には、このモデル証拠を評価することが有用である。一般に高次元の多重積分を含むため数値的に計算するのは困難だが、3.4 章で解説する Nested Sampling 法はこれを実現する。

モデル比較では、各モデル M_i に対するモデル証拠 Z_i を用いる。特に、2つのモデル M_1 と M_2 の比較にはベイズ因子

$$B_{12} = \frac{Z_1}{Z_2} \quad (3.9)$$

が導入される。これは観測データが M_1 によって説明される可能性が、 M_2 に比べてどれだけ高いかを表す指標である。 $B_{12} > 1$ であれば M_1 が優勢、逆なら M_2 が優勢と解釈できる。

一見すると、モデルを複雑にすればするほど観測データに適合し、尤度が大きくなるように思える。しかし、複雑すぎるモデルは特定のデータにはよく適合しても、別のデータに対しては尤度が下がる可能性が高く、汎用性に欠ける。逆に、単純すぎるモデルはデータを十分に説明できず、尤度が低くなる。したがって、良いモデルとは「データを適切に説明できる一方で、不要な複雑さを持たないモデル」である。モデル証拠はこのバランスを自然に評価できる量である。パラメータ空

間全体で尤度と事前分布を積分することで、モデルがどの程度広く安定してデータを説明できるかを測ることができる。高い尤度を示すパラメータが存在しても、その領域が狭くほとんどの領域で尤度が低ければ、積分値としてのモデル証拠は小さくなる。一方で、ある程度の広さでデータをうまく説明できるパラメータ領域を持つモデルは、大きなモデル証拠を得る。この性質によって、モデル証拠は「データに効いている本質的なパラメータは評価するが、不要なパラメータ追加は罰則を与える」指標として機能する。

5.3 節で詳しく述べるように、本研究では「星間物質の密度分布が冪乗則に従う」という仮説の妥当性を検証するために、冪指数パラメータ k を含むモデルと含まないモデルとでモデル証拠の値を比較した。さらに、解析に用いる観測データの時間領域や周波数帯を変更し、どの観測データが仮説を強く支持しているのかを考察した。

3.1.5 事後分布の解釈

事後分布は、観測データと事前分布の双方を踏まえて、パラメータに対する不確実性を記述する確率分布である。本研究では、この事後分布を解析することが、パラメータの推定だけでなく、モデルの物理的妥当性を評価する主要な作業となる。

事後分布の最大点 (Maximum a Posteriori: MAP 値) は、分布を最大化するパラメータ値として定義されるが、これは多次元分布における単一点にすぎず、事後分布全体を代表する量ではない。また、サンプリングによって得られる MAP 値は、事前分布と尤度の積によって定まる事後分布の最大点に対応するものであり、これは多次元事後分布上の一点にすぎない。この値を「真の値」とみなす解釈はベイズ推論の枠組みには存在しない。

さらに、尤度を正規分布、事前分布を一様分布とした場合でも、得られる多次元の事後分布が必ずしも単純な正規形状になるとは限らず、周辺分布や同時分布の形状が MAP 値と整合しないことも自然に起こる。これは、MAP 値が多次元分布の最大点であるのに対し、周辺分布のピークが他のパラメータを積分した結果として現れる最頻値であるためである。

したがって、本研究では、一点の推定値である MAP 値に依存した解釈ではなく、事後分布全体の形状・広がり・相関の構造を重視する立場を採る。MAP 値はあくまで補助的指標として扱い、分布の特徴量 (信頼区間、相関構造、縮退)こそがモデルの物理的評価において重要である。

事後分布は本来多次元空間上で定義されるため、その全体像を直接可視化することは難しい。しかし、一次元または二次元に射影することで分布の一部を理解できる。一次元射影は対象パラメータ以外を積分した「周辺分布」を、二次元射影は特定の二つのパラメータにおける「同時分布」を与える。これらをまとめて可視化したものが一般にコーナープロットと呼ばれ、事後分布の解釈において有用である。

本章で述べた方法によって得られる事後分布および MAP 値の位置は、第6章において GRB 残光モデルの妥当性を議論する上での重要な手がかりとなる。

3.2 GRB 残光モデルの検証における意義

GRB 残光の放射メカニズムは極めて複雑であり、未解明の物理過程を多数含む (2章参照)。そのため理論モデルには多くの未定パラメータが存在し、観測データが十分でない場合には複数の異なるパラメータの組み合わせが同様の光度曲線を再現し得る、いわゆるパラメータの縮退が生じる。

また、観測自体にモデルを厳密に制約するだけの情報が含まれていない場合も多く、実際に同一の観測結果に対して複数の理論モデルが提案されることも珍しくない。

3.1節で述べたように、ベイズ推定は観測データの不確実性を考慮しつつ、モデルの妥当性を定量的に評価できる手法である。この枠組みを GRB 残光解析に適用する意義は次のようにまとめられる。

1. パラメータ空間の不確実性を定量化できる。単なる最尤値ではなく事後分布を通じて、どの範囲のパラメータが観測と整合的であるかを定量的に評価できる。これにより、モデルが許容する物理的自由度やパラメータ間の相関を明示的に評価できる。
2. モデル証拠に基づく仮説比較が可能である。Clustered Nested Sampling (CNS) 法などを用いることで、モデルの尤もらしさを表すベイズモデル証拠を直接算出できる。これにより、複数の GRB 残光の理論モデルのうちどれがより自然に観測を説明するかを定量的に比較できる。
3. 広大なパラメータ空間を効率的に探索できる。ベイズ推定では、従来の試行錯誤的探索では到達困難なパラメータ領域までを自動的にサンプリングし、観測と最も整合的な領域（最大事後確率値, MAP 値）やその周辺の高い事後確率領域を特定できる。

これらの特性により、ベイズ推定は GRB 残光モデルに対する理論的制約とモデル検証の双方を高精度に行う手段として有効である。

また、理論的に縮退関係のあるはずのパラメータ間に縮退が見られなかった場合には、以下のような解釈が考えられる。

1つ目は、観測データが実は縮退を破るだけの情報を含んでいた可能性である。この場合、パラメータを変化させたときに、光度曲線やスペクトルの適合度がどの程度悪化するかを調べることが有効である。また、MAP 値や解析解を参照しつつ、観測されたスペクトル進化や break の特徴と理論的縮退条件が整合しているかどうかを確認することで、縮退が成立していない物理的理由を検討できる。

2つ目は、事前分布の設定が縮退方向を抑制している可能性である。事前分布が狭すぎる、あるいは特定方向に重みを与えすぎると、縮退方向が事後分布に十分に反映されない場合がある。この可能性を評価するためには、事前分布の幅を広げたり、形 (uniform / log-uniform など) を変更したりして再解析し、事後分布の変化を比較することが有効である。

3つ目は、サンプリングが縮退方向を十分に探索していない可能性である。次節で述べるように、MCMC 法や CNS 法はそれぞれ探索特性が異なり、特に CNS 法は高次元空間の細い谷や尾部領域を密にサンプリングすることが苦手である。このため、理論的には存在する縮退方向が事後分布に現れないことがある。この可能性を評価するためには、サンプル数や live points を増やしたり、異なるサンプラー (MCMC と CNS など) で結果を比較することが有効である。

3.3 マルコフ連鎖モンテカルロ法 (emcee)

本節では、ベイズ推定を行うための効率的なサンプリング法として知られる、マルコフ連鎖モンテカルロ (Markov Chain Monte Carlo; MCMC) 法について説明する。マルコフ連鎖モンテカルロ法を実現するアルゴリズムは、メトロポリス法、ギブスサンプラー、ハミルトニアンモンテカルロ法など、多数あるが本論文では、本研究で利用したメトロポリス・ヘイスティングス (Metropolis-Hastings) 法について説明する。なお、本節は『物理のためのデータサイエンス入門』(植村誠 2023) と『Rで学ぶデータサイエンス 3 ベイズ統計データ解析』(姜興起 2010) を参考にした。

3.3.1 マルコフ連鎖モンテカルロ法

3.1.1節で述べた、モデル証拠 (または周辺尤度) $p(X) = \sum p(X|\theta_i)p(\theta_i)$ は多くの場合では解析的に評価できないため、事後分布の形状を直接的に得ることは困難である。この問題に対処するために開発されたのがマルコフ連鎖モンテカルロ (Markov Chain Monte Carlo; MCMC) 法である。

MCMC 法では、目的とする確率分布 $p(\theta|X)$ からの直接サンプリングが困難であっても、その分布を定常分布 (平衡分布) として持つマルコフ連鎖を構成することで、逐次的にサンプルを生成する。十分長い連鎖の後に得られたサンプルの集合は、事後分布に従う標本とみなすことができる。MCMC 法の重要な特徴は、分布の正規化定数 (すなわちモデル証拠値 $p(X)$) を必要としない点にある。このため、尤度と事前分布の積 $p(X|\theta)p(\theta)$ の比が計算できれば、事後分布に従うサンプルを生成することができる。MCMC 法の収束性は、エルゴード性および詳細釣り合い条件に基づいて保証される。エルゴード性とは、十分長い時間の平均が確率分布全体の平均に一致する性質を指し、詳細釣り合い条件は、遷移確率 $T(\theta'|\theta)$ が

$$p(\theta)T(\theta'|\theta) = p(\theta')T(\theta|\theta') \quad (3.10)$$

を満たすことを意味する。この条件を満たすことで、定常分布が事後分布 $p(\theta|X)$ となる。

このようにして得られたサンプル集合から、パラメータの推定値や信頼区間、さらにはモデル比較のためのベイズ因子を数値的に評価することができる。MCMC 法には多様なアルゴリズムが存在するが、最も基本的で広く用いられるのが次節で述べる、メトロポリス・ヘイスティングス (Metropolis-Hastings) 法である。

3.3.2 メトロポリス・ヘイスティングス 法

メトロポリス・ヘイスティングス (MH) 法は、MCMC アルゴリズムの一つであり、1953 年に Metropolis らによって提案されたメトロポリス法を、1970 年に Hastings が一般化したものである (Hastings 1970; Metropolis et al. 1953)。MH 法では、任意の確率分布 $p(\theta|X)$ に従うサンプル列を生成するために、提案分布 $q(\theta'|\theta)$ に基づいて新しい候補点を生成し、その受理確率 (acceptance probability)

$$\alpha = \min \left(1, \frac{p(X|\theta')p(\theta')q(\theta|\theta')}{p(X|\theta)p(\theta)q(\theta'|\theta)} \right) \quad (3.11)$$

に従って更新を行う。すなわち、候補点 θ' は確率 α で採択され、そうでなければ現在の点 θ が再度保持される。この単純な手続きにより、定常分布として目的の事後分布を持つマルコフ連鎖が構成される。

提案分布の選び方はアルゴリズムの効率に大きく影響する。たとえば、ガウス型の対称提案分布 $q(\theta'|\theta) = q(\theta|\theta')$ を採用すると、受理確率は尤度と事前分布の積の比のみで表される：

$$\alpha = \min \left(1, \frac{p(X|\theta')p(\theta')}{p(X|\theta)p(\theta)} \right) \quad (3.12)$$

提案分布のスケールが大きすぎると受理率が低下し、逆に小さすぎると連鎖が局所的に停滞してしまうため、適切なスケールの調整が必要である。

3.4 Clustered Nested Sampling 法 (MultiNest)

本節では、ベイズ推定を行うためのツールとして知られている MultiNest (Feroz et al. 2008, 2009; Feroz et al. 2019) について、説明する。まず、MultiNest が解析の目的とする「モデル選択」の考え方を説明する。次に、事後分布とモデル証拠を求めるアルゴリズムである、Nested Sampling 法、Ellipsoidal Nested sampling 法、Clustered Nested Sampling 法について解説し、最後に、実装面での特徴として、並列化による効率化の仕組みと途中経過の監視方法について説明する。

3.4.1 モデル選択

多数のモデルが想定できる時に、観測データをもとにどのモデルが良いか1つ選ぶことを「モデル選択」という。ベイズの定理では、とあるモデルを一つ仮定した時のそのモデルパラメータを確率変数として表現しているが、モデル間の比較をするためにはそれぞれのモデルで導かれる事後分布の大小を比較すれば良い。例えば、 H_0 と H_1 のモデルの比較する場合、事後確率分布が大きい方が優位と言えるはずなので、

$$\frac{p(H_1|\vec{X})}{p(H_0|\vec{X})} > 1 \Rightarrow H_1 \text{ is better than } H_0 \quad (3.13)$$

となる。ここで、ベイズの定理を用いて式変形すると

$$\frac{p(H_1|\vec{X})}{p(H_0|\vec{X})} = \frac{p(\vec{X}|H_1)p(H_1)}{p(\vec{X})} \frac{p(\vec{X})}{p(\vec{X}|H_2)p(H_2)} = \frac{p(\vec{X}|H_1)p(H_1)}{p(\vec{X}|H_2)p(H_2)} = \frac{Z_1\pi(H_1)}{Z_2\pi(H_2)} \quad (3.14)$$

ここで、

$$p(\vec{X}|H_i) = \int_{\vec{\Theta}_i} d^D \vec{\Theta}_i p(\vec{X}|\vec{\Theta}_i)p(\vec{\Theta}_i) = \int_{\vec{\Theta}_i} d^D \vec{\Theta}_i L(\vec{X}|\vec{\Theta}_i)\pi(\vec{\Theta}_i) = Z_i \quad (3.15)$$

とした。尤度 $p(\vec{X}|\vec{\Theta}_i)$ と事前確率分布 $p(H_i)$ は慣習から $L(\vec{X}|\vec{\Theta}_i)$ と $\pi(H_i)$ で置き換えた。上記の結果から、事後確率分布を比較するためには周辺尤度 Z_i を計算する必要がある。 D 次元空間で効率よくサンプリングし、モンテカルロ積分する方法として、Nested Sampling 法がある。

3.4.2 事前体積

Nested Sampling では周辺尤度 Z を効率的に見積もるために、Prior volume χ を導入する。 χ は以下のように定義される。

$$d\chi(\lambda) \equiv \pi(\vec{\Theta})d^D \vec{\Theta}, \quad (3.16)$$

従って、

$$\chi(\lambda) = \int_{L(\vec{\Theta}) > \lambda} \pi(\vec{\Theta})d^D \vec{\Theta} \quad (3.17)$$

である。ただし、 $L(\vec{X}|\vec{\Theta})$ は尤度 (Likelihood) で、 $\pi(\vec{\Theta})$ は事前確率分布 (prior) である。 $L(\vec{\Theta}) = \lambda$ の等尤度等高線内に含まれる領域での事後確率分布 (posterior) の体積に相当する。この χ を用い

て周辺尤度 Z を表してみる。prior を一様分布とする場合、 Z は D 次元空間での $\vec{\Theta}$ の存在領域全体で尤度関数 $L(\vec{\Theta})$ を積分することであり、それは λ を 0 から尤度の最大値 $L_{\max}$ までの範囲で $\chi(\lambda)\lambda$ を足し合わせることに相当する。さらに、 λ を 0 から $L_{\max}$ に変化させることは $\chi(\lambda)$ を 1 から 0 に変化させることとに対応する。なぜなら、 $\lambda = 0$ のときの prior volume $\chi(0)$ は事前確率分布の存在領域全体での積分であり、それは 1 であることは自明で、 λ を $L_{\max}$ に近づけていくと、等尤度等高線内の領域は 0 に近づいていくことがわかるからである。つまり、

$$Z = \int_{\vec{\Theta}} d^D \vec{\Theta} L(\vec{\Theta}) \pi(\vec{\Theta}) = \int_0^1 L[\chi(\lambda)] d\chi \quad (3.18)$$

と書き換えられる。このようにして考えると、 D 次元空間での積分だった Z が χ のみの一次元での積分となっていることがわかる。一次元の積分に落とし込むことができたので、さらに積分を台形公式より区分求積の形にすることができる。

$$Z = \int_0^1 L[\chi(\lambda)] d\chi \sim \sum_{i=1}^M L(\chi_i) \frac{\chi_{i-1} - \chi_{i+1}}{2} \quad (3.19)$$

ただし、 $0 < \chi_M < \dots < \chi_2 < \chi_1 < \chi_0 = 1$ である。以上より、 χ_{i-1} と L_{χ_i} (ただし $1 \leq i \leq M$) を D 次元のパラメータ空間からサンプリングにより求めていけば、 Z を算出することができるとわかった。

3.4.3 Nested Sampling アルゴリズム

ここでは、まず Nested Sampling のアルゴリズムを簡単にまとめる。その後に、Prior Volume の縮小推移や収束条件について説明する。

- $i = 0$
1. Prior volume の初期値: $\chi_0 = 1$.
 2. 事前分布 $\pi(\vec{\Theta})$ から N 個の active サンプル $\vec{\Theta}_{\text{act}}$ を取得。
 3. 取得したサンプルそれぞれに対して尤度を計算: $L(\vec{\Theta}_{\text{act}})$
 4. 尤度の小さい順に並べ、0 から $N - 1$ のラベルをつける: $\{L_0 < L_1 < \dots < L_{N-1}\}$
 5. 以上より χ_0 と $L(\chi_0) \sim L_0$ を取得。
 6. 最も小さい尤度 L_0 を示すサンプルを捨てる: $\{L_1 < \dots < L_{N-1}\}$
 7. $L_* > L_0$ となるような尤度 L を示すサンプル $\vec{\Theta}_*$ で置き換える: $\{L_*, L_1, \dots, L_{N-1}\} > L_0$
- each i
1. Prior volume の更新: $\chi_i = t_i \chi_{i-1} = t_1$. ただし t_1 は分布 $\text{Pr}(t) = Nt^{N-1}$ に従う。
 2. 尤度が小さい順に並べ直し、0 から $N - 1$ のラベルをつける:
 $\{L_*, L_1, \dots, L_{N-1}\} \rightarrow \{L_0 < L_1 < \dots < L_{N-1}\}$
 3. 以上より、 χ_i と $L(\chi_i)$ と $L_{\max} \sim L_{N-1}$ を取得。
 4. 残りの事後分布が Z に寄与する最大量 $\Delta Z_i = L_{\max} \chi_i$ を計算。
 - ΔZ_i が基準値 (default: 0.5) を上回る: $i = 0$ の 6. と 7. の工程と同様の操作。
 - ΔZ_i が基準値 (default: 0.5) を下回る: 試行終了。

まず、 i 番目の Prior Volume が $\chi_i = t_i \chi_{i-1}$ で与えられ、 t_i の確率密度関数が $\Pr(t) = Nt^{N-1}$ であることについて考える。Prior volume の初期値は事前確率分布の全範囲の体積に相当するので $\chi_0 = 1$ である。次の試行での Prior volume χ_i ($i \geq 1$) は、工程 7. で決めたサンプルの集合 $\{\vec{\Theta}_*, \vec{\Theta}_1, \dots, \vec{\Theta}_{N-1}\}$ のうち、最小尤度を示すサンプル $\vec{\Theta}_{\min}$ により、 $\lambda = L(\vec{\Theta}_{\min})$ とすることで式 (3.16) から決まるだろう。このとき、 $\vec{\Theta}_{\min}$ は、その試行におけるサンプルの中で最大の Prior volume (ただし χ_{i-1} 未満) を示すサンプルでもあるはずだ。つまり、 i 番目の Prior volume χ_i の取りうる範囲は $0 \leq \chi_i < \chi_{i-1}$ であり、この範囲からランダムに N 個のサンプリングをしたとき最大値を示す Prior volume を求める問題に帰着する。 N 個のサンプルはそれぞれ、 $t_m \chi_{i-1}$ ($m = 1, 2, \dots, N$) であるとすれば、0 から 1 の範囲でランダムに t_m ($m = 1, 2, \dots, N$) を取得するとき、全ての値が t 以下となる確率分布 $F(t_m \leq t)$ は

$$F(t_m \leq t) = \left(\frac{t}{1}\right)^N \quad (3.20)$$

とかける。これより、確率密度関数 $\Pr(t)$ は

$$\Pr(t) = \frac{d}{dt} F(t_m \leq t) = Nt^{N-1} \quad (3.21)$$

となることがわかる。従って、アルゴリズムの中では i 番目の Prior Volume が $\chi_i = t_i \chi_{i-1}$ で与えられるとき、 t_i の確率密度関数が $\Pr(t) = Nt^{N-1}$ であるとして処理を進めている。

このように考えると、Prior volume の期待値や縮小推移も求められることに気がつく。計算の簡単のために、対数を取った量 $\ln t$ の期待値 $E[\ln t]$ を求めると、

$$E[\ln t] = \int_0^1 \ln t \Pr(t) = N \int_0^1 \ln t t^{N-1} = -\frac{1}{N} \quad (3.22)$$

であり、 $\ln t$ の標準偏差 $\sigma[\ln t]$ は

$$\sigma[\ln t] = \sqrt{E[(\ln t)^2] - (E[\ln t])^2} = \sqrt{\frac{2}{N^2} - \frac{1}{N^2}} = \frac{1}{N} \quad (3.23)$$

となる。従って $\ln \chi_i$ の期待値 $E[\ln \chi_i]$ と分散 $V[\ln \chi_i]$ は

$$E[\ln \chi_i] = \ln(t_i t_{i-1} \dots t_1 \chi_0) = \ln \prod_{k=1}^i t_k \sim \sum_{k=1}^i E[\ln t_k] = -\frac{i}{N} \quad (3.24)$$

$$\text{Var}[\ln \chi_i] = \text{Var}[\sum_{k=1}^i \ln t_k] = \sum_{k=1}^i \text{Var}[\ln t_k] \sim \sum_{k=1}^i \sigma[\ln t_k]^2 = \frac{i}{N^2} \quad (3.25)$$

となる。従って、 $\ln \chi_i$ は

$$\ln \chi_i = -\frac{i}{N} \pm \sigma[\ln \chi_i] = -\frac{i}{N} \pm \sqrt{\text{Var}[\ln \chi_i]} = -\frac{i}{N} \pm \frac{\sqrt{i}}{N} \quad (3.26)$$

となるので i 番目の Prior volume の期待値は

$$\chi_i \sim \exp\left(-\frac{i}{N}\right) \quad (3.27)$$

と求まり、指数関数的に減少することがわかる。

それでは次に、どこまで Prior volume を小さくすれば Z が求まったと判断すれば良いのか、収束条件について説明する。アルゴリズムの中では、残りの事後分布が周辺尤度 Z に寄与する最大量 $\Delta Z_i = L_{\max} \chi_i$ によって評価している。 $L_{\max}$ はその段階で生き残っているサンプルの中で最大尤度を示すものであり、工程 $i-3$ で取得する。また、 χ_i はその段階での Prior volume である。Prior volume は式 (3.27) から指数関数的に減少する一方で、 $L_{\max}$ はサンプリングが進むにつれ尤度関数の高い領域に集中することで増加する傾向を持つが、最終的にはほぼ一定値に収束する。つまり、試行が進めば進むほど ΔZ_i は指数関数的な減少の振る舞いをするはずである。さて、 ΔZ_i がどこまで小さくなれば十分なのだろうか。この閾値が厳しすぎると、非常に多くのサンプルが必要になり計算コストが大幅に増加する。一方で、緩すぎると精度が保たれない。そこでこのバランスの取れた、妥当な値を採用する必要がある。MultiNest では、多くの実践では $\Delta Z = 0.5$ が採用され経験的に妥当だと示されている。しかし、計算させたい状況に応じてユーザーが適切に調整すべきハイパーパラメータの一つである。

3.4.4 Ellipsoidal Nested sampling

Nested sampling は尤度の高い領域で高密度にサンプリングするので、高次元空間でも効率的な探索が実現でき、局所解にも陥りにくい。この点で Nested sampling はベイズ推定における計算で強力な手法であるが欠点もある。欠点の一つは試行を重ねるにつれて、 $L_* > L_0$ を満たす尤度を示す新しいサンプル $\vec{\Theta}_*$ を取得しづらくなることである。なぜなら、サンプリングは全領域から行うのに対し Prior volume が縮小するからである。この欠点を部分的に克服するために Mulhjerjee らにより改良されたものが Ellipsoidal Nested sampling である。

改良点は、新しいサンプリングをパラメータ空間の全領域で行うのではなく、既存のサンプル点を包括する楕円を定義し、その楕円の中から新しいサンプルを取得するようにした点である。このようにすれば、比較的尤度の高い領域からのサンプリングが期待できるので、効率的であると考えられる。

D 次元のパラメータ空間に散布している、 N 個のサンプル点により定義される D 次元の楕円体は一般に以下のように記述できる。 N 個のサンプル点 $\vec{u}_i$ の集合を $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_N\}$ とする。ここで、 $\vec{u}_i$ は D 個の成分を持つベクトルである。サンプル点の集合 S の共分散行列を C 。楕円体の中心を示す点を $\vec{u}_0$ とすると、 D 次元空間における任意の点を $\vec{u}$ が楕円体内部に含まれる条件は

$$(\vec{u} - \vec{u}_0)^T C^{-1} (\vec{u} - \vec{u}_0) \leq 1 \quad (3.28)$$

とかける。共分散行列 C はサンプル点の集合 S の重心を $\vec{\mu}$ とすると、

$$\vec{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{u}_i \quad (3.29)$$

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\vec{u}_i - \vec{\mu})(\vec{u}_i - \vec{\mu})^T \quad (3.30)$$

である。

3.4.5 Clustered Nested sampling

Nested Sampling とそれを改良した Ellipsoidal Nested Sampling をここまでで紹介したが、いずれの場合も多峰性のある事後分布の場合には探索効率が非常に悪くなる。この欠点を改良し適切に処理できるようにしたものが、Clustered Nested Sampling である。具体的にはサンプリングした後複数のクラスタに分割し、それぞれについて拡大された楕円体を構築する。この構築した楕円体の中から次のサンプルを取得していくことで、高い尤度を示す場所が複数ある場合もそれぞれについてサンプリングできるようにしたものである。

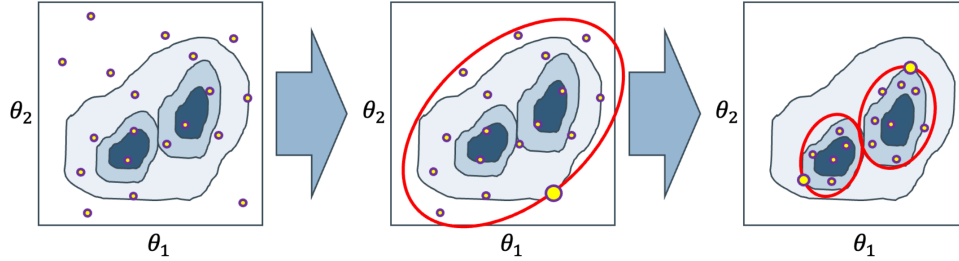


図 3.1: Clustered Nested Sampling によるサンプリング推移の概観。

クラスタリングには K-means 法を用いている。これは空間に散らばったデータをデータ同士の「近さ」を基準に K 個のクラスタに分割するという手法である。このアルゴリズムは以下の通りである。

1. クラスタの中心 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K)$ を適当に初期化。
2. パラメータ空間の中から適当に N 個のデータをサンプリングする。
3. N 個の各データは一番近い μ_k を選び、クラスタ番号 k に属する、とする。
4. 各クラスタ k に属するデータ平均 $\bar{\mu}$ を求める。
5. $\mu = \bar{\mu}$ として更新する。
6. 更新の差 $\Delta\mu$ を計算し、基準値 R を用いて以下のように収束判定を行う。
 - (a) $\Delta\mu \geq R$ ならば、2. に戻る。
 - (b) $\Delta\mu < R$ ならば、収束したとして終了。

これにより、パラメータ空間内でサンプリングされたデータに対して、 K 個の集団を特定する。さらに、 K 自身も今度はデータから構成される楕円体の最適化により自動で決定する。楕円体の最適化については次に説明する。

D 次元空間における楕円体の定義は3.4.4節で紹介した。ここではクラスタされたデータの集合 S_k を含むように D 次元空間での楕円体 E_k を定義する。ただし、 S_k は定義により

$$S = \cup_{k=1}^K S_k \quad (3.31)$$

を満たす。共分散行列 C の代わりに拡大係数 f_k を用いて定められる、 $D \times D$ の実対称正定値行列 $A = f_k C_k$ を用いて、拡大された楕円体 E_k を以下のように定義する。

$$E_k \equiv \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^D | \mathbf{u}^T A^{-1} \mathbf{u} \leq 1\} \quad (3.32)$$

このとき、 S_k の体積 $V(E_k)$ は

$$V(E_k) \propto \sqrt{\det A} = \sqrt{\det(f_k C_k)} \quad (3.33)$$

の関係にある。ここで、サンプルデータに対する楕円体の最適化を行うために、関数 $F(S)$ を導入する。

$$F(S) \equiv \frac{1}{V(S)} \sum_{k=1}^K V(E_k) = \frac{(K \text{ 個の楕円体の体積の和})}{(\text{全サンプリングデータの集合の体積})} \geq 1 \quad (3.34)$$

$F(S)$ を最小にするような、 S_k を探すことで、パラメータ空間内でサンプルされたデータに対する、 K 個の楕円体への最適な分解を導くことができる。具体的には、とあるクラスタを構成するサンプルの集合 S_k により算出される $F(S)$ と、また別のクラスタを構成するサンプルの集合 S'_k により算出される $F(S)$ の差分 $\Delta F(S)_{k,k'}$ は

$$\Delta F(S)_{k,k'} \sim \gamma \left(\frac{V(E'_k) d(\mathbf{u}, S'_k)}{V(S'_k)} - \frac{V(E_k) d(\mathbf{u}, S_k)}{V(S_k)} \right) = \gamma(h'_k(\mathbf{u}) - h_k(\mathbf{u})) \quad (3.35)$$

ただし

$$d(\mathbf{u}, S'_k) = (\mathbf{u} - \boldsymbol{\mu}_k)^T A^{-1} (\mathbf{u} - \boldsymbol{\mu}_k) \quad (3.36)$$

$$V(S_k) = n_k \frac{V(S)}{N} = n_k \frac{\chi_i}{N} \sim n_k \frac{e^{-i/N}}{N} \quad (3.37)$$

とかける。このとき、 $\Delta F(S)_{k,k'} < 0$ ならば、 k' を採用することにする。

楕円体の最適化のアルゴリズムは以下の通りである。

1. データの集合の外接楕円体 E とその体積 V を計算する。
2. $V(E) = \max[V(E), V(S)]$ となるように、 f を決定する。
3. $K = 2$ の K-means により、 S から S_1 と S_2 にデータを分割する。
4. 楕円体 E_1, E_2 とその体積 V_1, V_2 を計算する。
5. $V(E_k) = \max[V(E_k), V(S_k)]$ となるように、 f_k を決定する。ただし $k = 1, 2, \dots$
6. $\mathbf{u} \in S$ を $h_k(\mathbf{u}) = \min[h_1(\mathbf{u}), h_2(\mathbf{u})]$ となる S_k に代入し、 S'_k を定義する。
7. $h_k(\mathbf{u}) < h'_k(\mathbf{u})$ 、 $\forall k \neq k'$ の場合は再割り当てをする。
 - (a) 再割り当てをする場合: step 4 へ。
 - (b) 再割り当てしない場合:
 - if $\sum_{k=1}^K V(E_k) < V(E)$ or $2V(S) < V(E)$:
 S_1, S_2 に分割しそれぞれに対し繰り返す。
 - else : E を点集合 S の最適楕円として返す。

3.4.6 並列化による効率化

前節までに解説した通り、Clustered Nested Sampling 法とは、高次元のパラメータ空間を効率よくサンプリングすることで、モデル証拠値および事後分布を推定する手法である。尤度の高い領域でより高密度にサンプリングを行うことで効率化を図っているが、Nested Sampling 法の性質上、サンプリング領域内で生成された点の尤度が常に現在の基準値（live point の最小尤度）を上回るとは限らない。特に解析が進むにつれてサンプリング領域（楕円体の体積）が指数的に狭くなっていくため、尤度計算に対するサンプルの採択率、すなわちサンプリング効率が急激に低下する。

この問題に対し、MultiNest ではサンプリングの並列化によって効率化を実現している。たとえば、サンプリング効率が 1%（すなわち 100 回サンプリングして 1 回だけ採択される）である場合を考える。1 CPU で逐次的に実行した場合、3.4.3 節で説明した工程 7 を 1 回通過するのに平均して 100 回の尤度計算を行う必要がある。一方で、100 CPU を用いて並列にサンプリングを行う場合、各コアが独立に候補点を生成・評価し、その中で少なくとも 1 つが採択基準を満たせば、その時点で次の工程へ進むことができる。したがって、理想的な並列化が達成されている場合、計算時間はおおよそ $1/N_{\text{CPU}}$ に短縮されることになる。

実際の MultiNest では、MPI (Message Passing Interface) を用いて並列処理が実装されており、マスタープロセスが live point の管理を行い、各スレーブプロセスが新しいサンプルの生成と尤度計算を担当する。このような仕組みにより、MultiNest は効率化を実現しているが、実効的な加速は通信や同期、負荷分散のオーバーヘッドに依存し、理想的にワーカー数に比例して速くなるとは限らない点に注意が必要である。

3.4.7 途中経過の監視

MultiNest によるベイズ推定の実行中および完了後には、サンプリングの進行状況や収束状況を確認するための統計情報が出力される。典型的な出力例を以下に示す。

```
Acceptance Rate: 0.005481
Replacements: 14450
Total Samples: 2636489
Nested Sampling ln(Z): 227.265025
Importance Nested Sampling ln(Z): 221.438611 +/- 0.040753
```

これらの出力は、アルゴリズムの挙動を理解し、解析の健全性を評価するうえで重要な指標となる。

Acceptance Rate は、生成されたサンプルのうち採択された割合を示す。Nested Sampling では、ライブポイント集合のうち最も低い尤度点を新しい点で置き換える操作を繰り返すため、サンプリング領域が徐々に狭まり、解析後期では採択率が低下する傾向にある。一般に、採択率が極端に低い ($< 10^{-3}$ 程度) 場合は、クラスタリング設定や楕円体近似の精度が不十分である可能性があり、サンプリング効率が大きく低下していることを示唆する。

Replacements は、これまでにライブポイントが置換された回数、すなわち Nested Sampling の主要反復回数に対応する。この値は解析の進行度を直接的に反映しており、十分な反復数を経れば、モデル証拠および事後分布の推定が安定していると考えられる。

Total Samples は、これまでに生成された候補点の総数である。これは実際に尤度評価を行った回数に相当し、採択率と組み合わせることで、実際の計算効率を定量的に把握することができる。

たとえば、上記の例では 2.6×10^6 回のサンプリングのうち、 1.4×10^4 回が採択されており、効率としては約 0.5%程度である。

Nested Sampling $\ln(Z)$ は、標準的な Nested Sampling 手続きに基づくモデル証拠 $\ln Z$ の推定値を示す。一方、**Importance Nested Sampling $\ln(Z)$** は、後に導入された Importance Nested Sampling (INS; Feroz et al. 2013) による改良版の推定値であり、推定誤差 (± 0.040753 など) も併せて出力される。この誤差は、最終段階の尤度分布のサンプリングばらつきから推定される統計的不確実性を表す。

Nested Sampling においては、これらの $\ln Z$ 値が収束し、かつ誤差が十分に小さい ($\Delta \ln Z \lesssim 0.1$ 程度) 場合、探索が十分に進んだと判断できる。したがって、途中経過の監視においては、採択率・置換回数・証拠値の収束を総合的に確認することが、計算の信頼性を保証するうえで重要である。

第4章 観測データおよび解析手法

本研究では実際に観測された GRB イベントの観測結果について、2.3章で述べた3つの理論モデルを適用して、そのモデルパラメータを3章で説明したベイズ推定を行うことで、観測事実とモデルとの整合性を評価し、仮説の妥当性を検証した。

本章では3つの理論モデルを検証するために、本研究で用いた2つのイベントとその選別理由を述べ、その観測データの減光量の取り扱いなどについて説明する。さらに、残光放射モデルの計算コードの概要と、計算環境や実装について詳しく述べる。

4.1 検証に用いたイベントの選定

バースト発生から数千秒で残光が極大に達し、かつその光度曲線の振る舞いが波長に依存しないイベントが複数報告されていることを2.2節で紹介した。特に、Liang et al. (2013) と Ror et al. (2025) で分析された GRB のなかで、GRB 050308 (de Ugarte Postigo et al. 2007)、GRB 060613 (Mangano et al. 2007)、GRB 070419A (Melandri et al. 2009)、GRB 071010A (Covino et al. 2008)、XRF 071031 (Krühler et al. 2009b)、XRF 080330 (Guidorzi et al. 2009)、GRB 080603A (Guidorzi et al. 2011)、GRB 080710 (Krühler et al. 2009a)、GRB 090510 (Nicuesa Guelbenzu et al. 2012)、GRB 090123、GRB 101023A、GRB 110205A (Cucchiara et al. 2011) GRB 120326A (Melandri et al. 2014)、GRB 170519A、GRB 180115A の15件の GRB 残光には、バースト発生から数千秒以降で無彩色的な極大を示すことが確認できる。本研究では、この15件のうち次の観点から、優先的に検証対象を選定した。まず、増光部分の観測データが豊富であること。次に、ある程度理想化された理論モデルを検証するため、できるだけ細かい時間変動が見られないこと。さらに、モデル適合の難易度を高める要因となる電波観測データが存在しないこと。これらの条件を満たすのは XRF 080330 (Guidorzi et al. 2009) と GRB 080710 (Krühler et al. 2009a) であり、本研究ではこの2件を主な研究対象とする。これらのイベントの特徴と、観測データを用いて尤度計算を行うために実施した前処理については、次節で説明する。

4.1.1 GRB 080710

2008年7月10日07:13:10 (UT) に *Swift* 衛星が GRB 080710 を検出した (Krühler et al. 2009a)。このバーストの即時放射の継続時間は $T_{90} \sim 120$ 秒であり、等方放射エネルギーは $\log(E_{\gamma, \text{iso}}[\text{erg}]) = 51.75$ 、赤方偏移は $z = 0.845$ であった。スペクトルのピークエネルギーは赤方偏移補正後に $E_{\text{peak}}^{\text{rest}} \sim 200$ keV である。これらの即時放射の等方放射エネルギーとピークエネルギーは Amati 平面上で、長時間 GRB の典型値であることがわかる (図4.1 参照)。また、GRB 080710 天球面上でのイメージや即時放射の時間変化を図4.2に示す。

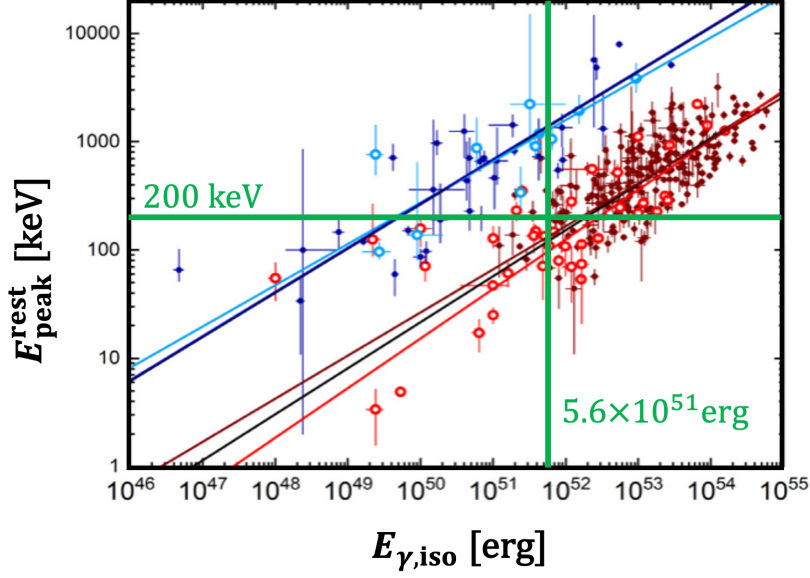


図 4.1: $E_{\text{peak}}^{\text{rest}} - E_{\gamma, \text{iso}}$ 相関図 (Minaev et al. 2020) での GRB 080710 の即時放射の位置。赤方偏移の確定した 45 個の短時間 GRB の観測値と 257 個の長時間 GRB の観測値を用いた散布図であり、青点は典型的な短時間 GRB、シアン色の丸は extended emission を伴う短時間 GRB、濃い赤点は典型的な長時間 GRB、赤丸は超新星爆発を伴う長時間 GRB を示す。2 つの緑線がそれぞれ GRB 080710 の観測値であり、これらの直線の交点が相関図上での位置を示す。

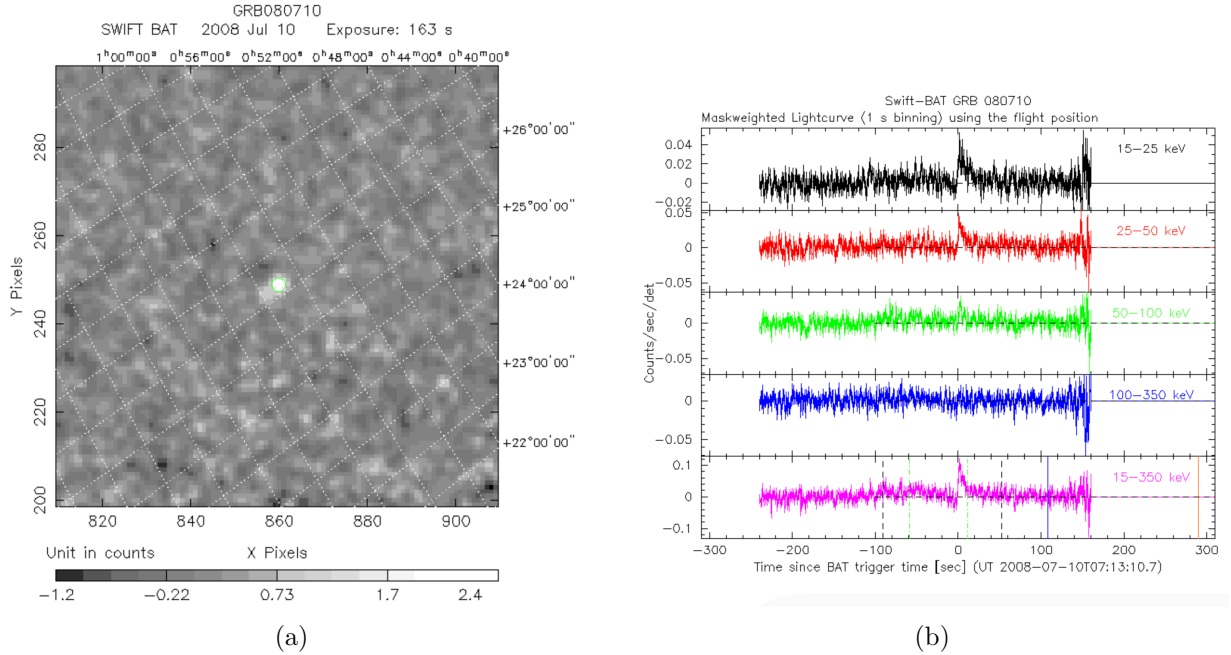


図 4.2: (4.2a) *Swift*-BAT により取得された GRB 080710 の Pre-slew 15.0 – 350.0 keV イメージ。横軸および縦軸はそれぞれ BAT 検出器平面上のピクセル座標を表し、図の上側および右側には、対応する天球座標として赤経赤緯を示す。(4.2b) *Swift*-BAT により取得された GRB 080710 の 1 秒ビニングデータの時間変動。これらの図は *Swift* チームのウェブサイトより引用した。

La Silla 天文台の 2.2m MPI/ESO 望遠鏡に設置された GROND (Greiner et al. 2008) が *Swift* のトリガーに応答し、バースト発生から 384 秒後に観測を開始した。ベイズ推定で使用した可視光・近赤外帯域の観測データは、増光部分の観測データが豊富であるために r -band (4.8×10^{14} Hz) と z -band (3.3×10^{14} Hz) を扱うこととし、これらのデータは Krühler et al. (2009a) から取得した。また、X 線のデータは *Swift* チームのウェブサイト¹ からダウンロードし取得した。取得したデータは付録の A.1.3 と A.1.4 に基づき、mJy 単位に変換した。

Krühler et al. (2009a) で示された Smoothly connected triple power law (STPL) の関数 (Liang et al. 2008) を用いて、GRB 080710 の可視光の光度曲線 (Krühler et al. (2009a) の Fig.1 参照) を再現し、取得したデータが Krühler et al. (2009a) と同等であることを確認した。

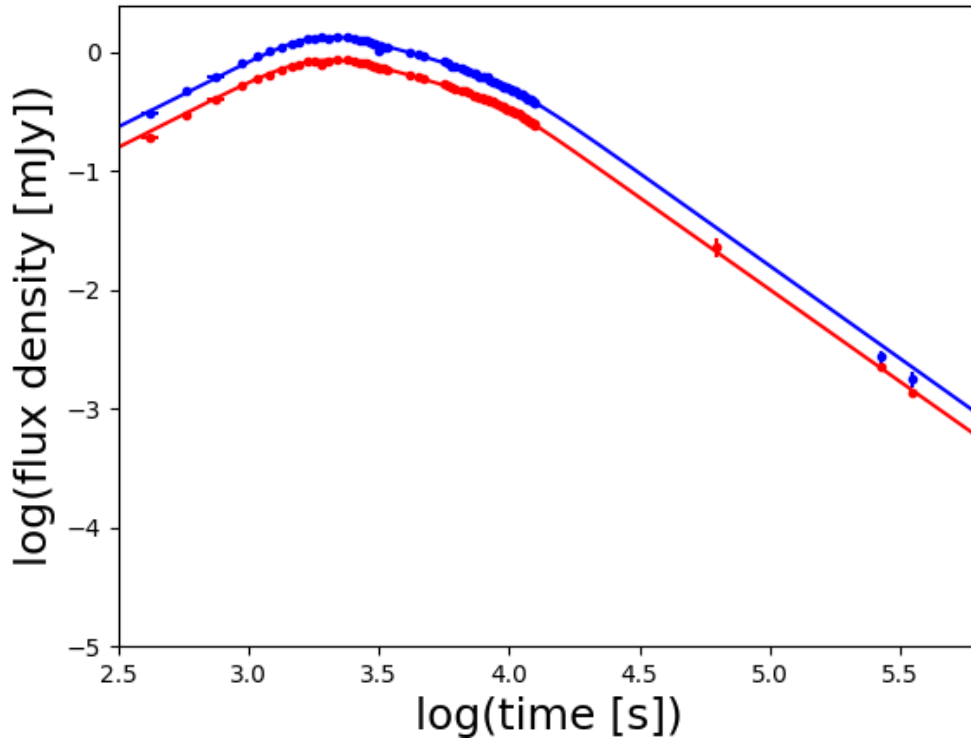


図 4.3: Krühler et al. (2009a) の Fig.1 の再現。青が z -band、赤が r -band の観測データ点と STPL モデルのフィッティング線を示す。

STPL モデルは下記の F で定義される。

$$f = f_0 \left[\left(\frac{t}{t_{b,1}} \right)^{\omega_1 \alpha_2} + \left(\frac{t}{t_{b,1}} \right)^{\omega_1 \alpha_3} \right] \quad (4.1)$$

$$f_j = f_0 \left[\left(\frac{t_j}{t_{b,1}} \right)^{\omega_1 \alpha_2} + \left(\frac{t_j}{t_{b,1}} \right)^{\omega_1 \alpha_3} \right] \left(\frac{t}{t_{b,2}} \right)^{-\alpha_4} \quad (4.2)$$

¹https://www.swift.ac.uk/xrt_spectra/00316534/

$$F = (f^{-\omega_2} + f_j^{-\omega_2})^{-\frac{1}{\omega_2}} \quad (4.3)$$

フィッティングに用いた各パラメータの値と reduced- χ^2 を表4.1に示す。

表 4.1: Light curve fits with STPL

Bands	f_0	$t_{b,1}$	$t_{b,2}$	t_j	α_2	α_3	α_4	ω_1	ω_2	$\chi^2/d.o.f$	χ^2
r	1.11	1816.0	9767.0	9767.0	-1.11	0.65	1.55	2.6	6.7	97.07/(68-8)	1.61
z	1.64	1835.0	9795.0	9795.0	-1.1	0.6	1.56	3.4	4.2	94.20/(67-8)	1.60

ただし、本イベントは母銀河での領域と天の川銀河での領域それぞれで減光を受けていると考えられるので、理論計算との比較では、それぞれの減光量 A_λ^{HG} 、 A_λ^{MW} を以下のように考慮した。天の川銀河での V バンドでの減光量は $A_r^{MW} = 0.171$ mag、 $A_z^{MW} = 0.094$ mag が与えられている² ため本研究ではこの値を用いることにした。母銀河での減光量 A_r^{HG} 、 A_z^{HG} を求める。母銀河の V バンドでの減光量は $A_V^{HG} = 0.03 \pm 0.01$ mag と見積もられている (Schady et al. 2012)。観測された r-band と z-band はそれぞれ、 $\lambda_r^{MW} = 0.6290 \mu\text{m}$ 、 $\lambda_z^{MW} = 0.9222 \mu\text{m}$ であるから、 $z = 0.845$ の母銀河静止系での波長は

$$\lambda_r^{HG} = \frac{\lambda_r^{MW}}{1+z} \sim 0.341 \mu\text{m} \quad (4.4)$$

$$\lambda_z^{HG} = \frac{\lambda_z^{MW}}{1+z} \sim 0.500 \mu\text{m} \quad (4.5)$$

となる。 R_V は天の川銀河と同様に $R_V = 3.1$ として Cardelli のモデルを用いて算出すると母銀河での減光量は次のようになる。

$$A_r^{HG} \sim 0.049 \text{ mag}, \quad A_z^{HG} \sim 0.034 \text{ mag} \quad (4.6)$$

以上より、本研究では GRB 080710 における r-band と z-band の星間減光量 A_r 、 A_z を

$$A_r = A_r^{MW} + A_r^{HG} \sim 0.171 + 0.049 = 0.220 \text{ mag} \quad (4.7)$$

$$A_z = A_z^{MW} + A_z^{HG} \sim 0.094 + 0.034 = 0.128 \text{ mag} \quad (4.8)$$

とした。理論モデルの計算において、この星間減光の補正を行うことで、正しく観測データと比較し尤度を算出するように処理した。

4.1.2 XRF 080330

2008 年 3 月 30 日 03:41:16 (UT) に *Swift* 衛星が GRB 080330 を検出した (Guidorzi et al. 2009)。このバーストの即時放射の継続時間は $T_{90} \sim 60$ 秒であり、等方放射エネルギーは $E_{\gamma, \text{iso}} < 2.2 \times 10^{52}$ erg、赤方偏移は $z = 1.51$ であった。スペクトルのピークエネルギーは赤方偏移補正後に $E_{\text{peak}}^{\text{rest}} \leq 88$ keV である。

²http://ned.ipac.caltech.edu/byname?objname=GRB+080710&hconst=67.8&omegam=0.308&omegav=0.692&wmap=4&corr_z=1

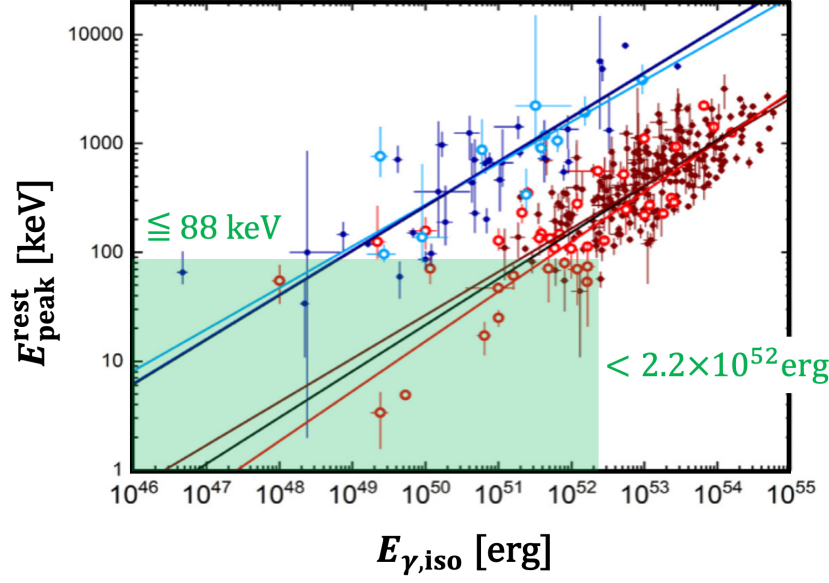


図 4.4: $E_{\text{peak}}^{\text{rest}} - E_{\gamma,\text{iso}}$ 相関図 (Minaev et al. 2020) での XRF 080330 の即時放射の示す領域 (緑)。45 個の短時間 GRB の観測値と 257 個の長時間 GRB の観測値を用いた散布図であり、青点は典型的な短時間 GRB、シアン色の丸は extended emission を伴う短時間 GRB、濃い赤点は典型的な長時間 GRB、赤丸は超新星爆発を伴う長時間 GRB を示す。

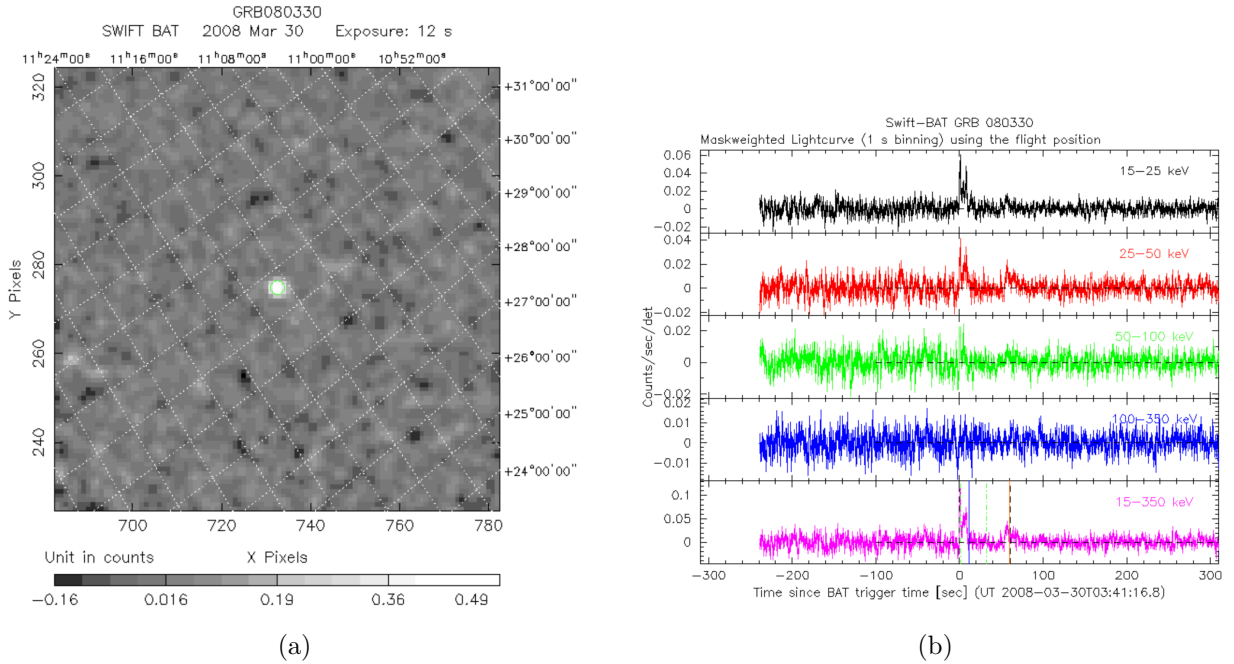


図 4.5: (4.5a) *Swift*-BAT により取得された XRF 080330 の Pre-slew 15.0 – 350.0 keV イメージ。横軸および縦軸はそれぞれ BAT 検出器平面上のピクセル座標を表し、図の上側および右側には対応する天球座標として赤経赤緯を示す。(4.5b) *Swift*-BAT により取得された XRF 080330 の 1 秒ビニングデータの時間変動。これらの図は *Swift* のウェブサイトより引用した。

GROND (Greiner et al. 2008) はバースト発生から 3.2 分後に観測を開始した。ベイズ推定で使
用した可視光・赤外帯域の観測データは、 g -, r -, i -, J -, H -, K -band、のデータを使用した。CNS 法
によるモデル検証では、豊富な観測データがモデルへの拘束力・検証力が向上するために利用可
能な全バンドのデータを使用した。解析の結果、いずれのバンドにおいても、モデルが観測を良く
再現しており、系統的な偏りは生じていないことも確認できた。また、X 線のデータも含めてこれ
らのデータは Guidorzi et al. (2009) から取得した。

本イベントについても、Guidorzi et al. (2009) で示された Multiple smoothly broken power-law
(MSBPL) (Beuermann et al. 1999) を用いて、GRB 080330 の可視光の光度曲線 (Guidorzi et al.
(2009) の Fig.4 参照) を再現し、取得したデータが Guidorzi et al. (2009) と同等であることを確認
した。

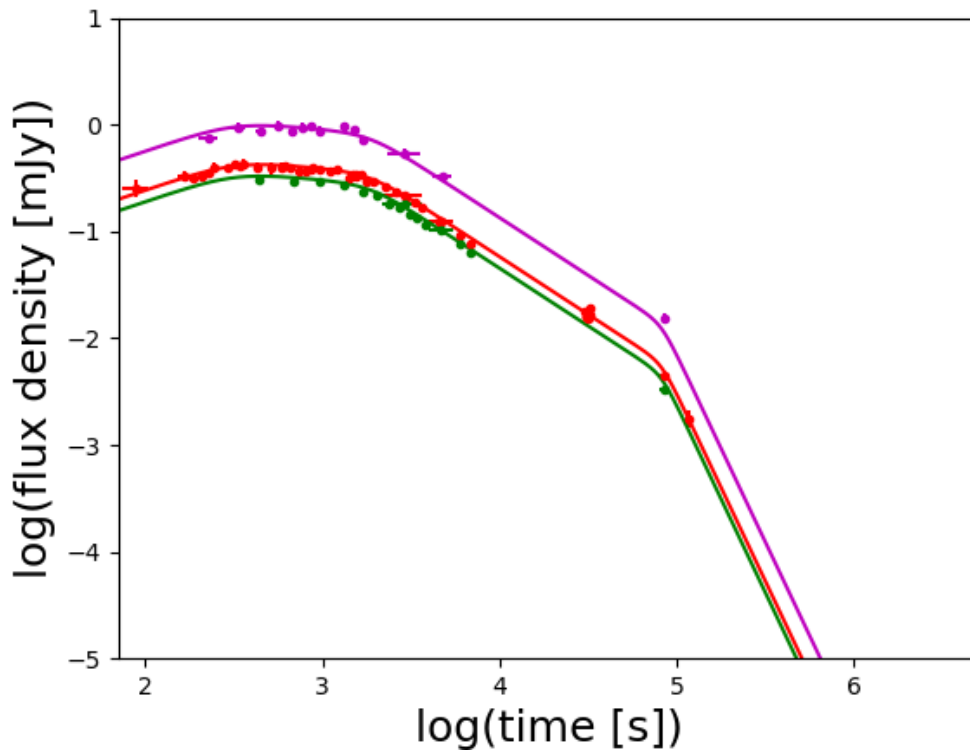


図 4.6: Guidorzi et al. (2009) の Fig.1 の再現。紫が K -band、赤が r -band、緑が g -band の観測
データ点と STPL モデルのフィッティング線を示す。

MSBPL モデルは下記の $F(t)$ で定義される。

$$F(t) = \frac{F_0}{[(t/t_{b1})^{n\alpha_1} + (t/t_{b1})^{n\alpha_2} + (t/t_{b2})^{n\alpha_3} + (t/t_{b3})^{n\alpha_4}]^{1/n}} \quad (4.9)$$

フィッティングに用いた各パラメータの値を表4.2に示す。ただし、 F_0 の値は周波数によって異な
り、それぞれ $F_K = 1077^{+55}_{-59} \mu\text{Jy}$ 、 $F_r = 464^{+16}_{-21} \mu\text{Jy}$ 、 $F_g = 362^{+12}_{-16} \mu\text{Jy}$ 、である。

表 4.2: Light curve fits with MSBPL

t_{b1} [s]	t_{b2} [s]	t_{b3} [ks]	α_1	α_2	α_3	α_4	n
317^{+151}_{-76}	1456^{+67}_{-46}	$23.8^{+3.2}_{-3.1}$	$-0.56^{+0.24}_{-0.33}$	$0.15^{+0.09}_{-0.07}$	$1.08^{+0.02}_{-0.02}$	$3.51^{+0.37}_{-0.34}$	$5.4^{+1.9}_{-1.3}$

ところで、本イベントにおける星間減光量については天の川銀河での減光量は次のようになる $A_r = 0.120$ mag, $A_g = 0.071$ mag, $A_K = 0.006$ mag と見積もられており、さらに、母銀河では $A_V < 0.02$ と見積もられている (Guidorzi et al. 2009)。減光量が 0.1 mag 程度である場合、数パーセントの補正に過ぎないため、本研究では星間減光の影響がないと仮定して解析を行なった。

4.2 検証に用いた残光計算ツール

本研究では、2.3節で述べた、初期残光を説明する 3つの理論モデルを検証するにあたり、2つの GRB 残光の光度曲線やスペクトルを数値的に計算することができる 2種類の公開コードを使用した。「構造を持つジェットの開き角外視線モデル」に対しては `afterglowpy` (Ryan et al. 2020) を、「冪乗則に従う外部媒質密度分布モデル」と「シェルの厚みの効果を考慮したモデル」に対しては `Magglow` (Kusafuka et al. 2025c) を使用した。本節では、これらの GRB 残光放射のシミュレータについて説明する。

4.2.1 `afterglowpy`

ガンマ線バースト (GRB) の残光放射は、2節で述べたように、相対論的ジェットが外部媒質との衝突により形成される外部衝撃波でのシンクロトロン放射によって説明される。この残光を数値的に再現するためには、ジェットの爆発エネルギーやローレンツ因子、開き角、星間空間の密度や、衝撃波下流での微視的パラメータなどを仮定した放射伝達計算が必要である。特に、「構造を持つジェットの開き角外視線 (off-axis structured jet) モデル」を想定する場合には、相対論的ジェットの角度構造と、視線方向を考慮する必要がある。`afterglowpy` (Ryan et al. 2020) は Python で実装されたオープンソースのシミュレーションコード³であり、任意の視線角度およびジェット構造に対して、シンクロトロン放射に基づくスペクトルおよび多波長残光の光度曲線を高速に計算できる。

この計算コードは 2.3.1 節で説明したように、Top-hat 型ジェット、Gaussian 型ジェット、Power-law 型ジェットの 3つのタイプの角度構造を持つジェットモデルを実装しており、ユーザーがジェットの開き角 (`thetaWing` [rad])、Gaussian 型ジェットの場合はコア角 (`thetaCore` [rad])、Power-law 型ジェットの場合は冪指数 (`b`)、ジェット軸上のエネルギー (`E0` [erg])、視線角 (`thetaObs`)、を任意に指定することができる。これらに加え、星間物質の密度 (`n0` [cm⁻³])、電子のエネルギー分布の冪指数 (`p`)、衝撃波下流での内部エネルギーの電子と磁場への変換効率 (`epsilon_e`, `epsilon_B`)、電子の加速効率 (`xi_N`) などの物理パラメータを指定することで、赤方偏移 z 、光度距離 d_L にいる観測者が観測する放射フラックスを出力する。

計算には、Blandford-McKee 解から Sedov 解への相対論的流体の力学進化 (2.1.5節を参照) と、Equal Arrival Time Surface (EATS; 2.1.3節を参照) を考慮しており、任意の視線方向に対する、相対論的な視線効果を正確に取り扱うことができる。また、放射冷却を含むスペクトル計算も可能であり、構造を持つジェットからの多波長光度曲線を出力可能な点が特徴である。ただし、シ

³<https://github.com/geoffryan/afterglowpy>

シンクロtron自己吸収やシンクロtron逆コンプトン散乱の放射機構については実装されていないので、電波やガンマ線領域の残光放射の再現できない。また、星間空間の密度勾配についても実装されておらず、一様密度分布を仮定していることに注意が必要である。

本研究では、`afterglowpy` に実装されている Top-hat 型ジェット、Gaussian 型ジェットのモデルをそれぞれ仮定して、その他のモデルパラメータ値をベイズ推定することにより、モデルの妥当性を検証した。

4.2.2 Magglow

Magglow (Kusafuka et al. 2025a,c) は Julia 言語で実装されたオープンソースのシミュレーションコード⁴ である。噴出物 (シェル) の厚みや磁化の影響を考慮した、シェルの力学進化モデルが実装されており、順行衝撃波および逆行衝撃波からのシンクロtron放射に基づくスペクトルおよび多波長残光の光度曲線を高速に計算できる。

本コードは 2.3.2 節および 2.3.3 節で説明したような、外部媒質の密度勾配とシェルの厚みの効果を考慮したモデルが実装されている。ユーザーは、初期半径での外部媒質の密度 (n_0 [cm^{-3}])、外部媒質密度分布の冪指数 (k)、シェルの初期の厚み (D_0 [cm]) を任意に指定することができる。これらに加え、ジェット軸上のエネルギー (E_0 [erg])、視線角 (θ_{obs} [rad])、電子のエネルギー分布の冪指数 (p)、衝撃波下流での内部エネルギーの電子と磁場への変換効率 (ϵ_e , ϵ_B)、電子の加速効率 (f_e) などの物理パラメータを指定することで、赤方偏移 z 、光度距離 d_L にいる観測者が観測する放射フラックスを出力することができる。

力学計算には、相対論的流体シミュレーションに基づく順行衝撃波・逆行衝撃波の時間発展 (2.1.4 節と 2.1.5 節参照) と、Equal Arrival Time Surface (EATS; 2.1.3 節を参照) 効果が考慮されている。これにより、任意の視線方向に対する相対論的視線効果を取り扱うことが可能である。また、シンクロtron自己吸収、シンクロtron逆コンプトン散乱、および Klein-Nishina 効果も実装されており (A.4 節、A.5 節、A.6 節参照)、電波からガンマ線に至る広い波長域の光度曲線を一貫して再現できる点が大きな特徴である。ただし、ジェット構造は一様 (Top-hat 型) であり、横方向への拡がり は考慮されていないため、後期の残光を議論する際には、留意が必要である。

本研究では、Magglow に実装されている「シェルの厚みの効果」および「外部媒質密度の冪乗分布」を仮定し、それ以外のモデルパラメータをベイズ推定によって最適化することで、各モデルの妥当性を検証した。一方で、Magglow の特徴の一つである噴出物の磁化の影響については、本研究の解析では無視できると考えた。その理由は二つある。第一に、噴出物の磁化は主に噴出物の加速段階で作用すると考えられており (Kusafuka et al. 2025a,c)、本研究で対象とする GRB 残光の観測データにはその情報が直接的には含まれないと判断したためである。第二に、磁化率を示すパラメータを含めてベイズ推定を行った結果、その事後分布が 10^{-3} 以下の値に集中することが確認されたためである。以上の理由から、初期磁化率パラメータ s_0 は固定値 10^{-3} として解析を行い、本論文では噴出物の磁化に関する詳細な議論は扱わないこととした。

4.3 解析手順

本研究では 2.3 節で説明した通り、標準理論モデルでは説明が困難な観測結果に対して、解釈を与える可能性のある 3 つのモデルを検証し、理論的制約を行った。モデル検証および理論的制約のため

⁴<https://github.com/yo3-sun/Magglow>

の統計解析には、3.1節で述べた通り、emcee および MultiNest を用いた。なお、本研究では emcee と MultiNest を各解析に応じて使い分けているが、両手法に関して GRB 残光モデルを用いた比較テストを行い、推定精度や計算効率を検証している。詳しくは付録 A.9節を参照されたい。解析対象としたイベントは4.1節で述べた通り、GRB 080710 および XRF 080330 である。本節では、解析の目的と手法の全体像をまとめた後、各解析における具体的な手順を説明する。

まず、2.3.1節で述べた「初期残光の観測結果は、構造を持つジェットの開き角の外側から観測している」という仮説の検証を行った。解析対象は GRB 080710 であり、理論モデルの数値計算には、ジェット構造を実装した `afterglowpy` を用いた。ジェット構造を Top-hat 型および Gaussian 型と仮定し、それぞれについてモデルパラメータの事後分布を求めるために emcee を用いてベイズ推定を行った。視線方向を表すパラメータ $\beta = \theta_{\text{obs}}/\theta_j$ (ただし θ_{obs} はジェット軸と視線方向のなす角、 θ_j はジェットの開き角) の事後分布が $\beta > 1$ の領域に得られるかどうかによって、仮説を検証した。

結果の詳細は5章で述べるが、推定の結果、事後分布は $\beta \leq 1$ の領域に収束し、初期残光においてはジェット構造の効果は顕著ではないことがわかった。この結果から、初期残光はジェットが断熱減速期へ移行する段階の放射を観測している可能性が高いと解釈された。一方で、増光部分の再現性には課題が残った。そのため、以降ではジェット構造の効果よりも、外部媒質やシェル構造の影響が大きいと考えた。

次に、2.3.2節および2.3.3節で述べた「初期残光の観測結果は、有限の厚みをもつシェルと、冪乗則に従う外部媒質密度分布の影響を受けた放射を観測している」という仮説を検証した。この解析では、GRB 080710 および XRF 080330 を対象とし、理論モデルの数値計算には、シェル厚みと外部密度勾配を考慮したダイナミクスを実装した `Magglow` を用いた。ベイズ推定には、emcee ではなく MultiNest を用いた。これは、emcee による解析では、自己相関の長さや burn-in 期間などのハイパーパラメータ設定によってサンプリングの収束性を十分に確保するのが難しく、解析効率が低下することが課題であったためである。一方、MultiNest は事後分布の形状に依存せず広いパラメータ空間を探索でき、比較的少ない試行回数で収束に至る場合が多い。したがって、計算コストを抑えつつ効率的に事後分布を導出できる可能性があると考え、本解析では MultiNest を採用した。

GRB 080710 に対するベイズ推定では、シェル厚みと外部媒質密度分布の勾配を考慮することで、先の解析で再現が困難であった増光部分が改善されるかどうかを調べた。また、「構造を持つジェットの開き角外視線モデル」との比較を通して、より妥当な解釈を検討した。一方、XRF 080330 に対するベイズ推定では、シェル厚みと外部媒質密度分布の勾配に対する理論的制約のロバスト性を評価するため、MultiNest の強みであるベイズ証拠値の比較を行った。

以上の流れを表4.3にまとめる。大きく分けて、この3つの解析結果について、5章で順に説明する。

4.4 計算環境と実装

本研究の数値計算および解析には、青山学院大学山崎研究室が保持・運用している計算機サーバー (PC 名: astro6) を使用した。サーバーは CentOS Linux release 7.5.1804 (Core) 上で稼働しており、CPU は Intel(R) Xeon(R) Gold 6130 (16 × 2 コア, 2.10 GHz)、メモリは 92 GB である。

解析には Python 3.7 環境下で行い、主要な科学計算ライブラリとして NumPy、SciPy、matplotlib、astropy、corner などを使用した。残光モデルの計算には `afterglowpy`⁵ および `Magglow`⁶ を使い、こ

⁵<https://github.com/geofffryan/afterglowpy>

⁶<https://github.com/yo3-sun/Magglow>

表 4.3: 本研究におけるモデル検証・理論的制約の概要

対象天体	モデル	残光計算コード	ベイズ推定法	目的・検証内容
GRB 080710	構造を持つ ジェット	afterglowpy	MCMC (emcee)	開き角外視線解 釈の検証
GRB 080710	シェルの厚みと 幕乗則の外部媒 質密度分布	Magglow	CNS (MultiNest)	増光期間が遷移 期に対応すると の解釈の検証
XRF 080330	シェルの厚みと 幕乗則の外部媒 質密度分布	Magglow	CNS (MultiNest)	シェル厚みと外 部媒質密度幕乗 分布モデルの検 証

れらを Python または Julia スクリプトから制御して数値計算を行った。ベイズ推定には、MCMC 法を実装した emcee⁷ および Clustered Nested Sampling 法を実装した MultiNest⁸ を用いた。解析結果の可視化および統計量の算出には、PyMultiNest⁹ に含まれるスクリプト `multinest_marginals.py`、`multinest_marginals_corner.py` などを参考にした。

計算時間は、収束までに必要なサンプル数や、1 サンプルあたりの尤度計算コストに依存する。長い場合には、1 回の解析におよそ 1 ヶ月程度を要する場合もあった。各解析は、サーバー上で 16 コアを用いた並列処理により実行した。再現性を確保するため、事前分布の設定や固定パラメータの値などはすべて記録し、また Python の依存パッケージは `venv` 環境を用いて統一した。

⁷<https://emcee.readthedocs.io/en/stable/>

⁸<https://github.com/JohannesBuchner/MultiNest>

⁹<https://github.com/JohannesBuchner/PyMultiNest>

第5章 解析結果

本研究では、2.1節で説明した標準理論モデルでは再現が困難な2つのGRB イベント（GRB 080710 と XRF 080330）を対象として、2.3節で提案した3つの理論モデルをベイズ推定により検証した。

本研究での解析手順については4.3節でもまとめたが、まず、GRB 080710 に対して、残光計算ツール `afterglowpy` (Ryan et al. 2020) (4.2.1参照) を用いて、「構造を持つジェットの開き角外視線モデル」(2.3.1節参照) の `emcee` (Foreman-Mackey et al. 2013) による解析を行なった。その結果、視線方向に関わるモデルパラメータの事後分布が、ジェットの開き角より内側を指向する領域に集中していたことから、GRB 080710 は「軸内方向から観測された構造をもつジェットモデル」で説明される可能性が高いことを示した。このモデルにおいては、GRB 080710 の光度の極大値とその時刻を再現するためには、典型値より大きな爆発エネルギーと細いジェットを必要とすることがわかった。しかし、MAP 値を用いて書いた理論線と観測データを比較すると、増光期の再現性には課題が残っていた。

この結果を踏まえ、次に、GRB 080710 および XRF 080330 に対して、残光計算ツール `Magglow` (Kusafuka et al. 2025c) (4.2.2参照) を用いて、「有限の厚みシェルと外部媒質密度の冪乗分布モデル」(2.3.2 節および 2.3.3 節参照) の `MultiNest` (Feroz et al. 2008, 2009; Feroz et al. 2019) による解析を行なった。その結果、増光期と無彩色ピークを示す初期残光の観測データは「有限の厚みシェルと多様な外部媒質密度分布モデル」を支持することがわかった。

本章では、各イベントに対するモデル適用の詳細な結果を順に示す。

5.1 GRB 080710: 構造を持つジェットモデル

GRB 080710 の多波長残光の光度曲線に対し、Top-hat 型 (TH) および Gaussian 型の構造ジェットモデル (GF・GEM; 2.3.1節を参照) を用いた解析を行った。その結果、Top-hat 型ジェットは観測データを再現できず、Gaussian 型ジェットに角度依存のローレンツ因子を導入した GEM モデルが最も良い適合を示した。ただし、増光期の再現は不十分であり、単純な構造ジェットモデルのみでは GRB 080710 の特徴的な光度曲線を完全に説明できないことが明らかになった。この結果は、構造を持つジェットを考慮する必要性を支持すると同時に、外部密度分布やシェル厚みといった追加要素を検討すべき動機を与えるものである。なお、本成果は Obayashi et al. (2024) で出版されている。

本節では、ジェット構造を組み込んだモデルを用いたベイズ推定の結果を示す。表 5.1 には、本計算で与えた事前分布の範囲と、得られた 1D 事後分布の中央値および分散を示す。また、表 5.2 の左側 3 列には、表 5.1 の計算で得られた最尤値 (MAP 値) と適合度を、右側 3 列には、「開き角の外側から観測されたのではないか」という仮説に基づき、 $\beta = \theta_{\text{obs}}/\theta_j \geq 1$ の事前分布を課した場合の結果を示す。さらに、図 5.2、図 5.3、図 5.4 に、表 5.1 で示した 3 つの計算で得られたコーナープロットを示す。ただし、3 でも述べたとおり、ベイズ推論においては事後分布そのものが推定結果であ

り、MAP 値はその代表点にすぎない。したがって、MAP 値やこれに基づく適合度は、モデル間の比較や傾向の補足を目的とした補助的な指標として提示する。

表 5.1: 事前分布の範囲と得られた 1D 事後分布の中央値と分散

$\vec{\Theta}$	事前分布の範囲	TH	GF	GEM
$\log(E_0 [\text{erg}])$	[50, 55]	$54.60^{+0.28}_{-0.41}$	55.00^{+5e-4}_{-1e-3}	55.00^{+2e-3}_{-3e-3}
Γ_0	[10, 500]	$97.28^{+9.73}_{-6.71}$	$162.8^{+1.9}_{-1.8}$	$104.6^{+1.1}_{-0.9}$
$\log(n_0 [\text{cm}^{-3}])$	[-4, 2]	$-1.10^{+0.42}_{-0.47}$	$-1.68^{+0.03}_{-0.02}$	$-1.46^{+0.03}_{-0.03}$
$\theta_c [\text{rad}]$	[0.001, 0.5]	0.082^{+6e-3}_{-8e-3}	0.499^{+4e-4}_{-0e-4}	0.012^{+1e-4}_{-1e-4}
$\alpha = \theta_j/\theta_c$	[1, 2]	1 固定	$1.191^{+0.007}_{-0.011}$	2.00^{+1e-4}_{-2e-4}
$\beta = \theta_{\text{obs}}/\theta_j$	[0, 1.5]	0.762^{+2e-4}_{-1e-4}	1.007^{+1e-4}_{-7e-5}	$4.18^{+4.22}_{-2.81} \times 10^{-3}$
$\log(\epsilon_B)$	[-5, -0.3]	$-2.33^{+0.44}_{-0.36}$	$-2.478^{+0.013}_{-0.023}$	-0.30^{+2e-3}_{-3e-3}
$\log(\epsilon_e)$	[-3, -0.3]	$-2.52^{+0.34}_{-0.25}$	$-2.015^{+0.004}_{-0.005}$	-1.95^{+6e-3}_{-6e-3}
p	[2.01, 2.99]	2.478^{+4e-3}_{-4e-3}	$2.767^{+0.002}_{-0.002}$	2.01^{+4e-5}_{-2e-5}
$\log(f_e)$	[-2, 0]	$-0.40^{+0.28}_{-0.40}$	$-6.5^{+4.8}_{-11.2} \times 10^{-4}$	$-0.62^{+0.42}_{-0.43}$

表 5.2: TH、GF、GEM のそれぞれのジェット型モデルを仮定した元で、 β の事前分布を [0, 1.5] と [1, 1.5] で計算したベイズ推定で得られた MAP 値

Model	TH ($\beta \geq 0$)	GF ($\beta \geq 0$)	GEM ($\beta \geq 0$)	TH ($\beta \geq 1$)	GF ($\beta \geq 1$)	GEM ($\beta \geq 1$)
$\theta_c [\text{rad}]$	...	5.00×10^{-1}	1.21×10^{-2}	...	5.00×10^{-1}	1.07×10^{-2}
$\theta_j [\text{rad}]$	7.19×10^{-2}	5.92×10^{-1}	2.42×10^{-2}	6.71×10^{-3}	5.98×10^{-1}	1.07×10^{-2}
$\theta_{\text{obs}} [\text{rad}]$	5.48×10^{-2}	5.96×10^{-1}	1.15×10^{-4}	6.72×10^{-3}	6.02×10^{-1}	1.07×10^{-2}
$E_0 [\text{erg}]$	4.09×10^{54}	9.95×10^{54}	9.98×10^{54}	9.95×10^{54}	9.99×10^{54}	9.99×10^{54}
$n_0 [\text{cm}^{-3}]$	3.24×10^{-2}	2.23×10^{-2}	3.47×10^{-2}	6.89×10^{-4}	2.33×10^{-2}	2.59×10^{-2}
Γ_0	1.11×10^2	1.62×10^2	1.04×10^2	2.09×10^2	1.62×10^2	1.49×10^2
p	2.48	2.77	2.01	2.01	2.77	2.01
ϵ_e	2.50×10^{-3}	9.65×10^{-3}	1.12×10^{-2}	1.49×10^{-2}	9.7×10^{-3}	1.9×10^{-2}
ϵ_B	8.13×10^{-3}	3.24×10^{-3}	4.99×10^{-1}	5.00×10^{-1}	3.1×10^{-3}	4.98×10^{-1}
f_e	0.246	0.997	0.543	0.177	0.996	0.648
$\chi^2/d.o.f$	22.3	24.7	10.5	18.3	24.3	12.1
χ^2	1942	2124	900	1589	2091	1037
$d.o.f$	96 - 9	96 - 10	96 - 10	96 - 9	96 - 10	96 - 10

表 5.1より、いずれのジェットモデルにおいても、事後分布の示す領域は、 $\Gamma_0(\theta_{\text{obs}} - \theta_j) < 1$ を示しており、観測者は初期からジェットの放射を直接受けていた可能性が高いことが示された。この結果は、「ジェットの開き角の外側から観測された」という仮説を支持しない。

さらに、MAP 値を参考にすれば、視線方向に沿って運動する放射体が減速を開始する時刻は、いずれのモデルにおいても $T_{\text{dec}} \sim 10^3$ 秒程度となることが分かった。この結果は、無彩色的なピークという観測的特徴が、自由膨張期から断熱減速期への移行に対応している可能性が高いことを示している。ただし、自由膨張期における増光指数は 2 乗あるいは 3 乗である一方、観測データは増光指数 ~ 1 を示しており、この点は本モデルでは説明できていない。この不一致は、外部媒質の密度分布やシェルの厚みといった、本研究で簡略化のために無視した効果が影響している可能性がある。

加えて、本研究において最も良い適合度を示した GEM ($\beta \geq 0$) モデルの事後分布から (図 5.4 参照)、典型値よりも大きな爆発エネルギー $E_0 \sim 10^{55}$ erg が必要である可能性を指摘している。事前分布の上限に達していることから、事前分布の範囲を $50 < \log(E_0) < 57$ 、 $1 < \alpha < 3$ と拡張した場合でもベイズ推定を行なった結果 $E_0 \sim 10^{56}$ erg、 $\alpha = \theta_c/\theta_j \sim 2.5$ 付近に収束する事後分布が得られたが、物理的解釈には大きな変化を与えず、適合度の改善もされなかった。いずれの結果も、爆発エネルギー E_0 は大きい領域、そしてエネルギーの集中する領域とジェットの広がりより顕著 ($\theta_j \sim 2\theta_c$) であるモデルが支持されたことを意味する。大きなエネルギーは、GRB 080710 の残光が示す「無彩色的な極大」かつ「高い極大値」という観測的特徴により制約された結果であると考えられる。一方で、ジェット構造は「急激な減光」という観測的特徴により制約された結果であると考えられる。以下で順に考察する。

ジェット軸から角度 θ 方向に運動する放射体の自由膨張期から断熱減速期への移行時刻は

$$T_{\text{dec}}(\theta) \propto n_0^{-1/3} E(\theta)^{1/3} \Gamma(\theta)^{-8/3} \quad (5.1)$$

というパラメータ依存性を持っており、この時刻におけるフラックスは

$$F_{\nu, \text{peak}}(\theta) \propto \nu^{\frac{1-p}{2}} f_e^{2-p} \epsilon_e^{p-1} \epsilon_B^{\frac{p+1}{4}} n_0^{\frac{p+1}{4}} \Gamma(\theta)^{2(p-1)} E(\theta) \quad (5.2)$$

の依存性を持つ。ただし、 $\Gamma(\theta)$ と $E(\theta)$ はそれぞれジェット軸から角度 θ 方向に運動する放射体のローレンツ因子と運動エネルギーの初期値である。

観測された数千秒での無彩色ピークを自由膨張期から断熱減速期への移行で再現するために、 $E(\theta_{\text{obs}})$ は典型値よりも大きく、そして $\Gamma(\theta_{\text{obs}})$ や n_0 は典型値よりも小さくする制限がかかる。しかし、 $\Gamma(\theta_{\text{obs}})$ や n_0 を小さくするとフラックスも減少してしまうため、結果として $E(\theta_{\text{obs}})$ が大きく見積もられたと考えられる。実際には、Equal Arrival Time Surface (EATS; 2.1.3 節参照) での積分値が観測者に到達するフラックスであり、Gaussian 型のジェットモデルでは、ジェット軸付近にしかエネルギーが詰まっていないため、TH 型より厳しく制約されたと考えられる。ただし、この制約はシェル厚みの効果を考慮することで緩和される可能性がある。シェルが厚い場合には自由膨張期の終了時刻ではなく、その後の遷移期から断熱減速期への移行によって無彩色ピークを形成できるため、 $T_{\text{dec}}(\theta_{\text{obs}})$ が数千秒であるという制約が不要になるからである。

次に、図 5.1 の 2×10^4 秒以降の光度曲線に見られる、ジェットの構造の違いについて考察する。GEM のモデルで得られた推定結果では、Gaussian 型ジェットの端の初期ローレンツ因子が $\Gamma(\theta_j) \sim 15$ ($< \Gamma_0 \sim 1 \times 10^2$) であり、 $\Gamma(\theta_j)|\theta_{\text{obs}} + \theta_j| < 1$ を満たしていることがわかる。つまり、初期からジェット全体からの放射が観測者に直接届いている。TH や GF 型のジェットモデルでは、ローレンツ因子の初期値はジェットの各場所で変わらないと仮定しているため、ジェットの減速後には、相対論的ビーミング効果の減衰により観測者が見えるジェットの範囲が広がる効果により減

光が緩やかになり、 3×10^5 秒付近の観測データを上回ったことで適合度が GEM に比べて悪化した。以上から、減速中のジェットからの放射だと考えられる観測データはジェット構造の効果に影響されると考えられ、 3×10^5 秒付近の観測データが GEM 型のジェットモデルの優位性を示していることがわかる。

したがって、最も良い適合度を示した GEM ($\beta \geq 0$) モデルで得られた推定結果は、 $E(\theta_{\text{obs}})$ を大きくして断熱減速期への移行時刻を遅くしつつ、明るい極大値を再現し、さらにジェット全体からの放射が初期から観測され流ことで急激な減光を再現するように、 $\alpha \sim 2$ や $\beta \sim 0$ が制約されたと考えられる。

また、GEM ($\beta \geq 0$) モデルで得られた事後分布から、他のジェット構造の結果に比べて、 ϵ_B が大きい傾向を示していることがわかる。スペクトル進化を考察すると、自由膨張期の段階で ν_c が z -band よりも低周波側に来ることで、 $\nu_c < \nu_z < \nu_r < \nu_X$ の時の増光 T^2 を形成していることがわかる。ジェット軸から角度 θ 方向に運動する放射体の自由膨張期の $\nu_c(\theta)$ のパラメータ依存性は

$$\nu_c(\theta) \propto n_0^{-3/2} \epsilon_B^{-3/2} \Gamma(\theta)^{-4} t_{\text{obs}}^{-2} \quad (5.3)$$

である。電子の放射冷却を効率的に行うことで、数百秒までに、 $\nu_c < \nu_z$ を満たすよう、 ϵ_B を大きい値に制約されたと考えられる。つまり、光度曲線に見られる無彩色性が ϵ_B への制約に影響を与えたと考えられる。初期ローレンツ因子に角度分布を持つ GEM モデルでは、ジェット全体からの放射が初期から観測されるため、異なるローレンツ因子および冷却状態を持つ複数の放射体からの放射の寄与が EATS 上で重ね合わされることになる。この結果、冷却周波数 ν_c は角度方向に分散を持ち、観測周波数が ν_c を跨ぐ寄与を同時に含むことが可能となるため、比較的大きな ϵ_B に対しても安定した尤度体積を形成することができたと考えられる。一方で、Top-hat 型および GF (ローレンツ因子に角度依存性がなく、質量分布が Gaussian 型) ジェットモデルでは、 ϵ_B は GEM モデルで制約されたような大きな値の領域には事後分布が収束せず、自由膨張期において増光指数が T^3 となるパラメータ領域に収束した。ローレンツ因子が一様である Top-hat 型および GF 型モデルでは、EATS 上で寄与する放射体の物理量がほぼ揃うため冷却周波数が鋭く定まり、その結果、大きな ϵ_B 近傍において安定した尤度体積を得ることが困難であったと考えられる。

さらに、GEM 型ジェットモデルでは、 p の事後分布が事前分布の小さい方の端に張り付き、非常に狭い範囲に制約された。これは、 ν_c を下げるために上限に制約された ϵ_B を許容しつつ、観測されている X 線の緩やかな減光を再現するためだと考えられる。 ϵ_B が上限に制限されなかった TH 型や GF 型では比較的ソフトなスペクトル指数 ($p \sim 2.5$) に事後分布が収束していることから、 ϵ_B の制限が、 p への制限に影響していることがわかる。この効果は、X 線の観測データの尤度寄与を可視光や赤外線的数据と同等になるようにしたことが影響しているため、X 線の放射起源が可視光や赤外線とは異なるものと考え、尤度寄与を下げれば、これらの制約は緩和されと考えられる。

以上より、GRB 080710 に対して大きな爆発エネルギーと GEM 型のジェットモデルの優位性が示された。推定された爆発エネルギー E_0 とジェットの開き角 θ_j から、真のジェットエネルギーは $E_j \sim E_0 \theta_c^2 [1 - \exp(-\theta_j^2/2\theta_c^2)] \sim 10^{51}$ erg となり典型値を示す。また、推定された爆発エネルギー E_0 から見積もられる即時放射の放射効率 $\eta_\gamma = E_{\gamma, \text{iso}} / (E_{\gamma, \text{iso}} + E_0) \sim 6 \times 10^{-3}$ となり、非常に低い放射効率を示す結果となった。

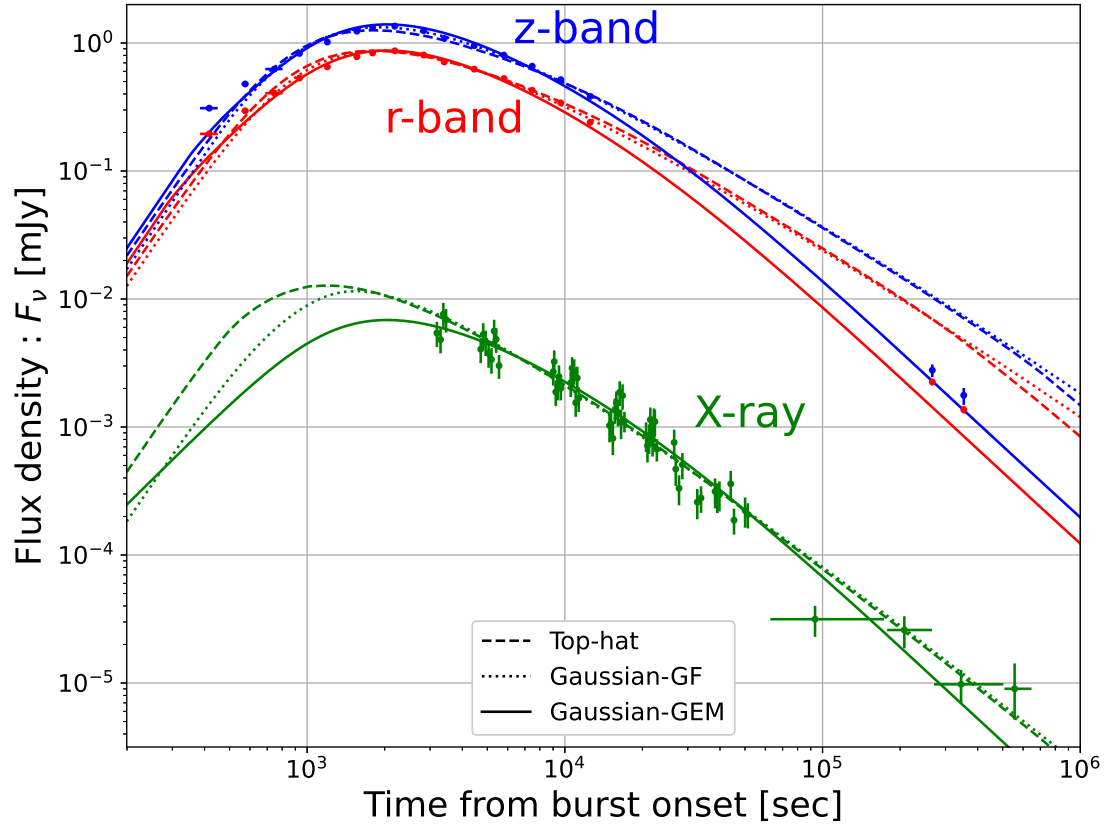


図 5.1: GRB 080710 の残光の観測データ (点) と、残光の理論曲線。ただし、青が z -band、赤が r -band、緑が X 線 (0.3 keV) を表し、波線が Top-hat 型ジェットモデル、点線が Gaussian (GF) 型ジェットモデル、実線が Gaussian (GEM) 型ジェットモデルのベイズ推定で得られた MAP 値で与えられる理論曲線を表す。

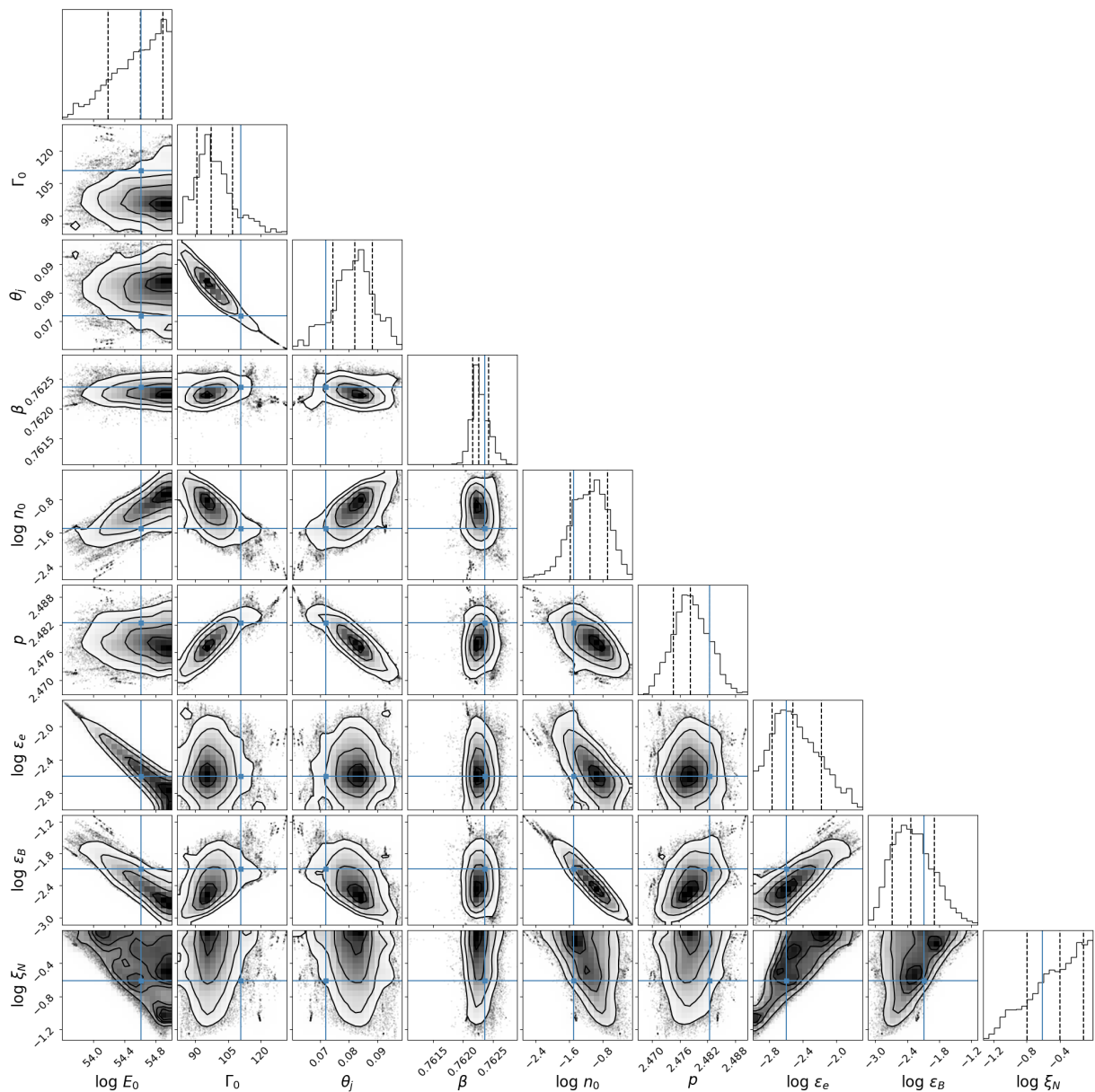


図 5.2: Top-hat 型ジェットを GRB 080710 の観測データに適用した場合のベイズ推定により得られたコーナープロット。青線はサンプルの中で事後確率の最大を示す (maximum a posterior; MAP) 値を示し、点線は中央値と 1σ の分散を示す。

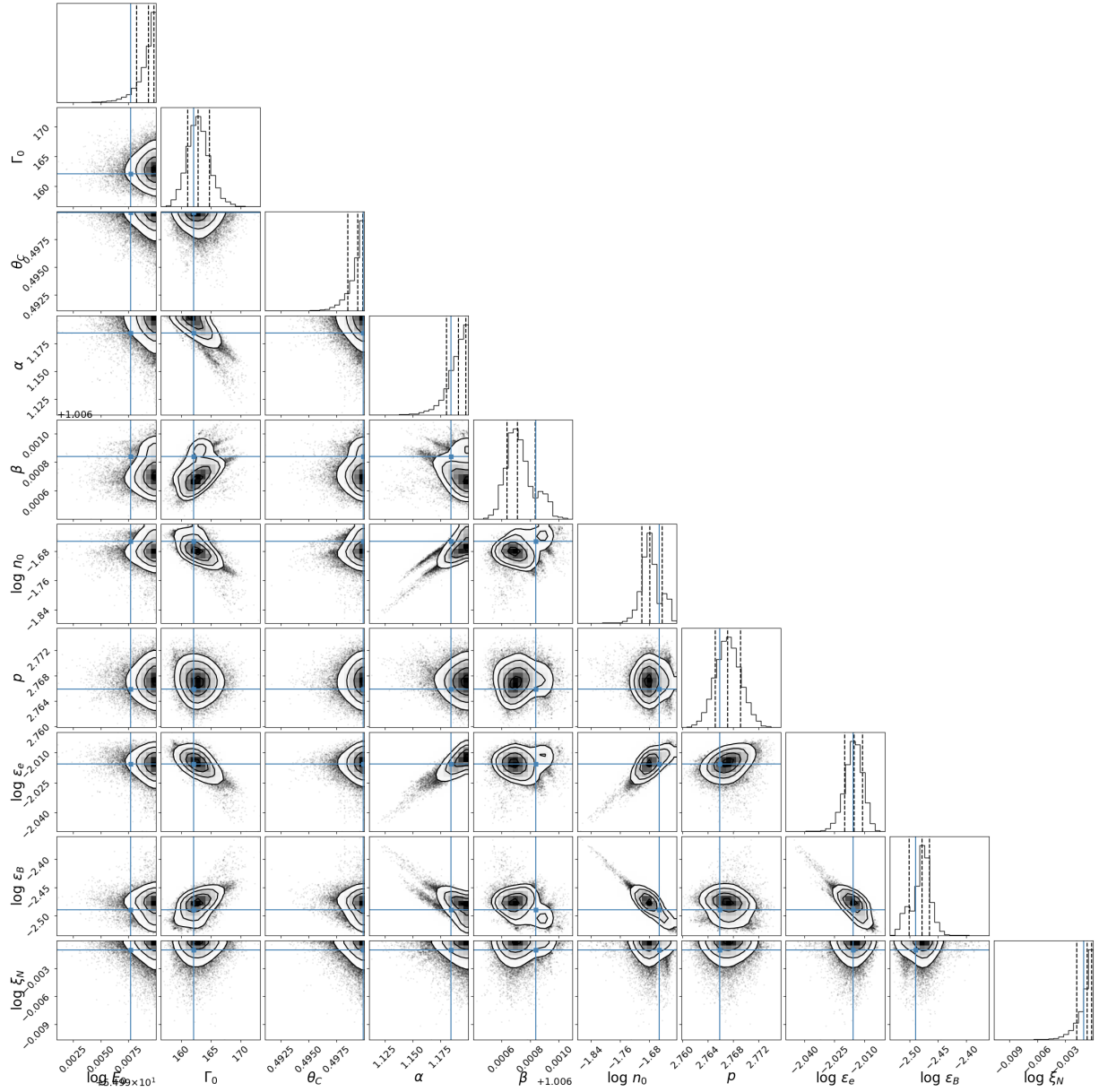


図 5.3: Gaussian 型ジェット (GF) を GRB 080710 の観測データに適用した場合のベイズ推定により得られたコーナープロット。青線はサンプルの中で事後確率の最大を示す (MAP) 値を示し、点線は中央値と 1σ の分散を示す。

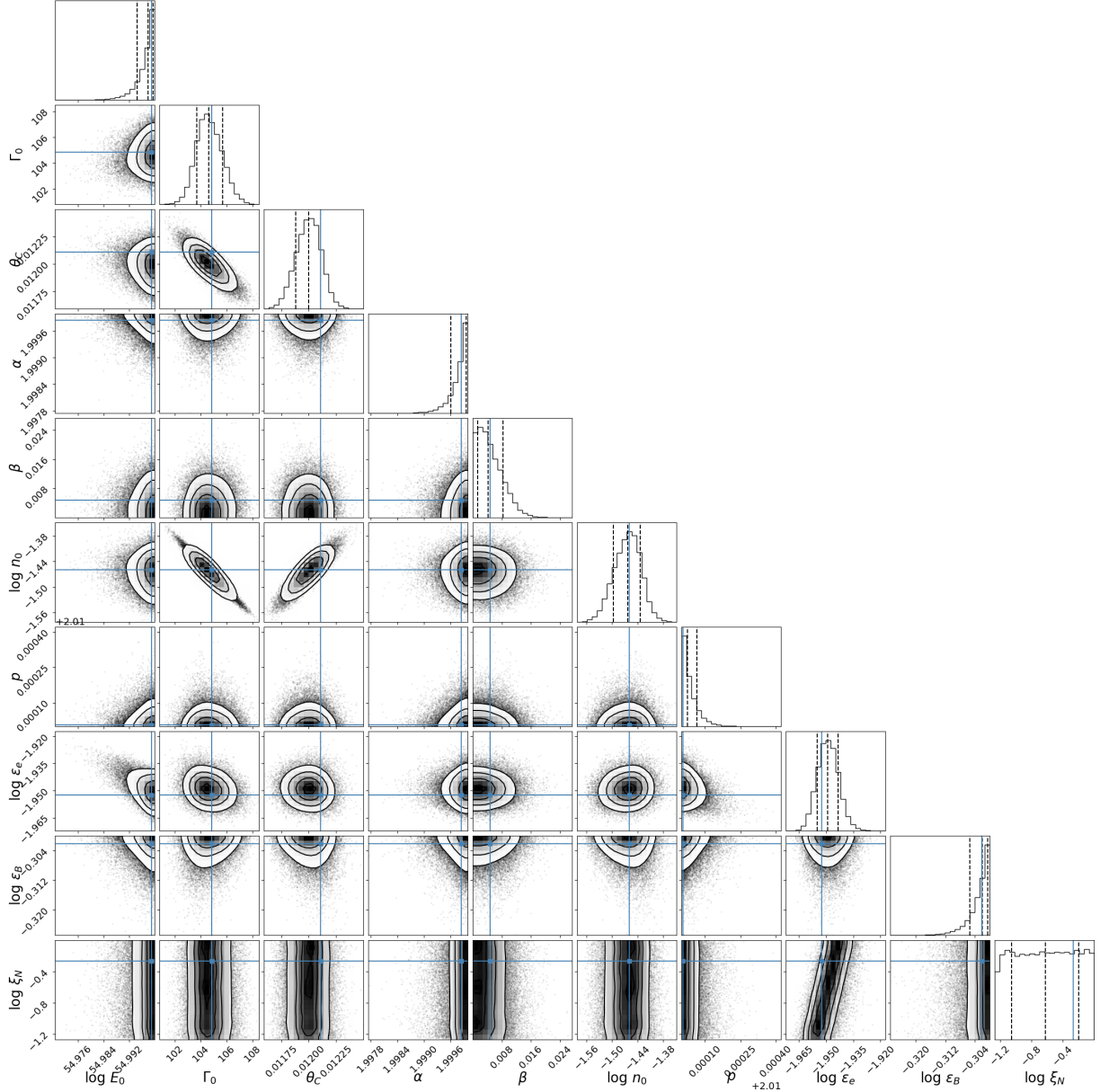


図 5.4: Gaussian 型ジェット (GEM) を GRB 080710 の観測データに適用した場合のベイズ推定により得られたコーナープロット。青線はサンプルの中で事後確率の最大を示す (MAP) 値を示し、点線は中央値と 1σ の分散を示す。

5.2 GRB 080710: 有限の厚みシェルと外部媒質密度の冪乗分布モデル

GRB 080710 の z -band、 r -band、X 線の光度曲線に対し、シェルの厚みと外部媒質密度の冪乗分布を導入したモデルの適用結果を示す。本件に関して、事前分布の複数条件での解析を行なったが、その多くは増光部分への適合度が不十分であった。本節で示す結果は、増光期間に焦点をあてて、その理論的解釈を与えることを目的としたものであり、減光部分の観測データ点の誤差を拡大し、増光部分の尤度寄与を強調することにより増光部分を最もよく再現したものである。この結果

は、(i) 増光指数と遅く無彩色的なピークという観測的特徴を再現できる一方で、(ii) 減光部分の適合度は一様ジェットの仮定により不十分であることを明らかにするものであり、この結果は、前節 5.1節 の期待と整合的である。

表 5.3 には、本計算で与えた事前分布の範囲と、得られた最尤値 (Maximum a posterior; MAP) および 1D 事後分布の中央値と分散を示す。また、図5.5 には、GRB 080710 の残光の観測データ (点) と、事後分布に基づく 100 セットの理論的な光度曲線 (薄い実線群) を示す。この光度曲線群は、制約されたモデルの不定性の範囲において、緩やかな増光と遅く無彩色的なピーク時刻といった観測の主要な特徴を再現することを示している。具体的には、増光部分に対する適合度は、最尤推定値において $\chi^2/\text{d.o.f} \sim 43.3/(30 - 11) \sim 2.2$ となり、構造を持つジェットモデルの結果に比べて大幅に改善された。一方で、後期までの観測点を含めると $\chi^2/\text{d.o.f} \sim 1002/(196 - 11) \sim 5.4$ となった。しかしながら、この場合でも構造をもつジェットモデルでの結果よりは良い適合度を示している。また、図5.5に見られるように、減光部分では理論曲線が観測点を上回る傾向がある。この差異は、減光期の光度にジェット構造が寄与している可能性を示唆しており、本モデルで仮定した Top-hat 型ジェットの近似が適切ではないことを意味していると考えられる。

表 5.3: 事前分布の範囲と得られた MAP 値と 1D 事後分布の中央値と分散

$\vec{\Theta}$	事前分布の範囲	MAP 値	1D 事後分布
$\log(E_0 \text{ [erg]})$	[50, 55]	54.32	$54.11^{+0.47}_{-0.89}$
$\log(\Gamma_0)$	[1, 3]	1.62	$1.68^{+0.22}_{-0.11}$
$\log(\Delta_0/c \text{ [cm]})$	[1.5, 3.5]	2.65	$2.67^{+0.05}_{-0.04}$
k	[0, 2]	0.05	$0.03^{+0.08}_{-0.02}$
$\log(n_0 \text{ [cm}^k\text{-}^3])$	[-3, 3]	2.05	$1.35^{+1.23}_{-1.66}$
$\theta_j \text{ [rad]}$	[0.001, 1.5]	0.15	$0.21^{+0.07}_{-0.04}$
$\beta = \theta_{\text{obs}}/\theta_j$	[0, 2]	0.64	$0.77^{+0.09}_{-0.10}$
$\log(\epsilon_B)$	[-5, -0.3]	-1.13	$-1.37^{+0.89}_{-2.39}$
$\log(\epsilon_e)$	[-3, -0.3]	-2.65	$-2.55^{+1.00}_{-0.42}$
p	[2.01, 2.99]	2.05	$2.09^{+0.05}_{-0.03}$
$\log(f_e)$	[-3, 0]	-0.07	$-0.49^{+0.46}_{-0.85}$

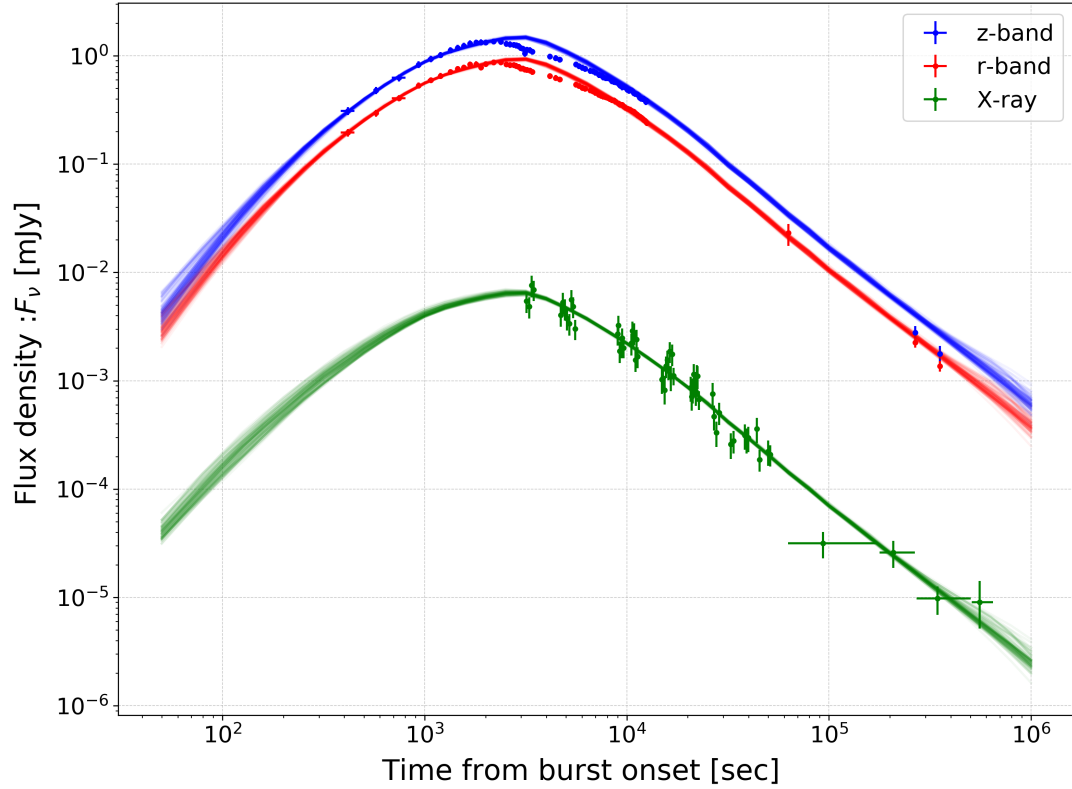


図 5.5: GRB 080710 の残光の観測データ (点) と事後分布 (薄い実線) により計算される残光の理論曲線。ただし、青が z -band、赤が r -band、緑色が X 線 (0.3 keV) を表す。

図 5.6 で示した、MAP 値から推定されるジェットのパラメータの時間発展を見ると、数百秒程度までは自由膨張 (Coasting phase) に近いダイナミクスを示すが、数千秒にかけて遷移期 (Transition phase) に入り、光度が極大を示す時刻で断熱減速期 (Deceleration phase) へと移行していることが確認できる。仮説の通り、この遷移期から断熱減速期への移行のタイミングで、遅く無彩色的なピークが出現していることが示された。遷移期の終了時刻も式 (2.217) より $T_{\text{BM}} \sim 1.6 \times 10^3$ 秒と評価され、ちょうど可視光・近赤外線の無彩色ピークを示す時刻まで遷移期が継続していることを示す。一方で、制約された爆発の全エネルギー $E_0 \sim 10^{54}$ erg、ローレンツ因子の初期値 $\Gamma_0 \sim 10^{1.6}$ 、外部媒質密度 $n_0 \sim 10^{1.4} \text{ cm}^{-3}$ の推定値から、式 (2.219) より減速開始時刻も $T_{\text{dec}} \sim 1.6 \times 10^3$ 秒と見積もられ、無彩色ピークを示す時刻まで、外部媒質との衝突によるシェルの減速は開始していない。つまり、GRB 080710 の可視光・近赤外線帯域の初期残光の増光は、自由膨張期に近いダイナミクスであるものの、シェルの厚みの効果により弱い減速を受けたことで形成されたと解釈される。したがって、ローレンツ因子の初期値 Γ_0 は増光部分の観測データに対して敏感に影響し、事後分布が制約されたと考えられる。

以上より、ジェット構造の効果を考慮するモデルから、シェルの厚みと外部媒質の密度分布を考慮するモデル変更しても、遅い無彩色ピークは (弱い減速を受ける) 自由膨張期と断熱減速期へのダ

イナミクスの変化により形成された可能性が高いことを示している。したがって、

$$T_{\text{dec}} \propto n_0^{-1/3} E_0^{1/3} \Gamma_0^{-8/3} \quad (5.4)$$

$$F_{\nu, \text{peak}} \propto \nu^{\frac{1-p}{2}} f_e^{2-p} \epsilon_e^{p-1} \epsilon_B^{\frac{p+1}{4}} n_0^{\frac{p+1}{4}} \Gamma_0^{2(p-1)} E_0 \quad (5.5)$$

が観測データにより制約され、 E_0 、 n_0 、 f_e が比較的大きな値を、 Γ_0 が小さい値を示す領域に事後分布が収束したと考えられる。見積もられた大きな E_0 の値から、即時放射の放射効率 $\eta_\gamma = E_{\gamma, \text{iso}} / (E_{\gamma, \text{iso}} + E_0) \sim 2 \times 10^{-3}$ となり、前節 5.1 節と同様に非常に低い放射効率が得られた。

遷移期のみでの再現が困難であった理由は、式 (2.207) の近似 ($\Gamma_{\text{FS}} \gg 1$ かつ $n'_1(R) \gtrsim n'_4(R)$) が成り立つダイナミクスにおいて、光度が時間の 1 乗に比例した増光を再現するためには、 $\nu < \min(\nu_c, \nu_m)$ が要請される一方で、無彩色ピークを再現するためには、 $\nu > \max(\nu_c, \nu_m)$ が要求されるためだと考えられる。無彩色ピークという観測的特徴がパラメータ制約に大きく寄与したことで、増光の形成は、遷移期の中でも $n'_1(R) \lesssim n'_4(R)$ の段階のダイナミクスに起因する結果となった。また、 $\nu > \max(\nu_c, \nu_m)$ の要請は $k \sim 0$ の場合の自由膨張期における ν_m 、 ν_c は

$$\nu_m \propto \epsilon_B^{1/2} \epsilon_e^2 f_e^{-2} n_0^{1/2} \Gamma_0^4 \left(\frac{p-2}{p-1} \right)^2 \quad (5.6)$$

$$\nu_c \propto n_0^{-3/2} \epsilon_B^{-3/2} \Gamma_0^{-4} t_{\text{obs}}^{-2} \quad (5.7)$$

とかけるので、これらの周波数を下げるために、すでにピーク時刻とピーク光度により比較的大きな値に制約されている n_0 、 f_e と小さい値に制約されている Γ_0 の影響を受け、 ϵ_B が、比較的大きな値に、 ϵ_e が比較的小さい領域に事後分布を収束させたと考えられる (図 5.8 参照)。ただし、5.1 節で検討した TH 型ジェットモデルに比べて、BM 解に従う減速段階に移行する直前にも弱い減速を受けているため、GEM 型モデルでの結果に似たようなパラメータ領域を許容したと考えられる。

視線方向は $\beta = \theta_{\text{obs}} / \theta_j < 1$ の領域に事後分布が収束し、本モデルでも、前節 (5.1 節) の結果と同様に、ジェットの開き角より外側から観測していると言う解釈は支持されなかった。ただし、ジェットの開き角 θ_j と視線方向 β は、視線方向から遠い方のジェットの端からの明るい放射が届き始める、ジェットブレイク時刻 ($\sim 10^6$ 秒) ではなく、視線方向に近い方のジェットの端からの明るい放射が届き始める時刻 ($\sim 10^4$ 秒) 以降の観測データにより制限された値であると考えられる。

図 5.8 の Δ_0 の 1 次元事後分布は二峰性を示す。しかし、 p および β との 2 次元事後分布ではこの二峰性は弱い相関としてのみ現れ、また許容される範囲は $2.63 < \log(\Delta_0) < 2.72$ であり数倍の幅しかなく桁で変化しない。このため、両ピークは観測的・物理的に区別可能な解を意味するものではなく、むしろパラメータ空間の形状 (周辺化の効果や細かい許容領域) によって生じた二峰性であると解釈される。

本節で示す MAP 値から推定される GRB 080710 の電波残光は、バースト発生から 6×10^5 秒後に極大を迎え、1 GHz で 0.001 mJy 程度の明るさになると推定され、これまでに観測されている電波残光から、典型的な値 (0.1 mJy 程度) (Chandra et al. 2012) に比べ 2 桁程度暗い。GRB 080710 の電波残光の観測は報告されていない (Guidorzi et al. 2009) もの、観測されていたとしても非常に暗いため、観測できなかった可能性が高い。

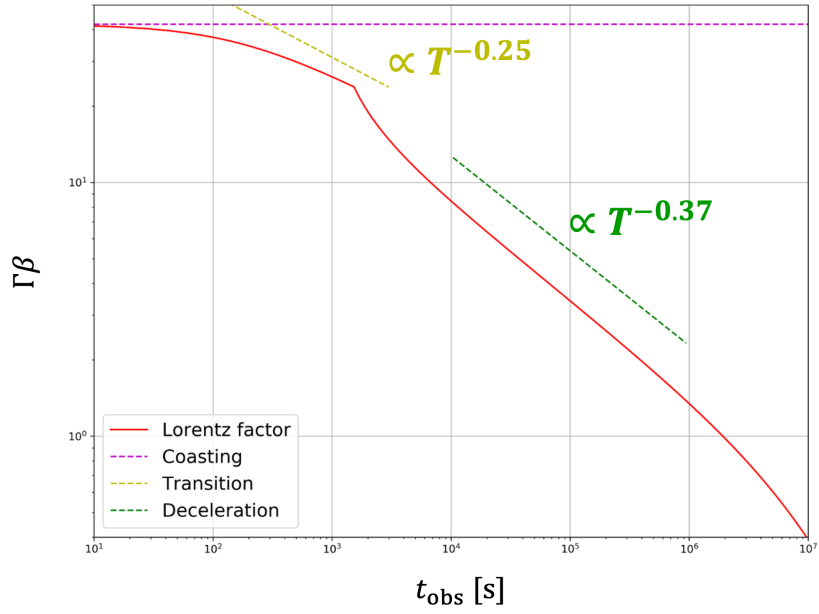


図 5.6: MAP 値により計算されるローレンツ因子の時間進化 (赤線)。紫破線が自由膨張期、黄色破線が遷移期、緑破線が減速期における時間依存性を示す。

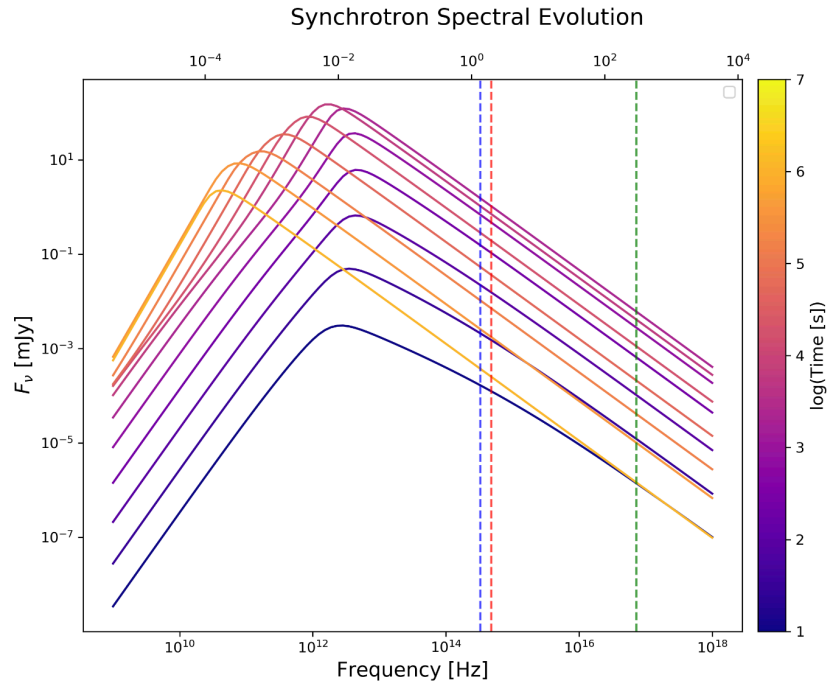


図 5.7: MAP 値により計算されるスペクトル進化、青点線、赤点線、緑点線はそれぞれ、z-band、r-band、X 線の周波数を示す。

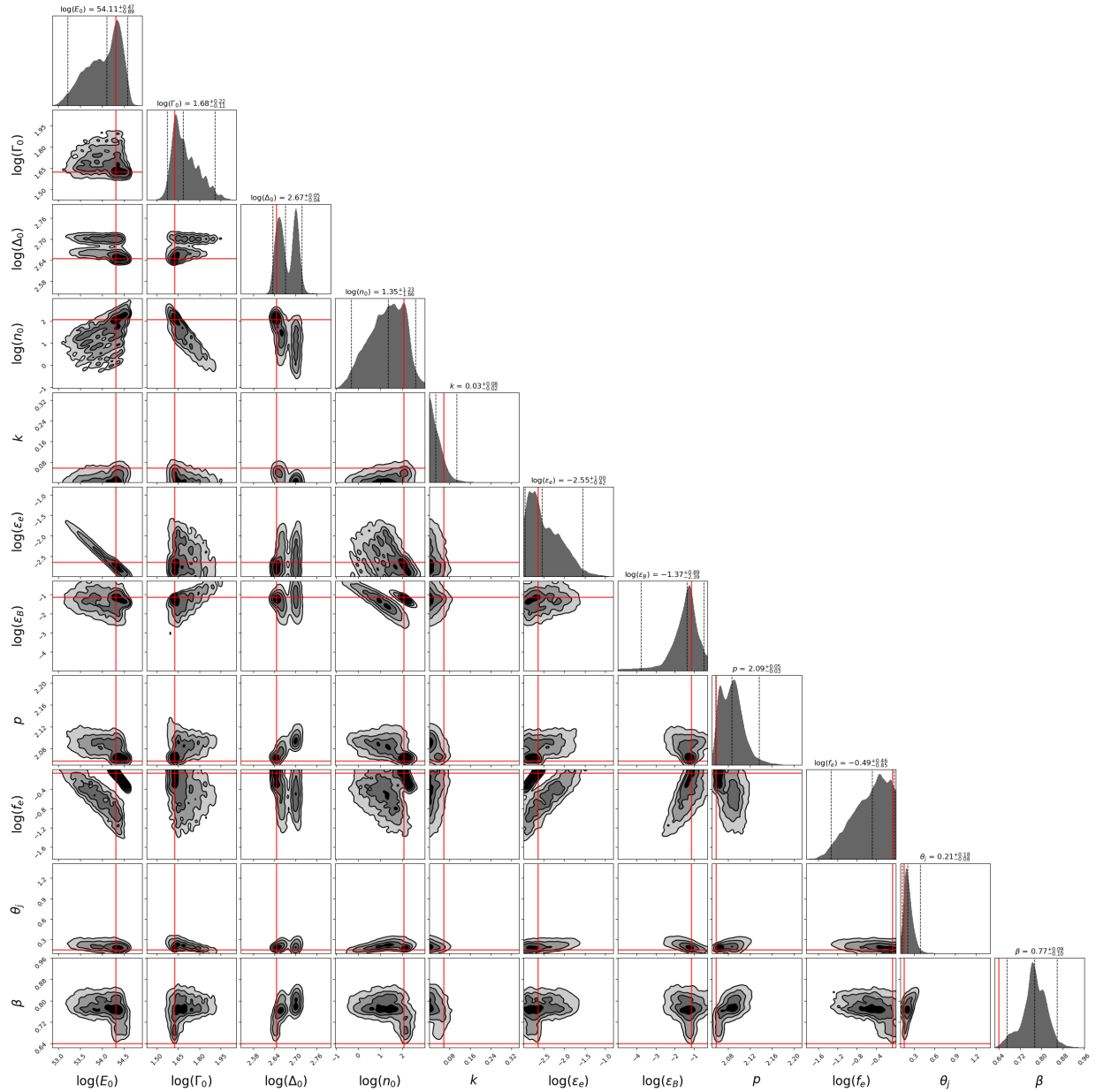


図 5.8: 有限の厚みシェルと外部媒質密度の冪乗分布モデルを GRB 080710 の観測データに適用した場合のベイズ推定により得られたコーナープロット。赤線はサンプルの中で事後確率の最大を示す (MAP) 値を示し、点線は中央値と 1σ の分散を示す。

5.3 XRF 080330: シェルの厚みと外部媒質密度の冪乗分布モデル

5.3.1 主に赤外・可視光の観測データを用いた解析結果

本節では、XRF 080330 の観測データに対して、有限の厚みをもつシェル効果および外部媒質密度の冪乗分布モデルを組み込んだ理論モデルを用い、ベイズ推定による解析結果を示す。ただし、ここで示す結果は、X 線データの誤差をフラックス値の 50% と仮定して解析を行ったものである。このよ

うな誤差設定としたのは、本イベントの報告論文において X 線データの誤差が数値的に明示されておらず、また関連する web ページにも具体的な値の記載が見当たらなかったためである。Guidorzi et al. (2009) に掲載された図から視覚的に判断すると、誤差の大きさはおよそ 25%程度と見積もられるため、次節の5.3.2節で X 線の誤差を 25%とした場合の解析結果を示す。したがって、本節で示す結果は、実質的に赤外および可視光データに基づく制約が主要な役割を果たしている。

事前分布の設定方針については 3.1.2 節で述べた通りであるが、解釈においては設定区間の違いが影響し得るため、ここでは区間ごとに結果を比較する。さらに、観測データの種類の違いによっても事後分布やモデル証拠は変化するため、各データセットが推定に与える影響を評価する観点から整理を行った。表 5.4 には、各事前分布の区間と観測データセットの対応を示すとともに、得られたモデル証拠の値と収束までに要した計算時間も併せてまとめた。さらに、表 5.5には、それぞれの計算で得られた MAP 値を、表 5.6には、それぞれの計算で得られた 1D 事後分布の中央値と分散をまとめて示している。

表 5.4: 計算条件とそれぞれのモデル証拠の結果。

	ISM Prior	標準 Prior	標準 Prior	Wind Prior	極狭域 Prior	狭域 Prior
$\log(E_0 \text{ [erg]})$	[50, 55]	[50, 55]	[50, 55]	[50, 55]	[53.1, 54.5]	[53, 55]
$\log(\Gamma_0)$	[1, 3]	[1, 3]	[1, 3]	[1, 3]	[2, 3]	[2, 3.5]
$\log(\Delta_0/c \text{ [cm]})$	[1, 3]	[1, 3]	[1, 3]	[1, 3]	[2.5, 3]	[2, 3]
k	0 固定	[0, 2]	[0, 2]	2 固定	[1.05, 1.65]	[0, 2]
$\log(n_0 \text{ [cm}^k\text{-}^3])$	[-3, 2]	[-3, 2]	[-3, 2]	[-3, 2]	[0, 1.2]	[-1, 2]
$\theta_j \text{ [rad]}$	[0.001, 1.5]	[0.001, 1.5]	[0.001, 1.5]	[0.001, 1.5]	[0.001, 1.5]	[0.001, 1.5]
$\beta = \theta_{\text{obs}}/\theta_j$	[0, 1.5]	[0, 1.5]	[0, 1.5]	[0, 1.5]	[0, 2]	[0, 2]
$\log(\epsilon_B)$	[-5, -0.3]	[-5, -0.3]	[-5, -0.3]	[-5, -0.3]	[-5, -3.6]	[-6, -3]
$\log(\epsilon_e)$	[-3, -0.3]	[-3, -0.3]	[-3, -0.3]	[-3, -0.3]	[-1.5, -0.3]	[-1.5, -0.1]
p	[2.01, 2.99]	[2.01, 2.99]	[2.01, 2.99]	[2.01, 2.99]	[2.01, 2.1]	[2.01, 2.1]
$\log(f_e)$	[-3, 0]	[-3, 0]	[-3, 0]	[-3, 0]	[-1.2, 0]	0 固定
観測データ	K,g , 初期 r	K,g , 初期 r	K,g,r	K,g,r	K,g,r	K,g,r X
$\ln Z$	115	177	152	116	133	187
計算時間	6 日	11 日	31 日	21 日	24 日	4.4 日

無情報事前分布を採用しているため、できる限り仮定に依存しないように設定した事前分布の区間を「標準 Prior」とした。この標準 Prior に対し、外部媒質の冪乗構造を規定する冪指数を $k = 0$ に固定した場合、すなわち一様密度の星間物質を仮定する事前分布を「ISM Prior」とし、一方で $k = 2$ に固定した場合、すなわち爆発前の親星が定常的に星風を放出していた環境を仮定する事前分布を「Wind Prior」とした。これらの事前分布を課した場合に得られたモデル証拠を比較すると、ISM Prior や Wind Prior のモデル証拠は標準 Prior に比べて 20 以上小さい値を示した。この結果は、ISM や Wind モデルを仮定するよりも、 k を自由パラメータとして扱うモデルの方が支持されることを示唆している。また、標準 Prior を課した 2 つの計算において、 r -band の観測データの

10^4 秒以降のデータ点を 1 点のみにした場合（表5.4では「初期 r 」と表記）と、 10^4 秒以降のすべてのデータ点を含めた場合（表5.4では「 r 」と表記）とで、得られたモデル証拠の値に 20 以上の差が生じた。この結果は、追加した 10^4 秒以降の観測データが尤度の寄与を低下させたことを示しており、モデルの限界が現れていると考えられる。本研究で用いたモデルでは、ジェットの内構造を簡単のために一様と仮定しているため、ジェットの内構造の影響がより顕著になると考えられる後期の時間帯はこの仮定が不適となった可能性がある。

標準 Prior で得られた事後分布を参考に、事前分布の区間を調整したものを「極狭域 Prior」と「狭域 Prior」とした。事前分布の区間を以前の計算結果をもとに狭めたりずらすことで、より高い尤度領域での高密度なサンプリングが可能となり、より良いモデルを評価することができる可能性がある。また、パラメータのロバスト性や、事前分布の影響度を判断することも可能である。

「極狭域 Prior」は、モデル証拠 $\ln Z = 177$ を示した計算で得られた 1D 事後分布の範囲を包括するように設定したが、 $\ln Z = 133$ と 40 以上低いモデル証拠を示した。これは、 r -band 後期の観測データを含めた $\ln Z = 152$ の計算結果の事後分布範囲を完全にはカバーできておらず、とりわけ冪乗型密度分布の冪指数の MAP 値 $k = 0.80$ を除外してしまったことが主な原因と考えられる。

一方、「狭域 Prior」は、観測データに X 線を追加した影響を踏まえ、「極狭域 Prior」に比べて若干広めの区間に設定した。さらに、極狭域 Prior では加速された電子の割合 $f_e = 1$ と固定している。これは、非熱的放射が支配的な残光データのみでは ϵ_e や ϵ_B と縮退関係を解けないことを指摘した先行研究 Eichler et al. 2005 や、狭域 Prior 以外の計算結果から、加速効率がおおよそ 50～80% 程度であること（比較的高い傾向）に基づいている。一般に、ベイズ推定では探索領域の次元が高いほど多くのサンプル数を必要とするため (A.9節参照)、収束までの計算時間が長くなる。実際、狭域 Prior の計算時間が他に比べて短いのは、 $f_e = 1$ と固定したことが一因である可能性がある。また、狭域 Prior での計算結果は、表5.4 に示す中で最も良いモデルと評価された。

表 5.5: それぞれの計算条件で得られた MAP 値と適合度。ただし、適合度 χ^2 の計算に用いた X 線のデータの誤差は、Guidorzi et al. (2009) に基づき、そのフラックス値の 25% とした。

$\tilde{\Theta}$	ISM Prior	標準 Prior	標準 Prior	Wind Prior	狭域 Prior	狭域 Prior
$\log(E_0 \text{ [erg]})$	54.03	53.67	53.75	53.05	53.47	53.91
$\log(\Gamma_0)$	2.92	2.85	2.64	1.85	2.69	2.56
$\log(\Delta_0/c \text{ [cm]})$	2.43	2.66	2.49	2.52	2.61	2.47
k	0 固定	1.43	0.80	2 固定	1.21	0.78
$\log(n_0 \text{ [cm}^{\text{k}-3}\text{]})$	1.74	0.50	0.58	0.92	0.48	1.06
$\theta_j \text{ [rad]}$	1.26	0.78	0.07	0.19	0.19	0.07
$\beta = \theta_{\text{obs}}/\theta_j$	0.29	0.64	0.003	0.65	0.64	0.01
$\log(\epsilon_B)$	-4.94	-4.83	-4.82	-3.12	-4.99	-5.82
$\log(\epsilon_e)$	-1.38	-0.97	-0.47	-1.35	-0.32	-0.15
p	2.16	2.06	2.03	2.05	2.04	2.03
$\log(f_e)$	-0.13	-0.43	-0.03	-0.81	-0.01	0 固定
χ^2	2064	1641	882	2534	1107	626
d.o.f	158 - 10	158 - 11	158 - 11	158 - 10	158 - 11	158 - 10
reduced- χ^2	13.9	11.2	6.0	17.1	7.5	4.2

表 5.6: それぞれの計算条件で得られた 1D 事後分布の中央値と分散。

$\bar{\Theta}$	ISM Prior	標準 Prior	標準 Prior	Wind Prior	狭域 Prior	狭域 Prior
$\log(E_0 [\text{erg}])$	$54.01^{+0.21}_{-0.20}$	$53.52^{+0.23}_{-0.16}$	$54.33^{+0.37}_{-0.37}$	$53.31^{+0.59}_{-0.69}$	$53.51^{+0.06}_{-0.03}$	$53.93^{+0.08}_{-0.08}$
$\log(\Gamma_0)$	$2.94^{+0.04}_{-0.07}$	$2.68^{+0.21}_{-0.25}$	$2.77^{+0.15}_{-0.19}$	$2.44^{+0.38}_{-0.42}$	$2.77^{+0.16}_{-0.19}$	$2.95^{+0.52}_{-0.57}$
$\log(\Delta_0 [\text{cm}]/c)$	$2.43^{+0.01}_{-0.01}$	$2.65^{+0.01}_{-0.02}$	$2.47^{+0.01}_{-0.01}$	$2.57^{+0.17}_{-0.02}$	$2.62^{+0.01}_{-0.02}$	$2.48^{+0.03}_{-0.03}$
k	0 固定	$1.43^{+0.05}_{-0.07}$	$0.81^{+0.10}_{-0.07}$	2 固定	$1.21^{+0.01}_{-0.04}$	$0.77^{+0.13}_{-0.12}$
$\log(n_0 [\text{cm}^{\text{k}-3}])$	$1.67^{+0.19}_{-0.18}$	$0.36^{+0.23}_{-0.19}$	$0.93^{+0.37}_{-0.33}$	$1.13^{+0.58}_{-0.70}$	$0.51^{+0.06}_{-0.04}$	$1.13^{+0.19}_{-0.35}$
$\theta_j [\text{rad}]$	$0.89^{+0.40}_{-0.46}$	$0.92^{+0.39}_{-0.43}$	$0.07^{+4\text{e}^{-3}}_{-4\text{e}^{-3}}$	$0.18^{+0.01}_{-0.01}$	$0.19^{+0.01}_{-0.01}$	$0.08^{+0.01}_{-0.01}$
$\beta = \theta_{\text{obs}}/\theta_j$	$0.40^{+0.32}_{-0.27}$	$0.42^{+0.30}_{-0.28}$	$0.04^{+0.04}_{-0.03}$	$0.67^{+0.03}_{-0.03}$	$0.64^{+0.02}_{-0.02}$	$0.03^{+0.11}_{-0.03}$
$\log(\epsilon_B)$	$-4.58^{+0.91}_{-0.29}$	$-4.72^{+0.27}_{-0.18}$	$-4.47^{+0.75}_{-0.37}$	$-3.33^{+0.72}_{-0.57}$	$-4.97^{+0.04}_{-0.02}$	$-5.88^{+0.34}_{-0.12}$
$\log(\epsilon_e)$	$-1.59^{+0.24}_{-0.39}$	$-0.78^{+0.17}_{-0.22}$	$-1.83^{+0.80}_{-0.62}$	$-1.59^{+0.68}_{-0.57}$	$-0.34^{+0.03}_{-0.05}$	$-0.14^{+0.04}_{-0.16}$
p	$2.13^{+0.03}_{-0.03}$	$2.05^{+0.02}_{-0.02}$	$2.05^{+0.02}_{-0.01}$	$2.05^{+0.01}_{-0.01}$	$2.04^{+0.01}_{-0.01}$	$2.03^{+0.01}_{-0.01}$
$\log(f_e)$	$-0.25^{+0.17}_{-0.26}$	$-0.26^{+0.18}_{-0.27}$	$-0.36^{+0.26}_{-0.40}$	$-1.04^{+0.71}_{-0.57}$	$-0.06^{+0.04}_{-0.08}$	0 固定
観測データ	$K, g, \text{初期 } r$	$K, g, \text{初期 } r$	K, g, r	K, g, r	K, g, r	$K, g, r \text{ X}$
$\ln Z$	115	177	152	116	133	187

さまざまな Prior を課した計算で得られた最尤値および 1D 事後分布の結果から、シェルの厚みの初期値は一貫して $\log(\Delta_0/c) \sim 2.5$ ($\Delta_0 \sim 9.5 \times 10^{12} \text{ cm}$) 付近に集中しており、この値はロバストな値であると判断できる。この結果が示唆する起源天体の物理については、6 章で述べる。一方で、本研究で比較的広めの設定として採用した標準 Prior においても、[1, 3] の範囲を事前分布としており、これより薄い、あるいは極端に厚いシェルについては、探索対象としていない。したがって、本研究の解析結果のみから、その領域を統計的に「棄却した」と結論づけることはできない。しかし、5.1 節や 2.2 節で示したように、シェルの厚みの効果を見逃したモデルでは、自由膨張期間における緩やかな増光が再現できないことが示唆されている。これらを踏まえると、観測される増光期の特徴には、有限のシェルの厚みの効果が不可欠であると考えられ、得られた Δ_0 の値は統計的な制約と、物理的整合性の両面から支持される結果であると言える。

視線方向を表す $\beta = \theta_{\text{obs}}/\theta_j$ の事前分布は [0, 1.5] または [0, 2] と設定し、いずれの場合も $\beta < 1$ の範囲で事後分布が得られたため、ジェット軸方向の近傍に観測者がいる解釈が妥当である結果となった。したがって、本イベント XRF 080330 の観測論文で報告されていた、ジェットの開き角から外側から観測している (off-axis jet; $\beta > 1$) という解釈は GRB 080710 と同様に支持されない結果となった。このパラメータ β は、ジェットの開き角のパラメータ θ_j と依存関係であるが、ジェットの開き角の典型値として知られる、 $\theta_j \sim 0.1 \text{ rad}$ (近年では $\theta_j \sim 0.05 \text{ rad}$ など細いジェットモデルの提案もある) に対して十分広い事前分布を課した。したがって、ジェット軸近傍方向から観測している、という解釈は観測データにより支持されていると言える。

冪乗型密度分布の冪指数は ISM ($k = 0$) や Wind ($k = 2$) ではなく、 $k \sim 1$ 程度であり、特に r -band の観測データをすべて用いた計算では $k \sim 0.8$ を支持した。この結果は、親星の爆発前の星風が一定ではなかったことを示唆するものである。詳細は 6 章で述べる。

ジェットの開き角 θ_j は、 r -band の観測データを「初期 r 」で計算した場合に比べ、 10^4 秒以降の

データ点をすべて含めた「全 r 」の計算では、事後分布の分散が小さくなった。この結果は、後期 (10^4 秒以降) の観測データが増えたことでジェットブレイクタイムの情報がより強く反映され、制約が強まったためと考えられる。ただし、本研究ではジェットの内部構造の詳細を考慮していないため、開き角に関する理論的解釈は慎重に行う必要がある。また、 θ_j に対する観測者の見込み角 β も、ジェットブレイクタイムの情報がより強く反映された結果になっていると考えられる。

より具体的なパラメータの推定値を考察し理論的な解釈を行うため、上記の結果の中で最も高いモデル証拠を示し、データへの適合度も最も良好であった狭域 Prior の計算結果を詳しく取り上げる。図 5.9 には、XRF 080330 の観測データと、MAP 値および事後分布に基づいて計算された残光の光度曲線を示す。ただし、図 5.9 の描画に用いた X 線の観測データの誤差は、Guidorzi et al. (2009) に基づき、そのフラックス値の 25% とした。

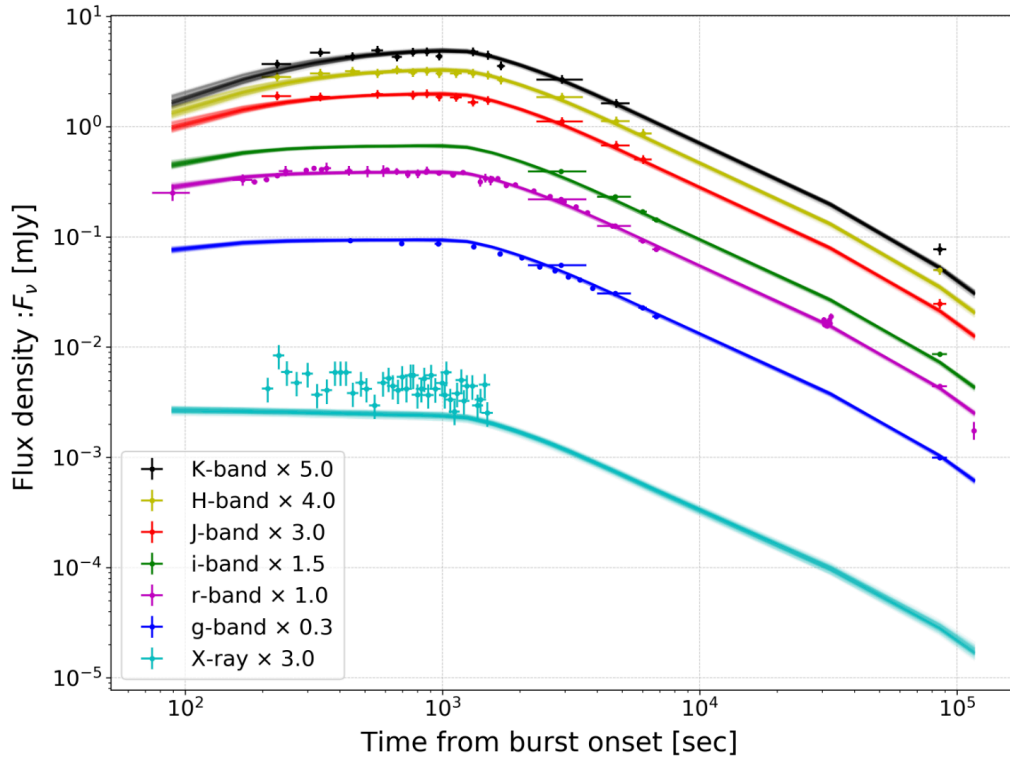


図 5.9: XRF 080330 の残光の観測データ (点) と事後分布により計算される残光の理論曲線。ただし、黒が K -band、黄色が H -band、赤が J -band、緑が i -band、紫が r -band、青が g -band、水色が X 線 (3 keV) を表す。

得られた事後分布からランダムに 100 個のパラメータセットをサンプリングし、計算された光度曲線を薄い実線で示した。この光度曲線群は、モデルの不定性範囲において、緩やかな増光や遅く無色彩的なピークといった観測の主要な特徴を再現している。

一方で、 10^5 秒以降の r -band の観測点は、モデルの不定性の範囲内では完全に説明できていない。MAP 値を用いてジェットブレイクの時刻 T_{jb} を見積もると、

$$T_{jb} = (1+z)|\theta_j \pm \theta_{obs}|^{8/3} \left(\frac{3E_0}{32\pi n_0 m_p c^5} \right)^{1/3} \sim 9 \times 10^4 \text{ s} \quad (5.8)$$

が得られる。このジェットブレイクの時間帯の光度は、ジェットの内部構造が Gaussian 型の場合には一様ジェットの場合より暗くなると予想されるため、これらの観測点はモデルの適用範囲外と自然に解釈できる。

図 5.10 に MAP 値に基づいて計算されるジェットのローレンツ因子の時間発展を示す。 10^3 秒付近で遷移期 (Transition phase) から断熱減速期 (Deceleration phase) への移行が示唆される。解析的評価式 (2.217) から、遷移期の終了時刻は $T_{\text{BM}} \sim 1.4 \times 10^3$ 秒と評価され、ちょうど可視光・近赤外線が無彩色ピークの時刻に対応している。よって、数千秒にみられる、遅い無彩色ピーク (ブレイク) の形成は、遷移期から断熱減速期へのダイナミクスの変化に起因することがわかった。

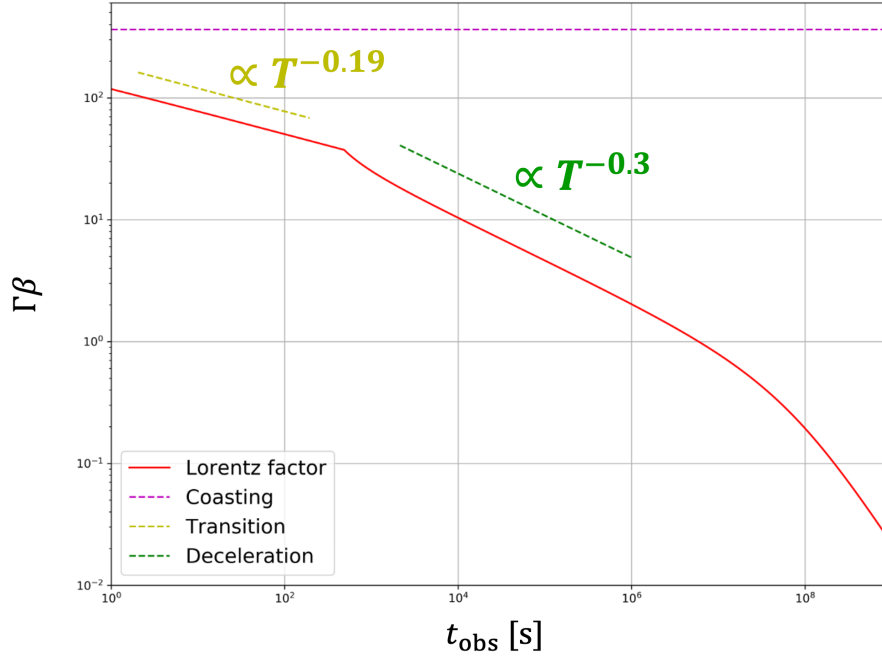


図 5.10: MAP 値により計算されるローレンツ因子の時間進化 (赤線)。

また、遷移期における slow cooling の場合のスペクトル進化を考察すると、式 (2.212) より、 $\nu < \nu_m$ のときは $F_\nu \propto t_{\text{obs}}^{1.09}$ 、 $\nu_m < \nu < \nu_c$ のときは $F_\nu \propto t_{\text{obs}}^{0.24}$ の増光が期待される。図 5.9 の数百秒付近で観測される光度曲線の周波数に応じた break は、この ν_m との大小関係の切り替わりに対応していると解釈できる。また、図 5.11 には、得られた MAP 値から計算されるシンクロトロンスペクトルの時間進化を示す。

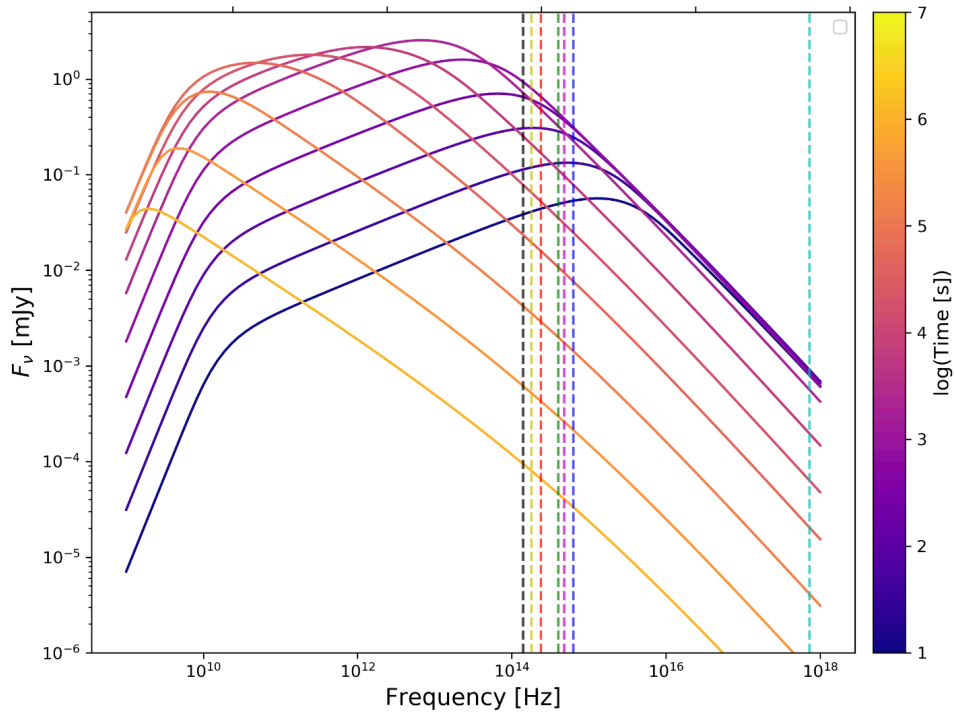


図 5.11: MAP 値により計算されるシンクロトロンスペクトルの時間進化。ただし、黒点線は *K*-band、黄色点線は *H*-band、赤点線は *J*-band、緑点線は *i*-band、紫点線は *r*-band、青点線は *g*-band、水色点線は *X* 線の周波数を表す。

スペクトル進化の図 5.11 からわかるが、MAP 値に基づく、電波残光を計算すると 10^5 秒程度で極大を迎え、その明るさは 1 GHz の場合は 0.05 mJy 程度、10 GHz の場合は 1 mJy 程度になる。本イベント XRF 080330 の電波残光の観測結果は報告されていない (Guidorzi et al. 2009; Urata et al. 2015) が、これまでに観測されている電波残光から、典型的には 10^5 秒程度で 0.1 mJy 程度とされている (Chandra et al. 2012)。従って、MAP 値から推定される電波残光は典型値より明るい極大を迎えていたことになる。もし、フォローアップ観測が試みられていた場合には、本イベントからの電波残光を検出できていた可能性が十分にあると考えられる。

図 5.12 には、本計算で得られたコーナープロット (1 次元および 2 次元平面へ射映した事後分布) を示す。コーナープロットから、シェルの厚みと外部媒質の分布の冪指数は事前分布の端に寄らないピークを示していることから、与えられた観測データによって、これらのパラメータ値が限られた領域に制約されていることが確認できる。一方で、ジェットのパラメータの初期値は $\log \Gamma_0 > 2.4$ の領域で広く分布していることから、「どの値らしい」という限定的な制約には至っていないものの、「大きい傾向」にあることがわかる。

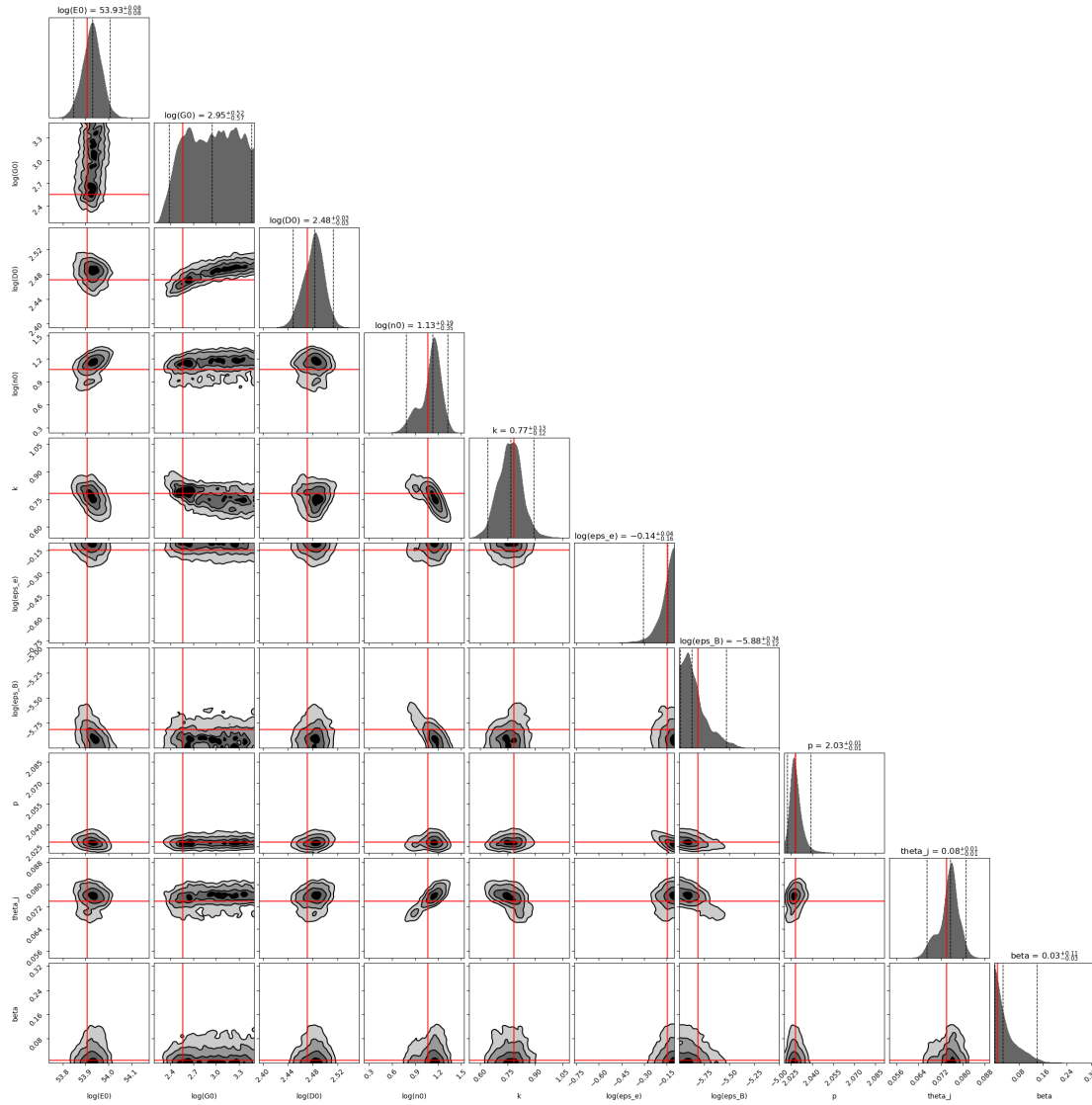


図 5.12: XRF 080330 の (主に可視光・近赤外) 残光データに基づくベイズ推定により得られた事後分布のコーナープロット。赤線はサンプルの中で事後確率の最大を示す (MAP) 値を示し、点線は中央値と 1σ の分散を示す。

5.3.2 X 線の観測データも含めた解析結果

前節で示した結果は、X 線の誤差の大きさを 50%とした結果であったため、X 線データによる制約は緩やかであった。そこで、Guidorzi et al. (2009) に示された図を参考に、X 線フラックス値の 25%を誤差として設定し、MultiNest を用いたベイズ推定を行った。この計算では MultiNest の自動停止条件に達しなかったが、エビデンスの変動幅が比較的小さく (0.05 程度)、収束に近いと判断されるため、この結果を代表値として採用した。同様の条件で事前分布を変更した別計算でも自動停止には至らなかったことから、本結果は完全収束には達していないものの、安定した近似解を与えていると考えられる。したがって、本結果は定量的な結論を与えるものではないが、以下に述べるように、事後分布の傾向や MAP 値の近傍解から、X 線データを考慮した際のモデルの応答を

概観することはできる。

表 5.7 には、主要な結果を得た際の事前分布の範囲と、MAP 値および 1D 事後分布の中央値と分散を示す。また、図 5.13 には、XRF 080330 の残光の観測データ (点) と、事後分布に基づく 100 セットの理論的な光度曲線 (薄い実線群) を示す。この光度曲線群は、制約されたモデルの不定性範囲において、緩やかな増光と遅く無彩色なピーク時刻といった観測の主要な特徴を概ね再現することを示している。具体的には、観測データ全体を通しての適合度は、MAP 値において $\chi^2/\text{d.o.f} \sim 525.8/(158 - 11) \sim 3.58$ となった。

表 5.7: 事前分布の範囲と得られた MAP 値と 1D 事後分布の中央値と分散

$\bar{\Theta}$	事前分布の範囲	MAP 値	1D 事後分布
$\log(E_0 \text{ [erg]})$	[52, 56]	55.25	$55.44^{+0.48}_{-0.38}$
$\log(\Gamma_0)$	[1, 4]	3.90	$3.75^{+0.23}_{-0.43}$
$\log(\Delta_0/c \text{ [cm]})$	[1, 3]	2.46	$2.46^{+0.01}_{-0.01}$
k	[0, 2]	0.73	$0.74^{+0.02}_{-0.02}$
$\log(n_0 \text{ [cm}^k\text{-}^3])$	[-2, 2]	-0.22	$-0.12^{+0.29}_{-0.49}$
$\theta_j \text{ [rad]}$	[0.001, 1.5]	0.76	$0.62^{+0.83}_{-0.52}$
$\beta = \theta_{\text{obs}}/\theta_j$	[0, 2]	0.94	$0.59^{+0.37}_{-0.55}$
$\log(\epsilon_B)$	[-6, -1]	-5.54	$-5.74^{+0.64}_{-0.24}$
$\log(\epsilon_e)$	[-3, -0.1]	-1.89	$-2.12^{+0.40}_{-0.56}$
p	[2.01, 2.99]	2.32	$2.33^{+0.01}_{-0.02}$
$\log(f_e)$	[-1, 0]	-0.13	$-0.22^{+0.20}_{-0.49}$
χ^2	-	525.8	-
d.o.f	-	158 - 11	-
reduced- χ^2	-	3.58	-

図 5.13 は GRB 080710 と同様に後期のデータ点への適合度は他のデータ点と比較して悪いことを示している。この結果についても、本モデルで仮定した Top-hat 型ジェット近似が完全には適切ではないことを意味していると考えられる。実際、前節 (5.3.1 節) でも示した通り、 10^4 秒以降のデータ点を含めない場合でのモデル証拠値は含めた場合に比べて、 $\ln Z$ が 20 以上高かった。このことから、後期の観測点は本モデルが想定する放射機構のもとでは生成される確率が低く、本モデルで考慮されていないジェット構造などの存在を示唆している。

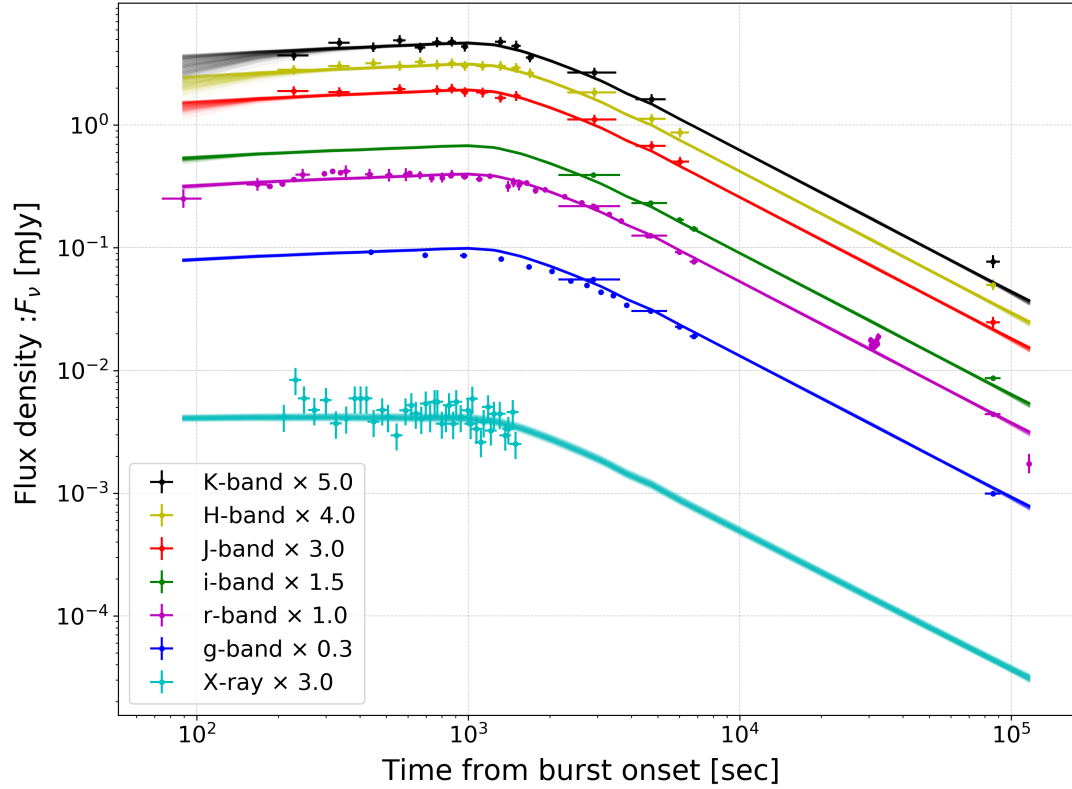


図 5.13: XRF 080330 の残光の観測データ (点) と事後分布 (薄い実線) により計算される残光の理論曲線。ただし、黒が *K*-band、黄色が *H*-band、赤が *J*-band、緑が *i*-band、紫が *r*-band、青が *g*-band、水色が *X* 線 (3 keV) を表す。この結果は、*X* 線のデータの誤差を 25% とし、*X* 線の尤度寄与を向上させたことで、*X* 線の誤差を 50% として解析した結果の図 5.9 に比べて *X* 線の観測データと理論線の適合度が改善していることがわかる。

遷移期間を形成するシェルの厚みの初期値は $\Delta_0 \sim 8.7 \times 10^{12}$ cm と推定され、遷移期の終了時刻は式 (2.217) より $T_{\text{BM}} \sim 1.4 \times 10^3$ 秒と見積もれる。一方で、減速開始時刻は式 (2.219) より、観測開始時刻よりも十分前に位置しているので、式 (2.207) が成り立つ遷移期でのダイナミクスによって、減光前の観測が再現されていると解釈できる。スペクトル進化の観点では、5.3.1 節の結果と同様に、増光期では slow-cooling にあると考えられる。つまり、約 200 秒付近で見られる周波数依存の増光指数の変化は、 ν_m が観測帯域を横切る効果と整合的であり、式 (2.211) に基づけば、増光指数は $\nu < \nu_m$ のとき $t_{\text{obs}}^{1.1}$ で、数百秒で観測周波数を順に横切った後は、 $\nu_m < \nu < \nu_c$ に対応し $t_{\text{obs}}^{0.1}$ に従い増光する。図 5.14 に示すように、 Δ_0 と k の本モデルを特徴づけるパラメータの事後分布は良好に収束しており、事前分布の変更や、無彩色ピークを示さない *X* 線の尤度寄与を変更に関わらず、ほぼ同一の領域に収束した (5.3.1 節参照)。これらは、本推定値が可視光・近赤外線の光度曲線が示す無彩色ピークにより制約をされたことを裏付けており、この結果は頑健であることを示している。

また、順行衝撃波下流の微視的パラメータに関しては、 ϵ_e が比較的大きく、 ϵ_B が小さい値へと制

約される傾向が見られた。この傾向は、事前分布の変更や X 線データおよび 10^4 秒以降の可視光データの尤度寄与の変更においても一貫したものである (5.3.1 節参照)。したがって、可視光・近赤外帯の光度曲線に見られる、無彩色ピーク後の周波数に依存しない減光の挙動から強く制約されたと考えられる。図 5.13 に示すように減光指数は周波数に依存していない。このことから、slow cooling の状態で無彩色ピークを形成した後、 10^5 秒までの間に ν_c が観測周波数帯を横切らないという制限により、 ϵ_B が大きい値領域に収束したと考えられる。この制約は、無彩色ピーク以前に $\nu > \max(\nu_m, \nu_c)$ を満たすように制約された GRB 080710 の場合とは逆で、電子の放射冷却効率を下げることで 10 万秒までに $\nu_c > \nu_g$ を満たすために、 ϵ_B が非常に小さい値へと制約されたと考えられる。ただし、後期の光度曲線には本モデルで考慮されていないジェット構造の寄与が顕著になると考えられるため、この点は今後の課題である。

周辺媒質の密度分布の冪指数 k についても、図 5.14 に示されるとおり強く制約され、前節で示した結果と同様のパラメータ領域に収束していることがわかる。これは、X 線の尤度寄与の強弱に関わらず、無彩色ピークの前後での光度曲線の傾きが、密度勾配を定めていると考えられる。

一方、ジェット開き角 θ_j および視線方向比 $\beta = \theta_{\text{obs}}/\theta_j$ の事後分布は広い範囲に分布した。前節で示した、使用する観測データに r -band の後期の点を含めかつ X 線データを含まない条件での推定結果においては、 θ_j や β は非常に狭い領域に事後分布が収束していた。X 線のデータが含まれたことで、数千秒までのデータが増えたために r -band の最後の一点による制約が緩められ、事後分布は広い範囲に分布したと考えられる。これは、前節で示した「狭域 Prior」の結果と同様の振る舞いである。さらに、本研究では Top-hat 型ジェット近似を採用しているため、ジェット角度に関する特徴がモデルに十分に反映されず、その不定性が事後分布の広がりとして現れたと解釈できる。

ところで、X 線の尤度寄与を低減した推定を行った結果、 $E_0 \sim 10^{54}$ erg、 $\Gamma_0 \gtrsim 3 \times 10^2$ 、 $n_0 \sim 1$ 、 $p \sim 2.05$ 付近に事後分布が収束し、X 線の観測データに対して暗い理論線を得た。一方で観測データ全体の再現性が改善された、表 5.7 や 図 5.14 に示す結果では、X 線の尤度寄与を低減した場合に比べて $E_0 \sim 10^{55}$ erg、 $\Gamma_0 \gtrsim 2 \times 10^3$ と一桁程度大きくなり、 $n_0 \sim 0.1$ と一桁程度小さい値を示した。さらに電子のエネルギースペクトルの冪指数は $p \sim 2.3$ と変化した。このことから、X 線帯域の適合度を確保するためには、より高い初期エネルギーと初期ローレンツ因子、そしてより低密度の外部媒質が本モデルにおいて要求され、結果として広帯域（可視光～X 線）を通した整合的なスペクトル・時間発展を再現する方向にパラメータ空間が強く制約されたことが分かる。ただし、逆行衝撃波など追加成分を考慮すれば制限が緩くなる可能性もあり、これは今後の課題である。

また、本結果が示す爆発エネルギー E_0 とジェットの開き角 θ_j から、真のジェットエネルギーは $E_j \sim E_0 \theta_c^2/2 \sim 3.6 \times 10^{53}$ erg となる。ただしジェットの開き角は不定性が大きく、X 線データの明るさを説明するためだけに大きな爆発エネルギーが必要だったことを考慮すれば、この真のジェットエネルギーの推定値についても不定性が大きいと考えられる。また、推定された爆発エネルギー E_0 から見積もられる即時放射の放射効率は $\eta_\gamma = E_{\gamma, \text{iso}}/(E_{\gamma, \text{iso}} + E_0) < 2.2 \times 10^{-3}$ となり、非常に低い放射効率を示す結果となった。

表 5.7 に示す MAP 値に基けば XRF 080330 の 1 GHz の電波残光は、バースト発生から 1×10^6 秒後に極大を迎え、1 mJy 程度の明るさになると推定される。XRF 080330 の電波残光の観測結果は報告されていない (Guidorzi et al. 2009; Urata et al. 2015) が、これまでに観測されている電波残光から、典型的には 10^5 秒程度で 0.1 mJy 程度とされている (Chandra et al. 2012)。従って、MAP 値から推定される電波残光は典型値より明るい極大を迎えていたことになる。もし、フォローアップ観測が試みられていた場合には、本イベントからの電波残光を検出できていた可能性が十分にあると考えられる。

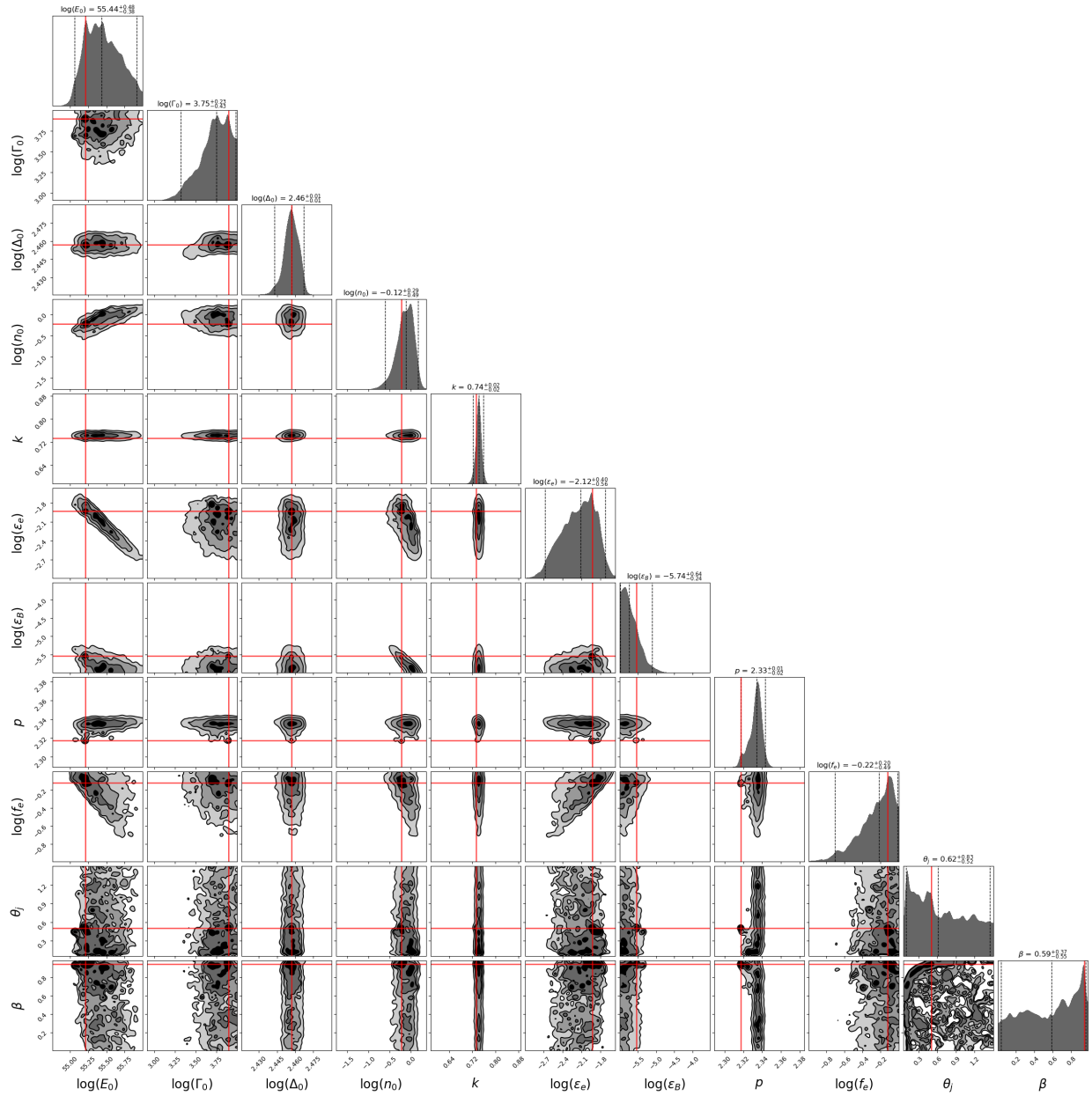


図 5.14: XRF 080330 の残光データ (X 線データの誤差を 20%にした場合) に基づくベイズ推定により得られた事後分布のコーナープロット。赤線はサンプルの中で事後確率の最大を示す (MAP) 値を示し、点線は中央値と 1σ の分散を示す。

第6章 議論

第5章では、GRB 080710 および XRF 080330 に対して、「構造を持つジェットの開き角外視線モデル」と「有限の厚みシェルと外部媒質密度の冪乗分布モデル」(2.3節を参照)を適用した結果を示した。本章では、5章で得られた結果から、ジェットの構造やシェルの厚みおよび外部媒質密度に関する新たな知見や、GRB 起源の解明に迫る示唆についてまとめる。また、本研究でベイズ推定を用いた解析を通して得られた、GRB 残光モデルの検証における課題や注意点についても議論する。

6.1 構造を持つジェットモデルに関する議論

6.1.1 ジェットの開き角外視線 (off-axis jet) モデルが選ばれなかった理由

本研究で解析した GRB 080710 の残光については、観測論文 Krühler et al. (2009a) ではジェットの開き角の外側から観測された GRB (off-axis jet model) であると定性的に述べられていた。しかし、本解析ではジェットの開き角の内側 (ジェット軸近傍方向) から観測されたものであると結論づけた。その理由は、6.3.3節でも述べるように、狭い尤度領域のサンプリングを不得意とするベイズ推定の性質による限界の可能性もある。しかし、 $\beta = \theta_{\text{obs}}/\theta_j \geq 1$ (観測者がジェットの開き角の外側にいるという仮定) の事前分布を用いても、ジェットの開き角の外側から観測されたという理論的解釈を実質的に導くことはできなかった。

ジェットの開き角外視線 (off-axis jet) モデルが支持されなかった主な理由は、増光指数と光度の極大値にあると考えられる。観測された増光指数は $T^{1.1}$ であり、ジェットの開き角外視線 (off-axis jet) モデルの場合に期待されるよりも緩やかである。この増光指数を再現するために、ジェットの内部構造を考慮することが有効である可能性がある。しかし、Gaussian 型ジェットを仮定した場合、式 (2.169) で述べたように、視線方向に近いジェット構造から順次観測者に光子が届くことで増光が進むが、観測されている増光指数を再現できるコア角 θ_c と視線方向 θ_{obs} の組み合わせを持つパラメータセットはベイズ推定でのサンプルには存在しなかったと考えられる。ジェット構造は中心軸を中心とした Gaussian 型であるが、観測者に届く光子の領域は視線方向を中心とした半径 $1/\Gamma$ の角度内である。ジェットの減速とともにこの角度は広がるが、見える範囲には明るい領域と暗い領域が混在する。このため、観測される増光指数を再現するには、従来の Gaussian 型ジェットよりも、 $1/\Gamma$ の広がりとともに明るい放射が順次届く構造を考える方が適していた可能性がある。

次に、光度の極大値も視線方向を制約する要素である。可視光・赤外領域で観測された光度の極大値は ~ 1 mJy と報告されており、比較的明るい。観測者がジェットの開き角より外側にいる場合、明るい放射が届く段階では、ジェットはすでに断熱減速期に入っている必要があり、この段階では、外部衝撃波下流での磁場増幅が弱まるため、放射エネルギーも減衰する。したがって、ジェットの開き角より外側にいる観測者にこれほど明るい放射が届くためには、より大きな爆発エネルギーを仮定する必要があった可能性がある。

さらに、即時放射の等方放射エネルギーも、ジェットの開き角外視線 (off-axis jet) モデルを不自然にする要因である。GRB 080710 では $\log(E_{\gamma, \text{iso}} [\text{erg}]) = 51.75$ と報告されており、典型的な

長時間 GRB の値 ($E_{\gamma, \text{iso}} \sim 10^{52}$ erg) に近い。対照的に、ジェットの開き角の外側の方向から観測されたと解釈できる短時間 GRB 170817A (Beniamini et al. 2020; Granot et al. 2018; Ioka et al. 2019) の観測されている即時放射の等方放射エネルギーは $E_{\gamma, \text{iso}} = 5.35 \times 10^{46}$ erg と報告されており、同じくジェットの開き角の外側の方向から観測されたと解釈できる GRB 190829A (Sato et al. 2021) は $E_{\gamma, \text{iso}} \sim 10^{50}$ erg という観測値が報告されている。いずれも典型値 (短時間 GRB の典型値は $E_{\gamma, \text{iso}} \sim 10^{50}$ erg) より 2 桁以上さい。これらの事例から、ジェットの開き角外視線観測では即時放射のエネルギーは通常より大幅に小さくなる傾向がある。GRB 080710 の即時放射が比較的典型値であることを考慮すると、ジェットの開き角外視線観測の解釈は物理的に不自然である。ただし、本解析では即時放射データ自体は用いておらず、この点が解析結果に直接影響を与えたわけではない。

6.1.2 残光の光度曲線に対するジェット構造の効果

本研究のベイズ推定の結果、GRB 080710 の残光を説明する上で、検討したジェットモデルの中では、Gaussian-GEM ジェットモデルが有意であることが明らかとなった。これは、数千秒までの増光期の観測データと、 3×10^5 秒付近の後期の観測データとの整合性が最もよかったためである。ジェットの端からの放射が初期から観測されるような、ジェット構造とローレンツ因子であることから、急激な減光を可能にした。さらに、初期からジェット全体の多様なローレンツ因子を持つ放射体からの放射の寄与が観測者に届いたことで、可視光領域の光度曲線に見られる T^1 に近い増光と、無彩色的な光度の極大、X 線を説明できるような大きな ϵ_B と小さな p というパラメータ領域に事後分布を制約することを許容したと考えられる。Top-hat や Gaussian-GF ジェットモデルでは、視線方向の放射の寄与が強く、多様なローレンツ因子を持つ放射体からの放射の寄与が低いことと、EATS 面の明るさも GEM に比べて明るくなることから、 $\nu < \nu_c$ を許容するパラメータ領域に事後分布は収束しなかったと考えられる。

一方で、ジェットの減速が進むと、噴出物の進行方向に対して垂直な方向（横方向）への広がりも無視できなくなる。この横方向への拡散は、ジェット内部のエネルギー分布を均一化させ、本来の内部構造の特徴を弱める可能性がある。本研究で用いた残光の理論計算コードでは、横方向への広がりを無視しているため、この効果が Gaussian 型ジェットにおいてどの程度重要となるかは今後の検討課題である。特に、Top-hat 型ジェットの場合には非相対論的段階で横方向への広がりが顕著となることが知られており、Gaussian 型ジェットでも同様の効果がどのように現れるかを明らかにする必要がある。

また、GEM モデルの場合においても、自由膨張期の $F_\nu \propto T^2$ という増光は、観測されている、 $F_\nu \propto T^1$ の増光の再現性には課題が残り、ジェットの内部構造の詳細だけでは観測結果を十分に説明できない可能性を示唆している。初期の増光やピーク時刻の特徴を再現するためには、ジェットの内部構造よりも外部媒質密度分布やシェルの厚みといった環境的・力学的要因を考慮することが重要である。このような背景から、本研究の次のステップとして、シェルの厚みの効果と外部媒質の密度分布を取り入れたモデルを採用し、初期残光の光度曲線をより包括的に再現する試みを行った。

6.2 シェルの厚みと外部媒質密度の冪乗分布モデルに関する議論

6.2.1 シェルの厚みから得られる GRB 起源への示唆

本研究で解析を行った GRB 080710 および XRF 080330 の残光観測結果から、いずれの場合もシェルの厚みについて $\Delta_0 \sim 9 \times 10^{12}$ cm 程度という制限を得た。この制約は、2.3.3 節の終盤で述べた、残光の極大を与える時刻で、シェルの厚みが制約されるという期待と一致し、ロバストな結果だと考えられる。シェルの厚みが中心エンジンの活動によって形成され则认为、中心エンジンの活動時間は GRB 080710 の場合は $\Delta_0/c \sim 4.7 \times 10^2$ 秒、XRF 080330 の場合は $\Delta_0/c \sim 2.9 \times 10^2$ 秒と推定される。一方で、即時放射 (prompt emission) の継続時間から推定される、中心エンジンの活動時間は GRB 080710 の場合は $T_{90}/(1+z) \sim 65$ 秒、XRF 080330 の場合は $T_{90}/(1+z) \sim 24$ 秒と推定される。したがって、即時放射 (prompt emission) の継続時間から推定されてきた従来の認識よりもおよそ 7~10 倍長いことを示唆するものである。

この示唆は、X 線の即時放射の観測とも整合的である。実際、1.1.1 節でも紹介したように、ぎんが衛星で観測された GRB 900126 では、ガンマ線放射に先行して X 線放射が発生し、より長い継続時間を示した (Murakami et al. 1991)。また、近年打ち上げられた X 線望遠鏡 Einstein Probe (EP) の観測により、X 線帯域における即時放射の継続時間が、*Swift* によるガンマ線帯域の継続時間よりも有意に長い事例が複数報告されている。例えば、EP240801a (XRF 240801B) では、即時放射の継続時間がガンマ線帯域では 22.3 秒であるのに対し、X 線帯域では 148 秒と報告されている (Jiang et al. 2025)。また、X 線フレアの観測からも、中心エンジンの活動時間はガンマ線の継続時間から推定されるよりも長いことを示唆する (Burrows et al. 2007; Lazzati et al. 2007; Ma et al. 2025)。

このような観測的傾向は、中心エンジンの活動時間の従来の認識からの長期化、あるいは放射領域の空間的・時間的広がりを示唆している。従来、即時放射の継続時間の指標としては、光子数の 90%が含まれる時間 T_{90} が用いられてきた。 $T_{90} > 2$ s の GRB は「長時間 GRB (long GRB)」と分類され、その起源としては大質量星の重力崩壊が有力視されている (A.2節参照)。大質量星の崩壊時間スケールは密度に依存し、数秒から数千秒程度の活動時間を説明可能であるため、EP の観測的報告や本研究で得られたシェル厚みに基づく中心エンジン活動時間の従来の認識からの長期化は、このモデルを覆すものではない。

即時放射のガンマ線および X 線の到達時刻や継続時間の差は、ジェット構造、衝撃波の伝播、および視線方向に関する詳細な情報を与える可能性がある。例えば、ジェットの軸近傍で主に X 線が輝き、軸から離れた領域でガンマ線が支配的となる構造を仮定すれば、観測される X 線とガンマ線の継続時間の差異を説明できるかもしれない。また、X 線フラッシュ (XRF) は、即時放射におけるガンマ線に対する X 線の光度比が高いものとして分類される現象であり (1.1.2節参照)、XRF の発生条件とも関連があるかもしれない。

本研究で得られたシェル厚みの制限は、残光放射の増光指数およびピーク時刻を用いてジェットのダイナミクスを制約するものであり、即時放射の継続時間から得られる推定値よりも、放射体の空間的スケールを直接的に反映していると考えられる。つまり、今回推定された $\Delta_0 \sim 9 \times 10^{12}$ cm は、外部媒質との相互作用が顕著になる前段階における、シェルの物理的サイズを表している。この段階では外部媒質の影響は小さく、中心エンジンの活動がより直接的に反映されている可能性がある。中心エンジンが $\Delta_0 \sim 9 \times 10^{12}$ cm 程度の噴出物を形成する一方で、その全体が即時放射として放射されるわけではなく、とりわけ即時放射のガンマ線の成分は、シェル内部の観測者側 cT_{90} の領域、すなわち噴出物の先端から 15% 足らずの領域のみからの放射が観測されている可能性がある。

る。これは、中心エンジンから動径方向のジェット構造に対する新たな示唆を提供するものである。さらに、本研究で解析した GRB 080710 と XRF 080330 に対しては、即時放射の観測から X 線成分の継続時間や、X 線フレアは報告されていない。このような GRB に対しても、残光の光度曲線に現れる遅い無彩色ピークという特徴から、中心エンジンの活動時間について議論できる点も、本研究で与えた新たな示唆である。

以上のように、本研究では、数千秒程度までの早期残光の観測結果のみを用いて、中心エンジンの活動時間およびその空間的スケールに関する重要な示唆を与えることができた。

6.2.2 外部媒質密度分布から得られる GRB 起源への示唆

本研究で解析を行った GRB 080710 の観測結果は、外部媒質密度分布の勾配に対して $k \sim 0$ 、一方で XRF 080330 の観測結果は $k \sim 0.7$ 程度という制限を与えた。外部媒質密度分布は、GRB ジェットが通過する周辺環境の性質を示すものであり、GRB 起源の候補である親星からの星風による周辺環境の形成過程を反映していると考えられる。 $k = 0$ は一様媒質 (constant density medium) に対応し、 $k = 2$ は典型的な恒星風 (wind-like medium) に対応するため、 $k \sim 0.7$ という結果は、両者の中間的な性質をもつ環境を示唆している。

A.2.2 節で述べたように、 $n(r) \propto r^{-k}$ を形成するメカニズムとして、恒星風の質量損失率 $\dot{M}(t)$ と噴出速度 $v(t)$ の時間依存性が重要である。もし噴出速度 $v(t)$ が時間に対して一定である場合、 $k \sim 0.7$ という結果は質量損失率が崩壊直前に向けて減少していることを意味する。逆に、質量損失率が一定であると仮定すれば、噴出速度が崩壊直前に向けて加速していたことを意味する。

一方で、GRB 080710 の場合に得られた $k \sim 0$ という結果は、ジェットが比較的一様な外部媒質中に伝播していることを意味する。このような環境は、恒星風による密度勾配が十分に広がらなかった可能性、もしくは過去の噴出活動によって内側が再充填された状況を示唆している。この違いは、GRB の親星が崩壊に至る直前の進化段階や、周囲環境との相互作用の履歴が異なることを反映している可能性がある。したがって、外部媒質密度分布の勾配指数 k の違いは、親星の終末進化を理解する上で重要な観測的指標となる。

ところで、 $k \sim 1$ ($k = 0, 2$ ではない) という結果は先行研究による報告 Liang et al. (2013) and Yi et al. (2013) とも整合的である。Yi et al. (2013) では、GRB 080710 および XRF 080330 を含む 19 個の GRB の 初期残光の光度曲線を解析し、薄いシェル ($\xi > 1$) と外部媒質密度分布 ($n \propto r^{-k}$) を仮定した解析モデルから、理論的に予言される増光指数、減光指数、スペクトル指数と観測値を比較することで、外部媒質密度分布の冪指数 k および電子エネルギースペクトル指数 p を制約している。その結果、GRB 080710 では $k \sim 0.92$ 、XRF 080330 では $k \sim 1.32$ が得られている。ただし、Yi et al. (2013) の解析は、解析的な近似式をもとに早期残光の時間発展を議論するものであり、シェルの動的進化や放射過程を時間依存的に厳密に扱っていない。また、観測データとの照合も解析的モデルとの直接比較にとどまっており、パラメータの統計的制約や信頼区間の導出は行われていない。これに対し本研究では、シェルの進化を時間発展的に数値計算することで、薄いシェル／厚いシェルの遷移領域を含めた残光進化を再現し、さらにベイズ推定を導入することで、観測データからパラメータ空間を統計的に制約する手法を構築した。このアプローチにより、理論的近似に依存せず、観測データに基づく k を含むモデルパラメータの定量的評価が可能となった。

6.3 GRB 残光モデルの検証におけるベイズ推定の限界と注意点

本研究ではベイズ推定を活用することにより、観測データから理論的制約を行った。本節では、本研究を通じて得られた GRB 残光モデルの検証におけるベイズ推定の限界や注意点について述べる。

6.3.1 モデルや事前分布に依存する擬似的制約

本研究で得られたベイズ推定の結果を解釈する際には、得られた MAP 値や事後分布の形状に対して、それらを直ちに一意的な物理的意味として解釈することには注意が必要である。事後分布が一見よく収束しているように見える場合であっても、観測データがモデルの表現能力を超えた物理過程を反映している場合には、推定結果はモデルの仮定や事前分布に強く依存した擬似的な制約を与えている可能性がある。

具体例として、XRF 080330 の残光観測データには、 10^5 秒付近にジェットブレイクを示唆する変化が見られる。このような時間変化はジェットの開き角を制約し得る観測的特徴であるが、その解釈は採用するジェットモデルに大きく依存する。例えば、Gaussian 型ジェットと Top-hat 型ジェットでは、同一のジェット開き角を仮定した場合であっても、ジェットブレイクに対応する時刻は一般に一致せず、結果として導かれる物理的制約の意味も異なり得る。

さらに、ベイズ推定におけるそれぞれの観測データの尤度関数への寄与は、時間領域ごとの観測点数の違いや、各観測データに付随する測定誤差の大きさの不均一性によっても影響を受ける。そのため、特定の時間帯や波長帯の観測が、事後分布に対して相対的に強い拘束を与えている可能性がある。このような点を踏まえると、推定結果の解釈においては、モデルの表現能力と、ベイズ推定に用いる観測データの種類および量とのバランスについても慎重に検討する必要があると考えられる。

同一の観測結果に対して複数の物理的解釈が成立し得る場合には、ベイズモデル比較を通じてそれらの相対的な妥当性を評価することが重要であり、この点については今後の課題とする。

6.3.2 頻度論的適合度指標との比較

ベイズ推定により得られた MAP 値に基づいて、頻度論的観点から reduced χ^2 を算出すると、しばしば 1 を大きく上回る値が得られる場合がある。本研究においても、いずれのモデルにおいて、MAP 値に基づく reduced χ^2 は 1 を大きく上回る結果となった。

事前分布として一様分布を仮定し、かつ事後分布が事前分布の境界から十分に離れている場合には、MAP 値は最尤推定値と一致する。この条件下では、MAP 値に基づいて算出した χ^2 は、形式的には従来の最尤解析における評価と同様の量として解釈できる。ただし、ベイズ推定では reduced χ^2 をモデルの妥当性判定の主要指標とは位置づけていない。

ベイズ推定の立場は 3.1 節でも述べたとおり、尤度の最大化そのものを主目的とするものではなく、モデルの不完全性や外れ点の影響も含めて、理論モデルの相対的な尤もらしさを評価することを目的とする。

一方で、reduced χ^2 は、制約されたモデルと観測データとの適合度を定量的に把握する上では有用な指標であり、本研究では理論モデルの限界を議論するための補助的な参考値として用いた。

6.3.3 ベイズ推定において不利になる仮説

ベイズ推定に基づくモデル比較では、観測データをどれだけうまく再現できるかだけでなく、パラメータ空間全体における尤度の広がり、すなわちモデルの「自然さ」も同時に評価される。そのため、極端に限られたパラメータ範囲でのみ観測を説明できる、いわゆる fine-tuning を要するモデルは、ベイズ的には不利に評価される傾向がある。

これは、モデル証拠 $Z = \int P(X|\theta, M)P(\theta|M), d\theta$ が、単一の最尤点の高さではなく、尤度と事前分布の積の積分で定義されるためである。観測を再現できる領域の体積が小さい場合、その寄与は全体として小さくなり、モデル証拠は低下する。言い換えれば、ベイズ推定は自動的にオッカムの剃刀を内包しており、「説明できる範囲が狭すぎる」モデルに対してはペナルティを与える。

2.3.1節で述べたような、相対論的ジェットを斜め方向から観測するような仮説は、視線方向というパラメータに対して極めて敏感であり、わずかなずれでも観測データを再現できなくなると考えられる。このようなモデルは、頻度論的には「最適なパラメータで高精度に再現できる」と評価され得るが、ベイズ的には「再現できる条件が過度に狭い」と見なされるため、モデル証拠は必ずしも高くない。したがって、ベイズ推定は fine-tune を要する仮説を一般に「自然な説明」とはみなさない。

もっとも、自然界が実際にそのような精密な構造を持つ場合、ベイズ推定はその事実を事後分布の尖りとして反映する。その場合、モデル全体の確率は小さいものの、特定の条件下での整合性は高く評価される。この点を理解した上で、ベイズ的モデル比較を行うことが、fine-tuning 仮説の妥当性を適切に議論する上で重要である。

5.1節で述べたように、本研究では、標準理論モデルでは説明困難なイベントに対し、相対論的ジェットを斜め方向から観測するような仮説は導かれなかった。ベイズ推定ではペナルティと評価されるようなモデルの検証であったために、この解釈を導くには不利な仮説であった可能性がある。事前分布の範囲を $\beta = \theta_{\text{obs}}/\theta_j \geq 1$ とした場合でも、ジェットの開き角よりも外側からの観測を支持する領域に事後分布を見つけられず、その理由まで考察できたため、本研究では GRB 080710 に対して 構造を持つジェットの開き角より外側から観測したと解釈するモデルは支持されなかったと結論づけた。しかし、 β に対して線型空間で一様を課した事前分布の、関数形を変更した場合など、別の仮定による結果への影響の検証は今後の課題である。

第7章 結論

本章では、まず本研究の目的と概要を再掲し、本研究全体の成果を総括するとともに、得られた主な知見を整理する。そして得られた成果がガンマ線バースト (GRB) の理論的理解に果たす意義について述べる。さらに、本研究結果から得られる今後の展望についても言及する。

7.1 本研究の概要

本研究では、GRB 初期残光の、特に可視光および近赤外線帯域で観測される「無彩色性」「緩やかな増光」「遅いピーク時刻」といった特徴的な振る舞いを理論的に説明するモデルを検証することを目的とした。これを達成するために、ベイズ推定法を用いてモデルパラメータの事後分布を導出し、各モデルの理論的制約およびモデル間の比較を行った。対象とした理論モデルは、これまで初期残光の光度曲線を説明する候補として提案されてきた

- (1) 構造を持つジェットの開き角外視線モデル
- (2) 冪乗則に従う外部媒質密度分布モデル
- (3) シェルの有限厚みを考慮したモデル

の3種類である。これらのモデルの光度曲線の計算には、公開コード `afterglowpy` および `Magglow` を用いた。本研究の解析結果から、対象とした GRB 080710 および XRF 080330 の初期残光に関して、以下の知見が得られた。

- 構造を持つジェットモデルの適用結果： Top-hat 型および Gaussian 型ジェットモデルでは、ジェットの開き角より外側から観測している (off-axis structured jet) モデルは棄却され、観測された増光期の緩やかさや無彩色的なピーク時刻を再現できなかった。一方で、角度依存のローレンツ因子を導入した Gaussian-GammaEvenMass (GEM) モデルでは、初期から観測者にジェット全体の放射が直接届く状況が示唆され、後期の減光の特徴を部分的に説明できた。しかし、増光指数の再現や典型値よりも大きな爆発エネルギーの必要性など、単純な構造のジェットモデルのみでは不十分であることも明らかとなった。
- 有限厚みシェルと外部媒質密度冪乗分布モデルの適用結果： シェル厚みと外部媒質密度の冪乗分布を組み込んだモデルを適用したところ、観測された緩やかな増光と遅い無彩色的なピークを理論的に再現することが可能であった。特に、自由膨張期から断熱減速期への移行に対応する遷移期において光度極大が形成されることが示唆された。減光期における観測とのわずかなずれは、ジェット構造の Top-hat 近似の影響と考えられる。
- モデル比較とベイズ推定の示唆： ISM や Wind モデルを固定した場合に比べ、外部媒質密度の冪指数 k を自由パラメータとしたモデルの方がデータにより良く適合し、モデル証拠も大きかった。

た。事前分布を狭めた条件下での解析では、最尤値および事後分布の中央値が安定し、モデルのロバスト性も確認された。

総じて、初期残光の「無彩色性」「緩やかな増光」「遅いピーク時刻」といった特徴を有する GRB 080710 と XRF 080330 に対して、有限厚みシェルと外部媒質密度の冪乗分布を考慮したモデルによって理論的に整合的に説明できることが示された。構造を持つジェットモデルは、後期の光度減衰やジェットの広がりをも補足的に理解する上で有効であるが、増光期の主要な特徴はシェル厚みの効果によって形成されることが本研究により明確となった。

7.2 本研究の主要な成果と意義

本研究は、GRB 初期残光に見られる緩やかな増光や無彩色性といった特徴的挙動を、複数の理論モデルに基づき定量的に検証したものであり、その過程で得られた知見は、GRB 放射機構およびジェット構造の理解を深化させる上で重要な意義を持つ。以下に本研究で得られた主要な成果とその意義をまとめる。

(1) ジェットの開き角の外側から観測されたとする従来解釈の再検討

これまで、GRB 080710 および XRF 080330 は、遅いピーク時刻と無彩色性を示す光度曲線形状から、ジェットの開き角より外側から観測された (off-axis jet) 事例であると定性的に解釈されてきた (Guidorzi et al. 2009; Krühler et al. 2009a)。これに対し、本研究におけるベイズ推定により、ジェットの開き角より外側から観測されたとするモデルの事後確率は低く、むしろジェット軸近傍方向から観測された確率が高いことが定量的に示された。

特に、GRB 080710 を対象として構造を持つジェットモデルを適用した解析により、ジェット構造の影響は主として後期の残光放射に現れる一方で、視線方向の違いは光度曲線の増光指数および光度の極大値によって制約されることを明らかにした。この結果は、従来「ジェットの開き角外視線」によって説明されてきた遅い増光を、単にジェット構造の効果と視線効果のみで説明することが困難であることを示すものである。

さらに、観測される緩やかな増光は、ジェットの断熱減速膨張が始まる前段階に対応している可能性が示唆された。この知見は、シェルの厚みや外部媒質密度分布の勾配といった、より内部的・環境的要因を考慮したモデルを検討する動機となった。これらの、GRB 080710 を対象として得られた成果の詳細は Obayashi et al. (2024) に報告している。

(2) シェル厚みの定量的制約による中心エンジンの活動時間への示唆

シェルの厚みを考慮したモデルを適用することで、観測で見られる緩やかな増光と遅いピーク時刻を自然に再現できることを示した。特に GRB 080710 および XRF 080330 両イベントにおいて、最も高いモデル証拠を得たモデルはいずれもシェル厚みを有限とするものであった。この有限の厚みを持つシェルが中心エンジンの活動によって生成されたものだと考えると、中心エンジンの活動時間は、これまで考えられてきた、即時放射の継続時間から見積もられる活動時間よりも 7 から 10 倍程度長いことが示唆される。この結果は、初期残光放射が即時放射の単なる後続現象ではなく、中心エンジンの持続的活動を反映している可能性を示し、GRB 発生機構の理解に寄与する。

(3) 外部媒質密度分布の冪指数に対する定量的制約

外部媒質密度が冪乗則 $\rho \propto r^{-k}$ に従うモデルを導入し、XRF 080330 の観測データを用いてベイズ推定を実施した。 $k = 0$ （一様密度）および $k = 2$ （定常的恒星風）と固定したモデルと比較した結果、 $0 < k < 2$ の範囲で自由に値を取るモデルにおけるモデル証拠値が最も高くなることを示した。この結果は、周囲密度構造が単純な恒星風や一様媒質ではなく、非定常な恒星風環境、あるいはその遷移的段階にあることを意味している。さらに、複数の事前分布や観測データセットを用いても、 $k \sim 0.7$ 程度の値が一貫して得られたことから、得られた制約が事前分布やデータ選択に依存しない、統計的にロバストな結果であることを確認した。この成果は、GRB 周囲環境が単純な一様媒質ではなく、進化段階にある恒星風領域を含むことを示し、初期残光放射が GRB の起源天体とその進化過程の理解に直接的な手がかりを与える。

(4) 解析手法および実装面での貢献

本研究では、GRB 残光の数値計算には `afterglowpy` および `Magglow` を使用しベイズ推定には `emcee` および `MultiNest` を使用して、パラメータ推定過程を自動化し、事後分布の可視化から光度曲線の描画までの解析パイプラインを構築した。これにより、GRB 初期残光解析を定量的かつ再現性のある形で実施できる環境を整備した。この環境は他の GRB イベントや将来の高時間分解観測データにも適用可能であり、今後の GRB 研究や他波長観測データへの適用可能性が拓かれた。

7.3 今後の展望

本研究で得られた成果は、GRB の初期残光が、GRB 発生機構の理解や GRB の起源天体とその進化過程の理解に寄与する、重要な役割を担うことを示している。本研究では、2つのイベントを取り上げて詳細な解析を行なったが、同様の特徴を示すイベントは他にも複数確認されている。他のイベントでは電波帯域を含む観測データを含むものもあり、これらのイベントに対して同様の解析が行われ、より厳密な制約が期待される。また、初期残光に対して、豊富な観測データが報告されている例は限られているのが現状である。今後、バースト検出後に迅速かつ広帯域観測が可能な次世代観測装置によって、初期残光の時間発展が豊富に取得されれば、より詳細な GRB 起源に関する理解が進展することが期待される。

本研究では、個々のイベントに対して独立にモデル比較を行ったが、今後は複数の GRB イベントと統計的に扱う、階層ベイズモデルの適用も有効かもしれない。これにより、母集団としてのジェット構造パラメータや環境密度分布の共通性・多様性を体系的に評価できる可能性がある。

以上の方向性は、GRB 初期残光の観測的・理論的研究を統合するものであり、個別イベントの解析から母集団的理解へと発展させる道筋を示すものである。本研究で得られた成果と解析基盤は、今後の高時間分解観測データや多波長観測の進展に応じて拡張可能であり、GRB の放射機構・ジェット構造・中心エンジン活動の統一的理解に向けて、重要な出発点となると考えられる。

付 録 A

A.1 GRB 残光の観測データ

GRB 080710 と XRF 080330 の残光の多波長同時観測データを検出した、La Silla 天文台の 2.2m MPI/ESO 望遠鏡に設置された GROND のフィルターの中心波長 λ_c と対応する周波数 ν_c を表にまとめた。なお、減光量 A_ν の列には、XRF 080330 の観測の際の減光量を記載している。

表 A.1: Opt. and IR data information

band	Telescope(filter)	λ_c [nm]	ν_c [Hz]	A_ν [mag]
g	GROND ¹	470	6.379×10^{14}	0.064
r	GROND ¹	620	4.835×10^{14}	0.047
i	GROND ¹	750	3.997×10^{14}	0.035
J	GROND ¹	1250	2.398×10^{14}	0.015
H	GROND ¹	1650	1.817×10^{14}	0.010
K	GROND ¹	2200	1.363×10^{14}	0.006

¹ https://www.mpe.mpg.de/~jcjg/GROND/grond_pasp.pdf

A.1.1 等級と光度

古代ギリシアの時代では人の目で最も明るく見える星を「1 等級」と呼び、最も暗く見える星を「6 等級」として天体の明るさを区別していた。しかし、それでは人によって尺度が変わってしまう。そこで、人の眼は指数関数的に明るさを感じるということから、単位面積あたり単位時間あたりの光のエネルギー（フラックス） F [erg cm⁻² s⁻¹] と等級 m には以下のような関係があるとした。

$$F(m) = Ae^{-\alpha m} \quad (\text{A.1})$$

ここで、 A と α は未知定数、 m が見かけの等級である。未知定数を決めるために、「1 等級は 6 等級に比べて 100 倍明るい」という法則を用いると、

$$\begin{aligned}
 \frac{F(m=1)}{F(m=6)} &= \frac{Ae^{-\alpha}}{Ae^{-6\alpha}} \\
 \frac{100}{1} &= e^{5\alpha} \\
 5\alpha &= 2 \log_e 10 \\
 \alpha &\sim 0.921
 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

であることがわかる。次に、自然対数ではなく常用対数での表式に変換する。

$$\begin{aligned} 10^{-\beta m} &= e^{-0.921m} \\ \beta &= -0.921 \log_{10} e \\ \beta &\sim -0.4 \end{aligned} \tag{A.3}$$

従って、フラックスと等級の関係は

$$F(m) = A \times 10^{-0.4m} \tag{A.4}$$

となる。両辺対数をとって、等級 m について解くと

$$\begin{aligned} \log_{10} F(m) &= \log_{10} A - 0.4m \\ m &= \frac{\log_{10} A}{0.4} - 2.5 \log_{10} F(m) \\ m &= \text{const.} - 2.5 \log_{10} F(m) \end{aligned} \tag{A.5}$$

となる。このようにすれば等級 m_1 と等級 m_2 のそれぞれのフラックスが F_1 、 F_2 である場合、以下のように相対的な明るさを定義できる。

$$m_2 - m_1 = 2.5 \log_{10} \left(\frac{F_1}{F_2} \right) \tag{A.6}$$

光源が等方的に単位時間あたり L [erg s⁻¹] の光のエネルギーを放出しているとする。これを「光度」と呼ぶ。輝度不変の原理より、光源の中心から距離 d だけ広げた球面にも同じ量のエネルギーが通過すると考えられるから、単位面積あたり単位時間あたりの光のエネルギー（フラックス） F [erg cm⁻² s⁻¹] と、以下の関係を満たすと考えられる。

$$L = 4\pi d^2 F \tag{A.7}$$

以上から、見かけの明るさ m と光度 L には

$$m = \text{const.} - 2.5 \log_{10} \left(\frac{L}{4\pi d^2} \right) \tag{A.8}$$

という関係が成り立つことがわかる。ここで、この見かけの明るさが m である光源を 10pc（パーセク）の距離に置いたときの見かけの明るさを「絶対等級 M 」と定義する。光源の本当の明るさ（光度）は置く場所に寄らず L [erg s⁻¹] なので、

$$M = \text{const.} - 2.5 \log_{10} \left(\frac{L}{4\pi (10 \text{ pc})^2} \right) \tag{A.9}$$

を満たす。式 (A.8) と式 (A.9) より、見かけの等級 m と絶対等級 M には以下の関係があることが導かれる。

$$M - m = 2.5 \log_{10} \left(\frac{10 \text{ pc}}{d} \right)^2 \tag{A.10}$$

$$m = M + 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10 \text{ pc}} \right) \tag{A.11}$$

$$m = M + 5 \log_{10}(d [\text{pc}]) - 5 \tag{A.12}$$

A.1.2 星間減光

ここでは『星間物質と星形成』(福井康雄 et al. 2024)に従い、星間減光の基本事項についてまとめる。実際に観測される光(電磁波)は光源を出発してから観測器に到達するまでの間に散乱や吸収を受けて減光する。これを「星間減光」という。波長 λ の電磁波の減光量を A_λ [mag]とする。減光量 A_λ の絶対量は星間空間の媒質によるため、直接求めることは難しいが、相対的な波長依存性は観測から求めることができる。距離 d にある光源の絶対等級(距離10pcでの見かけの等級)を $M(\lambda)$ とすると、星間減光を考慮した見かけの等級 $m(\lambda)$ は

$$m(\lambda) = M(\lambda) + 5 \log_{10}(d [\text{pc}]) - 5 + A_\lambda \quad (\text{A.13})$$

となる。ここで、同じスペクトル型で同じ絶対等級である星0と星1を用いることで、星間減光の波長依存性を導く。星0は距離 d_0 にあるが地球に十分近いので星間減光をほとんど受けていない。星1は距離 d にあり、減光量が A_λ であるとする。このとき、波長 λ で観測した二つの星の等級の差 $\delta m(\lambda)$ は以下のようになる、

$$\begin{aligned} \delta m(\lambda) &= m_1(\lambda) - m_0(\lambda) \\ &= 5 \log_{10}(d/d_0) + A_\lambda \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Vバンド(中心波長 $0.55 \mu\text{m}$)の波長での等級の差 $\delta m(V)$ に対するその波長 λ での等級の差 $\delta m(\lambda)$ 、すなわちVバンドの減光量に対する波長 λ の減光量を $E(\lambda - V)$ とおく。

$$E(\lambda - V) = \delta m(\lambda) - \delta m(V) = A_\lambda - A_V \quad (\text{A.15})$$

これは相対的な減光スペクトルであり「選択減光」とも呼ぶ。減光スペクトル $E(\lambda - V)$ をBバンド(中心長 $0.44 \mu\text{m}$)での等級の差 $E(B - V)$ で規格化した量 $E(\lambda - V)/E(B - V)$ が歴史的に用いられている。超波長の光は散乱されにくく吸収も少ないので、減光量は0に近づくと考えられる(超波長の赤い成分ほど生き残るため、「赤化」とも呼ばれる)。つまり、波長無限大の極限では $E(\lambda - V) \rightarrow -A_V$ となり。減光スペクトルの規格化された量 $-R_V$ は

$$-R_V = -\frac{A_V}{E(B - V)} \quad (\text{A.16})$$

となる。式(A.15)の両辺を A_V でわり、右辺に出てくる A_V を式(A.16)で消去すると

$$\begin{aligned} \frac{A_\lambda}{A_V} - 1 &= \frac{E(\lambda - V)}{A_V} \\ \frac{A_\lambda}{A_V} - 1 &= \frac{E(\lambda - V)}{R_V E(B - V)} \\ \frac{A_\lambda}{A_V} &= \frac{1}{R_V} \frac{E(\lambda - V)}{E(B - V)} + 1 \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

を得る。具体的に A_λ を求める場合には、対象星間空間での R_V と $E(B - V)$ あるいは A_V を測定値から与え、また $E(\lambda - V)$ の $1/\lambda$ 依存性を用いる。本研究では天の川銀河空間の吸収曲線として(Cardelli et al. 1989)のモデル

$$\left\langle \frac{A_\lambda}{A_V} \right\rangle = a(x) + \frac{b(x)}{R_V} \quad (\text{ただし } x = 1/\lambda) \quad (\text{A.18})$$

を用いて算出する (図A.1を参照)。ただし $a(x)$ と $b(x)$ の関数型は論文を参照のこと。(計算コード `ISextinc.py` を作成) また、天の川銀河では $R_\lambda \sim 3.1 \pm 0.2$ (参考：川端氏/広島大・シリーズ現代の天文学第6巻第6章 [第2版] など)、V バンドでの減光量は $A_V^{MW} = 0.205 \text{ mag}$ と見積もられている (Schlafly et al. 2011)。

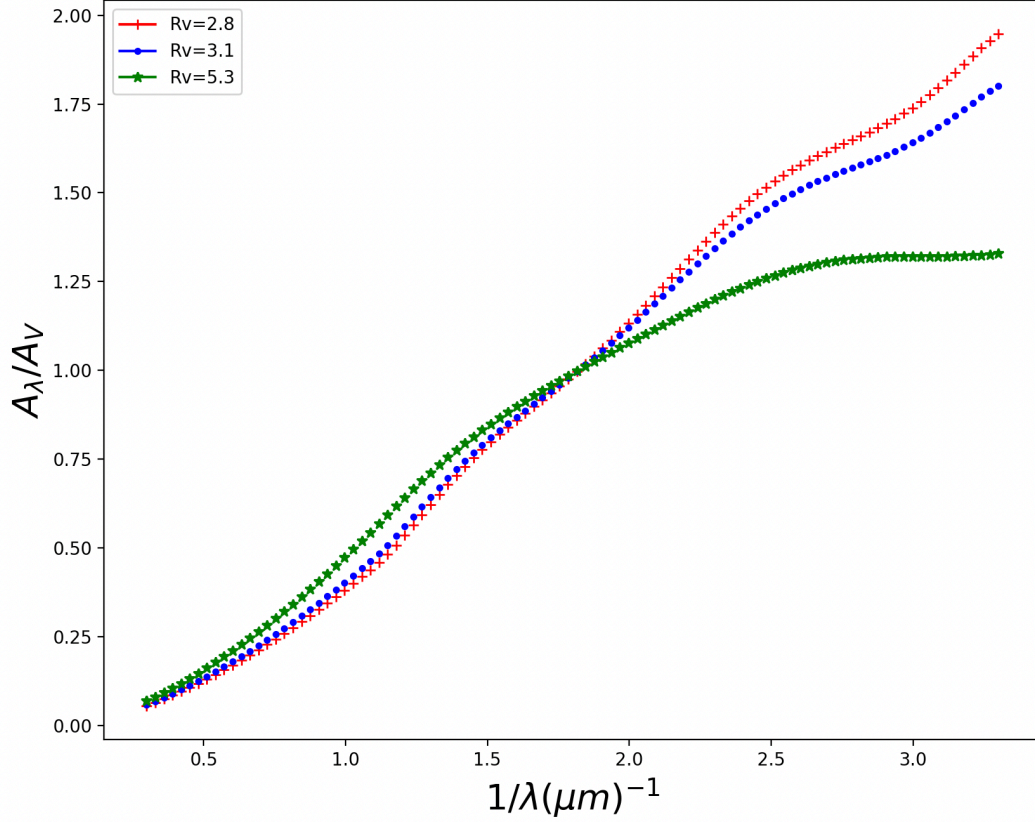


図 A.1: (Cardelli et al. 1989) のモデルを用いた減光曲線

A.1.3 AB 等級からフラックスへの変換

本研究では取得した可視光・赤外線観測データが、星間吸収補正前の AB Magnitude の量である場合、定義に従ってエネルギーフラックス $F_\nu [\text{Jy} = 10^{-23} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1}]$ の量に変換した。『新しい誤差論』(吉澤康和 1989) を参考に誤差伝播も考慮した変換方法についてここでまとめる。AB 等級 m_{AB} の定義は以下の通りである。

$$m_{\text{AB},\nu} = -2.5 \log_{10} \frac{F_\nu}{3631 \text{ Jy}} [\text{mag}] \quad (\text{A.19})$$

ただし、減光量 A_ν も明示的に書き下すと以下ようになる。

$$m_{\text{AB},\nu} - A_\nu = -2.5 \log_{10} \frac{F_\nu}{3631 \text{ Jy}} [\text{mag}] \quad (\text{A.20})$$

従って、エネルギーフラックス F_ν について解くと

$$F_\nu = 3.631 \times 10^{3-0.4(m_{\text{AB},\nu}-A_\nu)} [\text{Jy}] \quad (\text{A.21})$$

次に誤差エネルギーフラックスの誤差 ΔF_ν について考える。一般的に $Z = a10^{bX}$ で示される Z の絶対誤差 ΔZ は、 X の誤差 ΔX を用いて以下の式で近似される。

$$\begin{aligned}\Delta Z &= \left| \frac{dZ}{dX} \right| \Delta X \\ &= |a \cdot 10^{bX} \cdot b \ln(10)| \cdot \Delta X \\ &= Z |b \ln(10)| \cdot \Delta X\end{aligned}\tag{A.22}$$

従って今考えている場合で置き換えると、 F_ν の絶対誤差 ΔF_ν は以下

$$\Delta F_\nu = 3631 \times 10^{-0.4(m_{AB,\nu} - A_\nu)} \times 0.4 \ln(10) \Delta X\tag{A.23}$$

ここで ΔX は $m_{AB,\nu} + (-A_\nu)$ の誤差だから、

$$\Delta X = \sqrt{(\Delta m_{AB})^2 + (-\Delta A_\nu)^2}\tag{A.24}$$

である。なお実際の算出には自作した計算コード `MagtomJy.py` を使用した。

A.1.4 X 線データのフラックス密度への変換

Swift チームのウェブサイトから取得する X 線のデータは、各時刻でのとある帯域 (ν_1 から ν_2) のエネルギーフラックス $F(\nu_1 - \nu_2)$ [erg cm⁻² s⁻¹] である。これを、以下の手順でフラックス密度 f_ν [Jy = erg cm⁻² s⁻¹ Hz⁻¹] に変換した。フラックス密度 f_ν が定数 A と energy spectral index α を用いて、

$$f_\nu = A\nu^{-\alpha}\tag{A.25}$$

とかけるものとする。取得したエネルギーフラックスはフラックス密度 f_ν を用いて

$$\begin{aligned}F(\nu_1 - \nu_2) &= \int_{\nu_1}^{\nu_2} f_\nu d\nu \\ &= \int_{\nu_1}^{\nu_2} A\nu^{-\alpha} d\nu \\ &= \frac{A}{1-\alpha} (\nu_2^{1-\alpha} - \nu_1^{1-\alpha})\end{aligned}\tag{A.26}$$

とかける。従って、定数 A は

$$A = (1-\alpha) \frac{F(\nu_2 - \nu_1)}{\nu_2^{1-\alpha} - \nu_1^{1-\alpha}}\tag{A.27}$$

と書き下せる。以下の式で定義される photon index Γ は

$$N_\nu = \frac{f_\nu}{h\nu} \propto \nu^{-\Gamma}\tag{A.28}$$

となる。それぞれのイベントで観測 (XRT) により photon index Γ が求められているので、energy spectral index は $\alpha = \Gamma - 1$ を用いて算出される。なお実際の算出には自作した計算コード `XRTtomJy.py` を使用した。

A.1.5 フルエンス分布

フルエンス S とは単位面積を通過するエネルギー量であり、次元に $[\text{erg}/\text{cm}^2]$ を持ち、フラックス F は単位面積、単位時間あたりに通過するエネルギー量で、次元に $[\text{erg}/\text{cm}^2/\text{s}]$ を持つ。従って、両者の関係は

$$S = \int F dt \quad (\text{A.29})$$

となる。ここで、 t は観測された時間である。さらに、フラックス F と距離 R 離れた光源の本当の明るさ L $[\text{erg}/\text{s}]$ は $L = 4\pi R^2 F$ の関係にあるので、

$$S = \int \frac{L}{4\pi R^2} dt \quad (\text{A.30})$$

となる。

ここで、すべての天体が同一の等方的放射光度 L と持続時間を有し、かつユークリッド空間内に一様に分布していると仮定する。このとき、観測されるフルエンス S は光源までの距離 R に対して $S \propto R^{-2}$ に比例する。一方、距離 R 以内に存在する光源の個数 $N(< R)$ は体積に比例するため $N(< R) \propto R^3$ で与えられる。

従って、あるフルエンス S より大きいフルエンスを持つ事象の個数 $N(> S)$ は

$$N(> S) \propto R^3 \propto S^{-3/2} \quad (\text{A.31})$$

となり、これがいわゆる $\log N$ – $\log S$ 分布における $-3/2$ 則である。すなわち、 $N(> S) \propto S^{-3/2}$ という関係は、光源がユークリッド空間内に一様に分布し、かつ宇宙論的效果（宇宙の膨張、光度距離と赤方偏移の関係、時間遅延、スペクトルの k 補正など）が無視できる場合に成立する。

一方、観測されたフルエンス分布が $N(> S) \propto S^{-3/2}$ よりも緩やかな分布を示す場合、これは距離が大きくなるにつれてユークリッド近似が破綻し、光源が宇宙論的距離に分布していることを示唆する。具体的には、光度距離の増大、宇宙膨張による時間・エネルギーの赤方偏移、および観測帯域外への放射の移動などの効果により、遠方の事象ほど観測されるフルエンスが抑制されるためである。この結果として、明るい事象の個数に比べて暗い事象の増加が抑えられ、 $\log N$ – $\log S$ 分布は $-3/2$ 則からの乖離を示す。

A.2 GRB 発生起源の理論

GRB を引き起こす起源天体は、GRB を観測している時点で破壊されているため、その本体を直接観測することは極めて困難であると考えられる。従って、起源天体を知るためには、即時放射や残光の観測結果から、理論的に推測することが求められる。本節では GRB を引き起こし得る起源天体について考え、GRB の即時放射や残光放射にどのような足跡を残すかを考察する。なお、本章の記述については“THE PHYSICS OF GAMMA-RAY BURSTS” (Zhang 2019) や『ガンマ線バースト』(河合誠之 et al. 2019) を主に参考に行っている。

A.2.1 大質量星の重力崩壊 (コラプサー・シナリオ)

長時間 GRB を説明する最も有力なモデルは大質量星の重力崩壊 (コラプサー・シナリオ) である (MacFadyen et al. 1999; Paczyński 1998; Woosley 1993)。本節では主に『ガンマ線バースト』(河

合誠之 et al. 2019) や『天体高エネルギー現象』(高原文郎 2005)などを参考にして、大質量星の重力崩壊シナリオを概説する。

大質量星の重力崩壊シナリオは、太陽より重い星が重力崩壊したときに中心からジェットが生じ、星を貫いて GRB を起こす。重力崩壊の時間スケール、すなわち質量 M_0 で半径 R_0 の巨大星における自由落下する時間スケール t_{ff} を見積もる。半径 R_0 にいる質点のエネルギー保存則は

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{R_0} \quad (\text{A.32})$$

とかけると、

$$\int_0^{t_{\text{ff}}} dt = \int_0^{R_0} \left[2GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_0} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} dr \quad (\text{A.33})$$

と変形できる。 $r = R_0 \sin^2 \theta$ と変数変換し積分を実行すれば、質量 M_0 で半径 R_0 の巨大星 (コア密度 $\rho_0 \sim 3M_0/(4\pi R_0^3)$) における自由落下時間 t_{ff} は

$$t_{\text{ff}} = \sqrt{\frac{\pi^2 R_0^3}{8GM_0}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho_0}} \sim 210 \text{ s} \left(\frac{\rho_0}{100 \text{ g cm}^{-3}} \right)^{-1/2} \quad (\text{A.34})$$

となる。この時間スケールは、ちょうど長時間 GRB の継続時間と一致する。式からわかる通り、星の密度に応じてこの時間スケールは変更される。星の進化の末、水素の豊富な外層を強力な星風により失いヘリウムや炭素のコアが剥き出ししているような、大質量星 (ウォルフ-ライエ星) であれば、ジェットが相対論的速度のまま外層を突き抜けることができるため、最も有力な GRB の親星候補である。ウォルフ-ライエ星の光度が $L_W \sim 10^5 L_\odot$ 、温度が $T_W \sim 5 \times 10^4 \text{ K}$ の場合、Stefan-Boltzmann の式 $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$ から、 $R_W \sim 3.1 \times 10^{11} \text{ cm}$ と見積もれる。ただし、 $\sigma = 5.67 \times 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ deg}^{-4}$ は Stefan-Boltzmann 定数である。また、ウォルフ-ライエ星の質量が $M_W \sim 20 M_\odot$ とすれば、平均的な密度は $\rho_0 \sim 1 \text{ g cm}^{-3}$ となり、自由落下時間は $t_{\text{ff}} \sim 2 \times 10^3 \text{ s}$ と見積もれる。このように、親星の密度は $\rho \leq 10^6 \text{ g cm}^{-3}$ の範囲で $t_{\text{ff}} > 2 \text{ s}$ を達成することがわかる。一方で、コンパクト星の場合は自由落下時間が 2 秒より短くなるので、短時間 GRB の起源として有力な候補となる。例えば、白色矮星の典型的なコア密度は $\rho_0 \sim 10^7 \text{ g cm}^{-3}$ なので $t_{\text{ff}} \sim 0.7 \text{ s}$ 、中性子星の典型的なコア密度は $\rho_0 \sim 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ なので $t_{\text{ff}} \sim 10^{-5} \text{ s}$ 、となる。

大質量星の重力崩壊シナリオが長時間 GRB の最有力候補だとする決定的な証拠は、長時間 GRB に伴う超新星爆発の発見である (Lü et al. 2018; Woosley et al. 2006)。超新星爆発は重い星の重力崩壊により生じるものであり、最初に観測されたのは GRB 980425 に伴う超新星 SN 1998bw である (Hoeftich et al. 1998; Weiler et al. 2001)。その後も、GRB 030329 に伴う SN2003dh (Tiengo et al. 2003) や、GRB 130427A に伴う SN 2013cq (Melandri et al. 2014) など見つかった。また、長時間 GRB の発生場所が星形成率の高い銀河で多く見つかっていて、その中でも若くて重い星が多く生まれている領域での発生頻度が高いことも、このモデルが広く受け入れられている理由である。

A.2.2 恒星風

前節では、大質量星 (ウォルフ-ライエ星) が長時間 GRB の起源として有力視されていることを述べた。ウォルフ-ライエ星は、その大きな放射圧によって、水素の豊富な外層を失っていると考え

られている。40 $M_{\odot}$ 以上の質量を持つ大質量星では、そこから出る光によって星自身のガスが吹き飛ばされる効果が大きく、進化の途中で星の質量が大きく変わる。光のエネルギーがガス粒子に吸収されることで、吹き飛ばされる現象を恒星風と呼ぶ。ウォルフ-ライエ星の恒星風による質量放出率は $10^{-5} M_{\odot} \text{y}^{-1}$ を超えるほど大きく (野本憲一 et al. 2009)、ウォルフ-ライエ星の約6割が持つとされている伴星からの恒星風と衝突し、X線で輝いているものもある。

ここで、質量放出率 $\dot{M}$ 、星風速度 v_w が共に定常的な恒星風が影響する空間スケールの大きさを見積もる。この大きさは、恒星風が星間物質 (ISM) と衝突してどこまで広がれるかで決まるので、

$$\begin{aligned}\dot{M}\Delta t &= \frac{4}{3}\pi R^3 n_{\text{ISM}} m_p \\ \dot{M}\Delta t &= \frac{4}{3}\pi (v_w \Delta t)^3 n_{\text{ISM}} m_p \\ \therefore R = v_w \Delta t &= \sqrt{\frac{3\dot{M}}{4\pi v_w n_{\text{ISM}} m_p}}\end{aligned}\tag{A.35}$$

$$\sim 10^{18} \text{ cm} \left(\frac{\dot{M}}{10^{-5} M_{\odot} \text{y}^{-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{v_w}{10^8 \text{ cm s}^{-1}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{n_{\text{ISM}}}{1 \text{ cm}^{-3}} \right)^{\frac{1}{2}}\tag{A.36}$$

となる。ガンマ線バーストの残光放射が放たれる、中心エンジンからの距離は、おおよそ $R \sim 10^{16-17} \text{ cm}$ であるため、即時放射から残光放射にかけて放射体が運動する空間は親星の恒星風の影響を受けている可能性は十分にあると考えられる。また、定常的な恒星風が形成する外部媒質の粒子数密度分布は、親星から放出された単位時間あたりの質量 $\dot{M}$ と任意の半径 r の球面を通過する単位時間あたりの質量 $4\pi r^2 n(r) m_p v_w$ が等しいことより

$$n(r) = \frac{\dot{M}}{4\pi m_p v_w r^2} \propto r^{-2}\tag{A.37}$$

とかけることがわかる。

次に、外部媒質密度分布 $n(r) \propto r^{-k}$ を形成するような、非定常な場合の恒星風について考察する。親星中心からの距離 r から $r + dr$ の微小区間にある物質の質量は $4\pi m_p r^2 n(r) dr$ で、外部慣性系での微小時間 t から $t + dt$ の微小時間に親星から放出された物質の質量は $\dot{M}(t) dt$ だから、外部慣性系でのとある時刻 t 、距離 r における粒子数密度 $n(t, r)$ は

$$n(t, r) = \frac{\dot{M}(t_{\text{ret}})}{4\pi m_p r^2} \left| \frac{dt}{dr} \right| = \frac{\dot{M}(t_{\text{ret}})}{4\pi m_p v_w (t_{\text{ret}}) r^2}\tag{A.38}$$

とかける。ただし、 t は物質が放出される任意の時刻で、 r は親星中心からの任意の距離であることに注意する必要がある。

まず、星風の速度を一定 $v_w(t) = v_w$ の場合を考える。恒星風が吹き終える時刻、すなわち親星の崩壊時刻を $t = t_0$ とする。恒星風は $t < t_0$ の期間だけ吹いて、 $t \geq t_0$ では形成された密度分布が修正されないものとする。 $t_0 - t$ の期間で噴出物が到達する位置が r なので、一定速度 v_w を保って星風が広がったことを考えると

$$t_0 - t = \frac{r}{v_w}\tag{A.39}$$

が成り立つ。 $\dot{M}(t)$ は親星が放出する物質の時間依存性であり、仮に $\dot{M}(t) = \dot{M}_0 (t/t_0)^a$ とおいてみる。ただし、このとき $\dot{M}_0$ は崩壊直前最後の質量放出率を意味する。式 (A.39) を用いると、質量放

出率は

$$\dot{M}(t) = \dot{M}_0 \left(1 - \frac{r}{v_w t_0}\right)^a = \dot{M}_0 \left(1 - \frac{r}{r_b}\right)^a \quad (\text{A.40})$$

とかける。ただし、 $r_b = v_w t_0$ は一番最初に放出された物質が崩壊時刻までに到達する距離に相当し、(A.35) 式で考えた空間スケール R (wind bubble) に対応する。以上より、 $\dot{M}(t) \propto t^a$ に従うような質量放出率だった場合、形成される外部媒質の密度分布は

$$n(r) = \frac{\dot{M}_0}{4\pi m_p v_w} \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r}{r_b}\right)^a \quad (\text{A.41})$$

となる。 $a = 0$ の定常的な質量放出率の場合、 $n(r) \propto r^{-2}$ となり、式 (A.37) に帰着する。 $a > 0$ のとき、 $r \ll r_b$ の領域では $n(r) \propto r^{-2}$ に従うような分布を取り、 $r \leq r_b$ の領域で粒子数密度がより急激に減衰をするような構造をとる。以上より、 $\dot{M}(t) \propto t^a$ に従うような質量放出率では $n(r) \propto r^{-k}$ ($0 < k < 2$) のような緩やかな密度分布を形成しにくいと考えられる。

一方で、質量損失率の関数型を $\dot{M}(t) = A(t_0 - t)^a$ とおいてみる。 $t_0 - t$ は親星の崩壊までの残り時間 (寿命) であり、質量損失率が寿命の冪乗型関数に従うとするモデルである。このモデルのもとで形成される密度分布は

$$n(t_0, r) = \frac{A}{4\pi m_p v_w r^2} \left(t_0 - t_0 + \frac{r}{v_w}\right)^a \propto r^{-(2-a)} \quad (\text{A.42})$$

となることがわかる。したがって、 $n(r) \propto r^{-k}$ ($0 < k < 2$) を形成するためには、 $0 < a < 2$ という制限がつく。 $a > 0$ のとき、質量損失率は爆発直前にかけて弱まっていくモデルに対応し、緩やかな密度分布を形成することができる。例えば質量損失率が定常的 ($a = 0$) ならば、外部媒質密度分布が $n \propto r^{-2}$ に、質量損失率が時間が経つにつれて減少する (例えば $a = 1$) ならば、外部媒質密度分布は $n \propto r^{-1}$ となり定常風の時に比べて平坦化される。

次に、質量放出率を一定 $\dot{M}(t) = \dot{M}$ の場合を考える。 $v_w(t)$ は親星が放出する物質の速度の時間依存性であり、任意の時刻 t で放たれた物質自体は速度 $v_w(t)$ を維持して広がっていくことを考えると、

$$t_0 - t = \frac{r}{v_w(t)} \quad (\text{A.43})$$

は成り立つ。仮に $v_w(t) = B(t_0 - t)^b$ にしたがって、噴出することを考えてみる。パラメータ b は後から放出される物質の方が遅い、あるいは早いといった特徴を示すものである。すると、時刻 t に噴出された物質が、親星の崩壊までに移動できる距離は

$$r = v_w(t)(t_0 - t) = B(t_0 - t)^{b+1} \quad (\text{A.44})$$

となる。時間について解けば、

$$t = t_0 - \left(\frac{r}{B}\right)^{\frac{1}{b+1}} \quad (\text{A.45})$$

そうすると、時間微分は

$$\frac{dt}{dr} = \frac{-1}{B(b+1)} \left(\frac{r}{B}\right)^{-\frac{b}{b+1}} \quad (\text{A.46})$$

とかけるので、したがって、噴出物の速度の時間依存性が $v_w(t) = B(t_0 - t)^b$ である場合に形成される外部媒質密度分布 $n(r)$ は式 (A.38) より

$$n(r) = \frac{\dot{M}}{4\pi m_p r^2} \left| \frac{-1}{B(b+1)} \right| \left(\frac{r}{B} \right)^{-\frac{b}{b+1}} \propto r^{-\frac{2+3b}{1+b}} \quad (\text{A.47})$$

となる。したがって、 $n(r) \propto r^{-k}$ ($0 < k < 2$) を形成するためには、 $-2/3 < b < 0$ という制限がつく。 b が負であるという制限から、寿命が縮まるほど速度が速くなることに対応する。つまり、後から噴出する物質の方が早いので、先に噴出された物質に追いつく可能性がある。

続いて、ウォルフ-ライエ星などの恒星風としてよく用いられる速度分布、 β 則をもとに考察する。 β 法則は、CAK 理論 (Castor et al. 1975) の放射駆動風モデルから導かれた近似式であり、星風の加速が放射圧によって支配される場合に、次のように置くものである。

$$v(r) = v_0 \left(1 - \frac{R_{\text{WR}}}{r} \right)^\beta \quad (\text{A.48})$$

この関数系は $\beta > 0$ のとき $r > 0$ の範囲で増加関数であり、 $r \gg R_{\text{WR}}$ で $v \rightarrow v_0$ に漸近する。このモデルは中心エンジンから遠ければ遠いほど噴出物の速度が大きいことを示しているので、親星からの星風は爆発直前になればなるほど、噴出物の勢いが弱まる描像を意味する。 β は星風の勢いの変化を意味し、 $\beta = 0$ では一定 ($v(r) = v_0$)、 β が大きくなればなるほどゆっくり加速する風を意味する。噴出物の速度分布がこのような関数型のとき、粒子数密度は次のようになる。

$$n(r) = \frac{\dot{M}}{4\pi m_p v_0 r^2} \left(1 - \frac{R_{\text{WR}}}{r} \right)^{-\beta} \propto \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{R_{\text{WR}}}{r} \right)^{-\beta} \quad (\text{A.49})$$

つまり、 $r \gg R_{\text{WR}}$ の時には $n \propto r^{-2}$ に近い分布で、 $r \geq R_{\text{WR}}$ では密度が急激に大きくなる ($r \rightarrow R_{\text{WR}}$ で密度は発散)。なぜなら、質量放出率が定常である一方で、物質の速度はどんどん遅くなるため、親星近傍になればなるほど粒子数密度が増大する分布となるからである。したがって、 $n(r) \propto r^{-k}$ ($0 < k < 2$) の密度分布は形成されにくいことがわかる。

A.3 輻射輸送

強度

輻射輸送では光線によりエネルギーが移動することを考える。ここで、ある方向に向かう光線に垂直な領域 dA を考える、その光線の立体角 $d\Omega$ 内にある dA を通過するすべての光線が単位時間、単位周波数あたりに輸送するエネルギーは

$$dE = I_\nu dA dt d\Omega d\nu, \quad (\text{A.50})$$

で与えられるとする。ここで I_ν を「輻射強度 (specific intensity)」と呼ぶ。光線の強さを表す概念であり「比強度」と呼ぶこともある。輻射強度の次元は定義より以下である。

$$I_\nu = [\text{ergs s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ ster}^{-1} \text{ Hz}^{-1}]. \quad (\text{A.51})$$

したがって I_ν は位置と方向、周波数に依存する。また、輻射強度の立体角平均を「平均強度 (mean intensity)」と呼ぶ。

$$J_\nu = \int I_\nu \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (\text{A.52})$$

以上において、intensity は位相空間分布関数に対応する量である・実際、位相空間分布関数 f を用いて、intensity を次のように書き換えることができる。式 (A.50) より

$$\begin{aligned}
 I_\nu &= \frac{dE}{d\nu dt dA d\Omega} \\
 &= \frac{h\nu f dV p^2 d\Omega}{d\nu dt dA d\Omega} \\
 &= \frac{h\nu f c dt dA (h\nu/c)^2 d\Omega (h d\nu/c)}{d\nu dt dA d\Omega} \\
 &= \frac{h^4 \nu^4}{c^2} f
 \end{aligned} \tag{A.53}$$

intensity は衝突や反応がなければこれは流線に沿って保存する。一方で光線が物質中を通過する場合、放射や吸収によって輸送されるエネルギーは追加または減少が起こり、一般的には輻射強度は変動する。

放射

放射を扱うために、単位体積、単位立体角あたりの放出率「自然放射係数」 j_ν を導入する。

$$dE = j_\nu dV d\Omega dt d\nu. \tag{A.54}$$

自然放射係数の次元は:

$$j_\nu = [\text{erg cm}^{-3} \text{ ster}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1}]. \tag{A.55}$$

したがって、intensity I_ν が距離 ds 通過する中で放射が起こり、追加される分の intensity dI_ν は

$$dI_\nu = j_\nu ds, \tag{A.56}$$

と書ける。

吸収

吸収を扱うために、光線の通過する単位距離あたりの吸収係数（吸収度合い） $\alpha_\nu [\text{cm}^{-1}]$ を導入する。つまり、intensity I_ν が距離 ds 通過する中で吸収が起こり、減少する分の intensity dI_ν は

$$dI_\nu = -\alpha_\nu I_\nu ds, \tag{A.57}$$

と書ける。これは散乱の寄与も含む。つまり断面積が dA であるビーム（＝単一周波数の光線の集合）が通過する物質中の経路において、散乱断面積 σ_ν である吸収体が、単位体積あたり $n [\text{cm}^{-3}]$ で分布しているとする、ビームが距離 ds 進む間に、これらの吸収体によって吸収されたエネルギーは

$$\begin{aligned}
 -dI_\nu dA d\Omega dt d\nu &= I_\nu (n \sigma_\nu dA ds) d\Omega dt d\nu, \\
 dI_\nu &= -n \sigma_\nu I_\nu ds,
 \end{aligned} \tag{A.58}$$

と書ける。すなわち、

$$\alpha_\nu = n \sigma_\nu. \tag{A.59}$$

散乱

輻射輸送方程式

先にも述べたように、輻射輸送では光線によりエネルギーが移動することを考える。物質中を距離 ds 伝播する光線について、放射による intensity の追加と吸収による intensity の減少による輻射強度の変化分は

$$dI_\nu = j_\nu ds - \alpha_\nu I_\nu ds \quad (\text{A.60})$$

と書ける。したがって、輻射輸送方程式は次のようになる。

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu \quad (\text{A.61})$$

ここで、光線は時間変化しないこと（定常）を仮定した。この方程式は位相分布関数の時間発展方程式（ボルツマン方程式）と対応している。この輸送方程式は放射や吸収の影響がある物質中を伝播する光線の intensity について解くための形式を与えている。例えば、放射しか追加されない極限的な場合を考えると、この方程式の解は

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) + \int_{s_0}^s j_\nu(s') ds' \quad (\text{A.62})$$

となり、明るさの増加は放射係数を視線方向に積分したものであると得られる。また、吸収しか起こらない極限的な場合を考えれば、この方程式の解は

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) \exp \left[- \int_{s_0}^s \alpha_\nu(s') ds' \right] \quad (\text{A.63})$$

で与えられ、明るさの減少は吸収係数の視線方向についての積分で落ちる、指数関数的振る舞いになることがわかる。

A.3.1 光学的距離と源泉関数

光線が相互作用せずに真っ直ぐ飛んできたのか、あるいは途中で散乱または吸収されながら届いたのかを意味する量として、「光学的距離（optical depth）」を定義する。

$$\tau_\nu = \int_{s_0}^s \alpha_\nu(s') ds'. \quad (\text{A.64})$$

微小光学的距離は $d\tau_\nu = \alpha_\nu ds$ である。これを用いて輻射輸送方程式を書き直すと

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu, \quad S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{\alpha_\nu}, \quad (\text{A.65})$$

となる。ここで、 S_ν は源泉関数（source function）と呼ばれる。平衡状態（ $dI_\nu/d\tau_\nu = 0$ ）では $I_\nu = S_\nu$ となり、通過する物質の状態のみで決まる。

平均自由行程

吸収されずに吸収体をすり抜けることができる平均的な距離を「平均自由行程 (mean free path)」といい、次のように定義される。

$$\langle \tau_\nu \rangle \equiv \int_0^\infty \tau_\nu e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu = 1. \quad (\text{A.66})$$

均一媒質で平均的に進める物理的距離を平均自由距離 l_ν と定義 ($\langle \tau_\nu \rangle = \alpha_\nu l_\nu = 1$) する。すなわち、

$$l_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{1}{n\sigma_\nu}. \quad (\text{A.67})$$

が成り立つ。

A.3.2 アインシュタイン係数

まず、アインシュタイン係数を定義する。二準位間での Bound-bound 遷移を考える。エネルギーの低い方を準位 1、高い方を準位 2 とし、それぞれの状態での統計的重率を g_1 、 g_2 とする。また、それぞれの順位にある原子の数密度を n_1 、 n_2 とする。

自発放射

自然発生的に高い準位から低い準位に単位時間あたりに遷移する確率を A_{21} と書き、これを「アインシュタインの A 係数」と呼ぶ。従って単位時間、単位体積あたりの粒子の遷移数は

$$n_2 A_{21} \text{ [cm}^{-3} \text{ s}^{-1}] \quad (\text{A.68})$$

と書ける。また、単位時間、単位体積、単位立体角のエネルギー放出率は

$$n_2 j_\nu = n_2 A_{21} \frac{h\nu}{4\pi} \text{ [erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \text{ ster}^{-1} \text{ Hz}^{-1}] \quad (\text{A.69})$$

となる。ここで注意したいのが、 j_ν とは放射源を担う粒子 1 つに対する、単位時間、単位体積あたり、単位立体角あたりのエネルギーの放出率である。一方で、 n_2 というのは放射源となり得る粒子の単位体積あたりの個数 (数密度) を意味している。つまり、量 (A.68) の単位で示した、 $[\text{cm}^{-3}]$ と式 (A.69) の単位に示した、 $[\text{cm}^{-3}]$ は意味が異なる。式 (A.69) の意味は、単位体積あたり n_2 個の粒子が単位時間、単位体積あたり、単位立体角あたりに放出するエネルギーである。

吸収

intensity I_ν の光を吸収して、低い準位から高い準位に単位時間あたりに遷移する確率を $B_{21}I_\nu$ と書き、 B_{21} を「アインシュタインの B 係数」と呼ぶ。従って、単位時間、単位体積あたりの粒子の遷移数は

$$n_1 B_{12} I_\nu \quad (\text{A.70})$$

と書ける。また、単位時間、単位体積、単位立体角のエネルギー吸収率は

$$\alpha_\nu I_\nu = n_1 B_{12} I_\nu \frac{h\nu}{4\pi} \quad (\text{A.71})$$

となる。

誘導放射：simulated emission

二準位間のエネルギー差 $h\nu$ と同じエネルギーを持つ光子の存在に誘発されて、高い準位から低い準位に単位時間あたりに遷移する確率を $B_{12}I_\nu$ と書き、 B_{12} を「もう一つのアインシュタインの B 係数」と呼ぶ。従って、単位時間あたりの粒子の遷移数は

$$n_2 B_{21} I_\nu \quad (\text{A.72})$$

と書ける。また、単位時間、単位体積、単位立体角のエネルギー吸収率は

$$\alpha_\nu I_\nu = n_2 B_{21} I_\nu \frac{h\nu}{4\pi} \quad (\text{A.73})$$

となる。

アインシュタイン関係式

熱平衡状態では、準位間の遷移数が釣り合っているべきなので、

$$n_1 B_{12} I_\nu = n_2 A_{21} + n_2 B_{21} I_\nu \quad (\text{A.74})$$

という関係が成立する。 I_ν について解くと、

$$\begin{aligned} (n_1 B_{12} - n_2 B_{21}) I_\nu &= n_2 A_{21} \\ I_\nu &= \frac{n_2 A_{21}}{n_1 B_{12} - n_2 B_{21}} \\ &= \frac{A_{21}/B_{21}}{(n_1/n_2)(B_{12}/B_{21}) - 1} \end{aligned} \quad (\text{A.75})$$

と書き表すことができる。熱平衡状態では n_1 と n_2 には Boltzmann 関係が成り立つので、高い方の準位は低い方の準位 (E) に対して $h\nu$ だけ大きいことに注意して、

$$\begin{aligned} \frac{n_1}{n_2} &= \frac{g_1 \exp[-E/(kT)]}{g_2 \exp[-(E + h\nu)/(kT)]} \\ &= \frac{g_1}{g_2} \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.76})$$

と書ける。従って、 I_ν は

$$I_\nu = \frac{A_{21}/B_{21}}{((g_1 B_{12})/(g_2 B_{21})) \exp[-(h\nu)/(kT)] - 1} \quad (\text{A.77})$$

と書き直せる。一方、熱平衡状態では I_ν とプランク関数 B_ν は等しいので

$$B_\nu(T) = \frac{(2h\nu^3)/c^2}{\exp(-(h\nu)/(kT)) - 1} \quad (\text{A.78})$$

と係数を比較することで、以下の「アインシュタイン関係式 (Einstein relations)」を得る。

$$A_{21} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{21} \quad (\text{A.79})$$

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21} \quad (\text{A.80})$$

この関係式は、温度に依存しない原子間の性質を表すものであるなので、熱平衡であるかないかに関わらず成り立つ。

A.4 シンクロトロン自己吸収

シンクロトロン放射を出すガス自身がシンクロトロン放射の光子を吸収する状況を考え、放射スペクトルを求める。ここでは簡単のため、放射・吸収は等方的で、磁場の方向はランダムとする。また、電子の分布も等方的であるとする。

吸収係数

まず二準位間を遷移する場合を考えると、吸収係数 α_ν は (準位 1 にいる電子が $h\nu$ の光子を吸収して準位 2 に遷移する分) - (準位 2 にいる電子が $h\nu$ の光子を吸収して準位 1 に遷移する分) の電子によって吸収が起こるので、式 (A.71) と式 (A.73) より

$$\begin{aligned}\alpha_\nu &= n_1 B_{12} \frac{h\nu}{4\pi} \phi(\nu) - n_2 B_{21} \frac{h\nu}{4\pi} \phi(\nu) \\ &= \frac{h\nu}{4\pi} (n_1 B_{12} - n_2 B_{21}) \phi(\nu)\end{aligned}\quad (\text{A.81})$$

である。ここで $\phi(\nu)$ は line profile function である。line profile function とは $h\nu$ の光子を吸収することを考えているものの、実際にはその振動数に広がりがある。その分布を与えるのが line profile function $\phi(\nu)$ である。

今、電子はシンクロトロン放射を出すような自由電子の集団を考えているので、準位 1 と準位 2 という決まったエネルギー準位があるのではなく、様々なエネルギーをとり得る。したがって、吸収係数は

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} \sum_{E_1} \sum_{E_2} (n(E_1) B_{12} - n(E_2) B_{21}) \phi(\nu) \quad (\text{A.82})$$

と書く。ただし、 $h\nu$ の光子を吸収することを考えているので $E_1 = E_2 - h\nu$ である。

また、今考えているのは「自己吸収」なので、吸収する $h\nu$ の光子とは E_2 のエネルギーをもつ電子の自発放射と考える。エネルギー E_2 の単一電子による単位振動数あたりの放射パワー ($\text{ergs s}^{-1} \text{ cm}^{-3} \text{ Hz}^{-1}$) は式 (A.69) より

$$\begin{aligned}P_e(\nu, E_2) &= 4\pi j_\nu \\ &= \sum_{E_1} A_{21} h\nu \phi(\nu)\end{aligned}\quad (\text{A.83})$$

と書ける。アインシュタイン関係式 (A.79) を用いて書き換えると、

$$P_e(\nu, E_2) = \frac{2h^2\nu^4}{c^2} \sum_{E_1} B_{21} \phi(\nu). \quad (\text{A.84})$$

自由電子であるので、統計的住りつは 2 つのエネルギー準位で等しいと考えて、 $g_1 = g_2$ の場合の式 (A.80) と、式 (A.84) より、自己吸収の場合の吸収係数 α_ν を $P_e(\nu, E_2)$ と $n(E_2)$ で書き直すと

$$\begin{aligned}\alpha_\nu &= \frac{h\nu}{4\pi} \sum_{E_1} \sum_{E_2} (n(E_2 - h\nu) B_{21} - n(E_2) B_{21}) \phi(\nu) \\ &= \frac{h\nu}{4\pi} \sum_{E_2} (n(E_2 - h\nu) - n(E_2)) \sum_{E_1} B_{21} \phi(\nu) \\ &= \frac{c^2}{8\pi h\nu^3} \sum_{E_2} (n(E_2 - h\nu) - n(E_2)) P_e(\nu, E_2)\end{aligned}\quad (\text{A.85})$$

となる。ただし、 $E_1 = E_2 - h\nu$ であることを用いた。同じエネルギー E_2 を持つ電子であっても、運動量の向きが異なることがある。なので、この和は運動量で行う方が正しい。そこで、 $E_2 = p_2 c$ によって運動量 p を使った式に変形する。運動量空間での電子の分布関数は $f(\vec{p}_2)$ とすると、(A.85) 式は

$$\alpha_\nu = \frac{c^2}{8\pi h\nu^3} \int d^3 p_2 (f(\vec{p}_2^*) - f(\vec{p}_2)) P_e(\nu, \vec{p}_2) \quad (\text{A.86})$$

と書き換えられる。

電子のエネルギー分布が $N(E)$ の時、次の関係式が成り立つ。

$$N(E)dE = f(p)4\pi p^2 dp \quad (\text{A.87})$$

また、

$$\begin{aligned} d^3 p &= dp_x dp_y dp_z \\ &= p^2 \sin \theta dp d\theta d\phi \\ &= \left(\frac{E}{c}\right)^2 \sin \theta \frac{dE}{c} d\theta d\phi \\ &= \frac{4\pi E^2}{c^3} dE \end{aligned} \quad (\text{A.88})$$

なので、式 (A.86) は

$$\begin{aligned} \alpha_\nu &= \frac{c^2}{8\pi h\nu^3} \int_0^\infty \left(\frac{4\pi E^2}{c^3} dE\right) \left(\frac{N(E-h\nu)d(E-h\nu)}{4\pi p^{*2} dp^*} - \frac{N(E)dE}{4\pi p^2 dp}\right) P_e(\nu, E) \\ &= \frac{1}{8\pi h\nu^3} \int_0^\infty dE E^2 \left(\frac{N(E-h\nu)d(E-h\nu)}{((E-h\nu)^2/c^2)d(E-h\nu)} - \frac{N(E)dE}{(E^2/c^2)dE}\right) P_e(\nu, E) \\ &= \frac{c^2}{8\pi h\nu^3} \int_0^\infty dE E^2 \left(\frac{N(E-h\nu)}{(E-h\nu)^2} - \frac{N(E)}{E^2}\right) P_e(\nu, E) \end{aligned} \quad (\text{A.89})$$

となる。ただし、ここで添字の 2 は省略した。ここで右辺を $E \gg h\nu$ とした時のテイラー展開すると

$$\begin{aligned} \alpha_\nu &= \frac{c^2}{8\pi h\nu^3} \int_0^\infty dE E^2 \left(\frac{N(E)}{E^2} + \frac{\partial}{\partial E} \left[\frac{N(E)}{E^2}\right] (-h\nu) - \frac{N(E)}{E^2}\right) P_e(\nu, E) \\ &= -\frac{c^2}{8\pi \nu^2} \int_0^\infty dE P_e(\nu, E) E^2 \frac{\partial}{\partial E} \left[\frac{N(E)}{E^2}\right] \end{aligned} \quad (\text{A.90})$$

となる。具体的に電子のエネルギー分布を与えて計算する。ここでは、 $N(E)dE = N_0 E^{-p} dE$ のような冪乗分布を仮定すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial E} \left[\frac{N(E)}{E^2}\right] &= \frac{\partial}{\partial E} (N_0 E^{-p-2}) \\ &= -N_0 (p+2) E^{-(p+3)} \\ &= -(p+2) \frac{N(E)}{E^3} \end{aligned} \quad (\text{A.91})$$

なので、式 (A.90) は

$$\alpha_\nu = \frac{c^2}{8\pi\nu^2}(p+2) \int_0^\infty dE P_e(\nu, E) \frac{N(E)}{E} \quad (\text{A.92})$$

とかける。また、 $E = \sqrt{m_e^2 c^4 + p^2 c^2} = \gamma m_e c^2$ より、 $dE = m_e c^2 d\gamma$ だから、 E から電子のローレンツ因子 γ に変数変換すると、

$$\begin{aligned} \alpha_\nu &= \frac{c^2(p+2)}{8\pi\nu^2} \int_{\gamma_m}^{\gamma_M} m_e c^2 d\gamma P_e(\nu, \gamma) \frac{N_0(\gamma m_e c^2)^{-p}}{\gamma m_e c^2} \\ &= \frac{c^2(p+2)N_0}{8\pi\nu^2(m_e c^2)^p} \int_{\gamma_m}^{\gamma_M} d\gamma \gamma^{-(p+1)} P_e(\nu, \gamma) \end{aligned} \quad (\text{A.93})$$

さらに、放射メカニズムをシンクロトロン放射と仮定して吸収係数を書き下す。電子一個からの放射パワーは

$$P_e(\nu) = \frac{\sqrt{3}e^3 B}{m_e c^2} F(\chi_0) \quad (\text{A.94})$$

とかけた。ただし

$$F(\chi_0) = \chi_0 \int_{\chi_0}^\infty K_{5/3}(\chi) d\chi \quad (\text{A.95})$$

$$\chi_0 \equiv \frac{2m_e c \omega}{3eB} \gamma^{-2} = \frac{4\pi m_e c \nu}{3eB} \gamma^{-2} = \frac{\nu}{\min(\nu_m, \nu_c)} \quad (\text{A.96})$$

である。シンクロトロン放射の場合の吸収係数 α_ν は式 (A.93) より

$$\begin{aligned} \alpha_\nu &= \frac{c^2(p+2)N_0}{8\pi\nu^2(m_e c^2)^p} \int_{\gamma_m}^{\gamma_M} d\gamma \gamma^{-(p+1)} \frac{\sqrt{3}e^3 B}{m_e c^2} F(\chi_0) \\ &= \frac{\sqrt{3}N_0 c^2 e^3 B(p+2)}{8\pi\nu^2(m_e c^2)^{p+1}} \int_0^\infty \gamma^{-(p+1)} F(\chi_0) d\gamma \end{aligned} \quad (\text{A.97})$$

と書き表せる。ところで $F(\chi_0)$ は

$$\begin{aligned} F(\chi_0) &\sim \begin{cases} \frac{4\pi}{\sqrt{3}\Gamma(1/3)} \left(\frac{\chi_0}{2}\right)^{1/3} & (\text{if } \chi_0 < 1), \\ \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} e^{-\chi_0} \chi_0^{-1/2} & (\text{if } \chi_0 > 1). \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{4\pi}{\sqrt{3}\Gamma(1/3)2^{1/3}} \left(\frac{4\pi m_e c \nu}{3eB}\right)^{1/3} \gamma_e^{-2/3} & (\text{if } \nu < \min(\nu_m, \nu_c)), \\ \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} e^{-\chi_0} \chi_0^{-1/2} & (\text{if } \nu > \min(\nu_m, \nu_c)). \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.98})$$

と近似することができる。従って $\nu < \min(\nu_m, \nu_c)$ の場合、吸収係数 α_ν は式 (A.97) より

$$\begin{aligned} \alpha_\nu &= \frac{\sqrt{3}N_0 c^2 e^3 B(p+2)}{8\pi\nu^2(m_e c^2)^{p+1}} \int_{\gamma_m}^{\gamma_M} \gamma_e^{-(p+1)} \frac{4\pi}{\sqrt{3}\Gamma(1/3)2^{1/3}} \left(\frac{4\pi m_e c \nu}{3eB}\right)^{1/3} \gamma_e^{-2/3} d\gamma_e \\ &= \frac{1}{2\Gamma(1/3)} \frac{p+2}{-(p+2/3)} \frac{c^2 e^3 N_0 B}{(m_e c^2)^{p+1}} \left(\frac{2\pi m_e c}{3eB}\right)^{1/3} \nu^{-5/3} \left[\gamma_e^{-(p+\frac{2}{3})} \right]_{\gamma_m}^{\gamma_M} \\ &\sim \frac{1}{2\Gamma(1/3)} \frac{p+2}{p+2/3} \frac{c^2 e^3 N_0 B}{(m_e c^2)^{p+1}} \left(\frac{2\pi m_e c}{3eB}\right)^{1/3} \nu^{-\frac{5}{3}} \gamma_m^{-(p+\frac{2}{3})} \end{aligned} \quad (\text{A.99})$$

とかける。一方、 $\nu > \min(\nu_m, \nu_c)$ の場合は、式 (A.98) を用いて計算するのは困難なので、 χ_0 に変換して計算を進める。(A.94) 式を用いて γ を χ_0 で変数変換すると、

$$\gamma = \left(\frac{4\pi m_e c \nu}{3eB} \right)^{1/2} \chi_0^{-1/2} \Rightarrow d\gamma = \left(\frac{4\pi m_e c \nu}{3eB} \right)^{1/2} \left(-\frac{1}{2} \right) \chi^{-3/2} d\chi_0 \quad (\text{A.100})$$

なので、

$$\begin{aligned} \alpha_\nu &= \frac{\sqrt{3} N_0 c^2 e^3 B (p+2)}{8\pi \nu^2 (m_e c^2)^{p+1}} \int_0^\infty \left(\frac{4\pi m_e c \nu}{3eB} \right)^{-(p+1)/2} \chi^{(p+1)/2} F(\chi_0) \frac{-1}{2} \left(\frac{4\pi m_e c \nu}{3eB} \right)^{1/2} \chi_0^{-3/2} d\chi_0 \\ &= \frac{\sqrt{3} N_0 c^2 e^3 B (p+2)}{16\pi \nu^2 (m_e c^2)^{p+1}} \left(\frac{4\pi m_e c \nu}{3eB} \right)^{-p/2} \int_0^\infty \chi_0^{(p-2)/2} F(\chi_0) d\chi_0 \end{aligned} \quad (\text{A.101})$$

となる。この積分はガンマ関数を用いた下記の公式を用いて計算できる。

$$\int_0^\infty x^\mu F(x) dx = \frac{2^{\mu+1}}{\mu+2} \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{7}{3}\right) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{2}{3}\right). \quad (\text{A.102})$$

従って、シンクロトロン放射の自己吸収における吸収係数は

$$\begin{aligned} \alpha_\nu &= \frac{\sqrt{3} N_0 c^2 e^3 B (p+2)}{16\pi \nu^2 (m_e c^2)^{p+1}} \left(\frac{4\pi m_e c \nu}{3eB} \right)^{-\frac{p}{2}} \frac{2^{\frac{p-2}{2}+1}}{\frac{p-2}{2}+2} \Gamma\left(\frac{p-2}{4} + \frac{7}{3}\right) \Gamma\left(\frac{p-2}{4} + \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3} N_0 c^2 e^3 B (p+2)}{16\pi \nu^2 (m_e c^2)^{p+1}} \left(\frac{3eB}{4\pi m_e c \nu} \right)^{\frac{p}{2}} \frac{2^{\frac{p}{2}} \times 2}{p+2} \Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3} N_0 e^3}{8\pi m_e} \left(\frac{3e}{2\pi m_e^3 c^5} \right)^{\frac{p}{2}} B^{\frac{p+2}{2}} \nu^{-\frac{p+4}{2}} \Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.103})$$

となる。ところで、ここまでは放射を担う電子のエネルギー分布はエネルギーの積分領域全体で一定の power-law (single power-law) を仮定した。上記をまとめると、シンクロトロン放射を仮定した場合の吸収係数は

$$\alpha_\nu = \begin{cases} \frac{1}{2\Gamma(1/3)} \frac{p+2}{p+2/3} \frac{c^2 e^3 N_0 B}{(m_e c^2)^{p+1}} \left(\frac{2\pi m_e c}{3eB} \right)^{1/3} \nu^{-\frac{5}{3}} \gamma_m^{-(p+\frac{2}{3})} & (\nu < \min(\nu_m, \nu_c)), \\ \frac{\sqrt{3} N_0 e^3}{8\pi m_e} \left(\frac{3e}{2\pi m_e^3 c^5} \right)^{\frac{p}{2}} B^{\frac{p+2}{2}} \nu^{-\frac{p+4}{2}} \Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right) & (\min(\nu_m, \nu_c) < \nu). \end{cases} \quad (\text{A.104})$$

$$\propto \begin{cases} \nu^{-\frac{5}{3}} & (\nu < \min(\nu_m, \nu_c)), \\ \nu^{-\frac{p+4}{2}} & (\min(\nu_m, \nu_c) < \nu). \end{cases} \quad (\text{A.105})$$

と書き下せる。

源泉関数

つぎに源泉関数を書き下し、シンクロトロン放射のスペクトルがシンクロトロン自己吸収により、どのようなスペクトルになるかを導く。

$$\begin{aligned}
 S_\nu &= \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} = \frac{P(\nu)}{4\pi\alpha_\nu} \\
 &\propto \begin{cases} \nu^{\frac{1}{3}} \nu^{\frac{5}{3}} & (\nu < \min(\nu_m, \nu_c)), \\ \nu^{-\frac{p-1}{2}} \nu^{\frac{p+4}{2}} & (\nu > \min(\nu_m, \nu_c)) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \nu^2 & (\nu < \min(\nu_m, \nu_c)), \\ \nu^{\frac{5}{2}} & (\nu > \min(\nu_m, \nu_c)) \end{cases} \quad (A.106)
 \end{aligned}$$

とかける。ところで、optical thick である条件は $(\tau_\nu \geq 1)$ であるから、

$$\tau_\nu = \int_{s_0}^s \alpha_\nu(s') ds' \geq 1 \quad (A.107)$$

を満たすときに、式 (A.106) が成立する。つまり、 $\tau_\nu \sim 1$ となる時の振動数を ν_a とすると、

$$S_\nu \propto \begin{cases} \nu^2 & (\nu < \nu_a < \min(\nu_m, \nu_c)), \\ \nu^{\frac{5}{2}} & (\min(\nu_m, \nu_c) < \nu < \nu_a) \end{cases} \quad (A.108)$$

であるので、スペクトルの概形は以下ようになる。

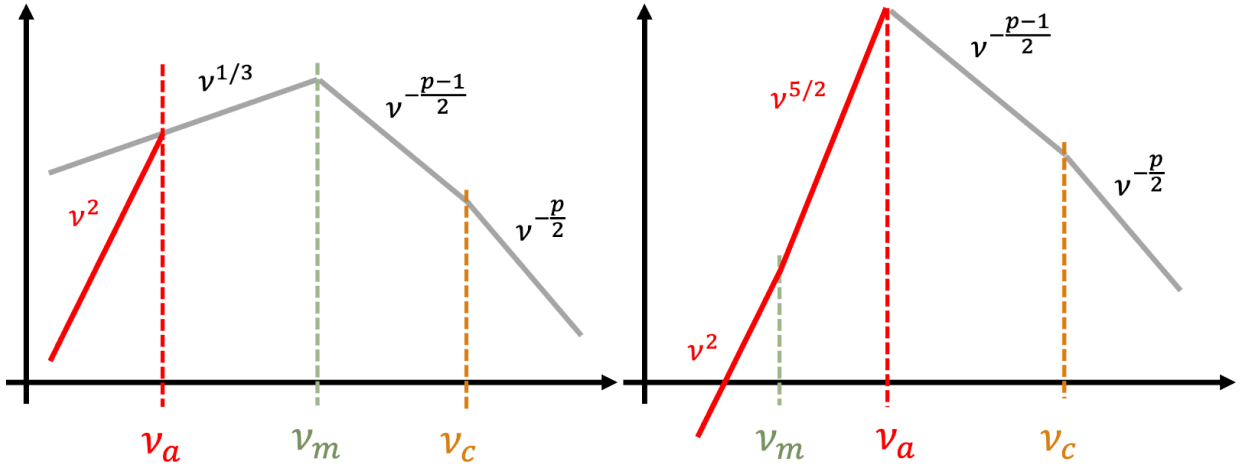


図 A.2: slow cooling ($\nu_m < \nu_c$) の場合のスペクトル

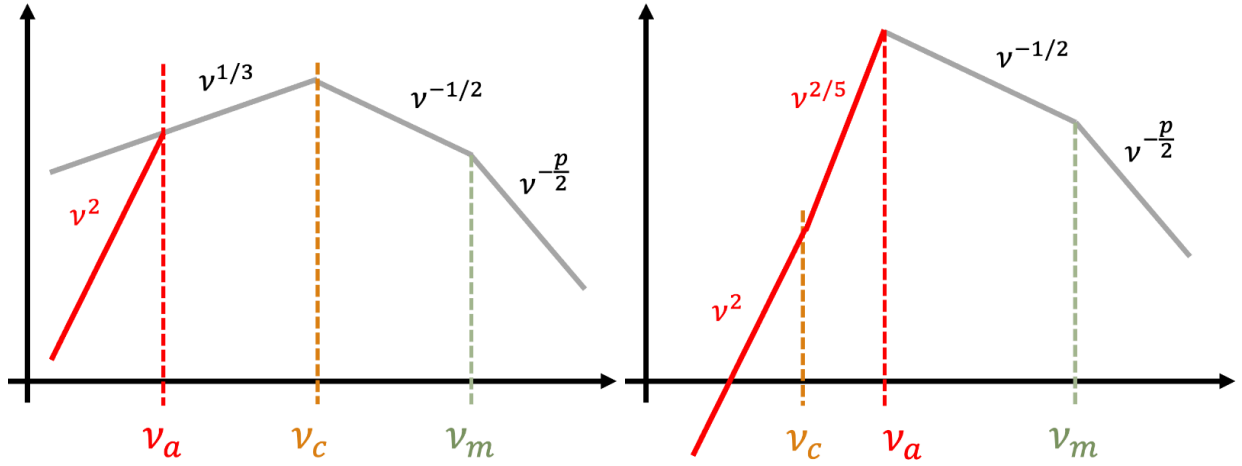


図 A.3: fast cooling ($\nu_c < \nu_m$) の場合のスペクトル

ここから、さらに外部衝撃波により加速された電子がシンクロトロン放射する場合での、SSA を考える。 $\tau_\nu \sim 1$ となる時の振動数 ν_a の時間発展を書き下す。(Gao et al. 2013) によれば、 ν_a の定義の仕方には $\tau_\nu \sim 1$ の他にもう一つあり、それはシンクロトロン放射のフラックスと黒体放射のフラックスを等しくする振動数とすることである。こちらの方が簡便であり、それぞれの定義のもとで算出される ν_a は2倍以内の違いに収まることが証明されている。ここでは、簡便な方法であるシンクロトロン放射のフラックスと黒体放射のフラックスが等しくなる時の振動数と捉えて書き下してみることにする。

$$I_\nu^{\text{syn}}(\nu_a) = I_\nu^{\text{bb}}(\nu_a) \sim 2kT \frac{\nu_a'^2}{c^2} \quad (\text{A.109})$$

ここで、黒体放射の温度は

$$kT = \max[\gamma'_a, \min(\gamma'_c, \gamma'_m)] m_e c^2 \quad (\text{A.110})$$

でかける。 γ_a は ν_a のシンクロトロン放射に対応する電子のローレンツ因子であり、

$$\gamma'_a = \sqrt{\frac{2\pi m_e c \nu'_a}{eB'}} \quad (\text{A.111})$$

である。シンクロトロン放射の輻射強度は

$$\begin{aligned} dI_\nu^{\text{syn}}(\nu'_a) &= \eta_{\nu'_a}^{\text{syn}} ds' \\ I_\nu^{\text{syn}}(\nu'_a) &= \int \eta_{\nu'_a}^{\text{syn}} ds' \sim \eta_{\nu'_a}^{\text{syn}} \Delta R' \\ I_\nu^{\text{syn}}(\nu'_a) &\sim \frac{\rho' j_{\nu'_a}^{\text{syn}}}{4\pi} \Delta R' \end{aligned} \quad (\text{A.112})$$

ここで、 $\Delta R'$ は放射領域の comoving 系での放射領域の大きさ、つまり外部衝撃波下流の領域の厚さであり $\Delta R' \sim R/\Gamma$ である。ただし、 R や Γ は衝撃波上流静止系 (CE 系、または lab 系) での、

爆風の爆発中心からの半径とローレンツ因子である。また、 ρ' は comoving 系での放射領域内での放射を担う粒子の数密度であり、

$$\begin{aligned}\rho' &= \frac{N_e}{V'} \\ &\sim \frac{4}{3}\pi R^3 f_e n_0 \frac{1}{4\pi R^2 \Delta R'} \\ &= \frac{f_e n_0 R}{3\Delta R'}\end{aligned}\tag{A.113}$$

である。次に、全方位への放射係数 $j_{\nu'_a}^{\text{syn}}$ を考える。 $\max[\gamma'_a, \min(\gamma'_c, \gamma'_m)] = \gamma'_m$ すなわち、slow cooling の時、図A.2の左側の分布になっているはずなので、

$$\begin{aligned}j_{\nu'_a}^{\text{syn}} &= P'_{\nu, \max} \left(\frac{\nu'_a}{\nu'_m} \right)^{1/3} \\ &= \frac{1}{3e} m_e c^2 \sigma_T B' \nu_a'^{1/3} \left(\frac{e B'}{2\pi m_e c} \gamma_m'^2 \right)^{-1/3} \\ &= \frac{m_e c^2 \sigma_T}{3e} \left(\frac{2\pi m_e c}{e} \right)^{1/3} \gamma_m'^{-2/3} B'^{2/3} \nu_a'^{1/3}\end{aligned}\tag{A.114}$$

である。以上から、式 (A.109) に各項代入して、 ν'_a について解くと

$$\begin{aligned}2\gamma'_m m_e \nu_a'^2 &\sim \frac{j_{\nu'_a}^{\text{syn}}}{4\pi} \rho' \Delta R' \\ 2\gamma'_m m_e \nu_a'^2 &\sim \frac{m_e c^2 \sigma_T}{12\pi e} \left(\frac{2\pi m_e c}{e} \right)^{1/3} \gamma_m'^{-2/3} B'^{2/3} \nu_a'^{1/3} \frac{f_e n_0 R}{3} \\ \nu_a'^{5/3} &= \frac{c^2 \sigma_T}{72\pi e} \left(\frac{2\pi m_e c}{e} \right)^{1/3} \gamma_m'^{-5/3} B'^{2/3} f_e n_0 R \\ &= \left(\frac{2m_e c^7 \sigma_T^3}{72^3 \pi^2 e^4} \right)^{1/3} \left(\frac{\epsilon_e m_p}{f_e m_e} \frac{p-2}{p-1} \Gamma \right)^{-5/3} B'^{2/3} f_e n_0 R \\ \nu_a' &= \left(\frac{2m_e c^7 \sigma_T^3}{72^3 \pi^2 e^4} \right)^{1/5} \left(\frac{\epsilon_e m_p}{f_e m_e} \frac{p-2}{p-1} \Gamma \right)^{-1} B'^{2/5} f_e^{3/5} n_0^{3/5} R^{3/5} \\ &= \left(\frac{2m_e c^7 \sigma_T^3}{72^3 \pi^2 e^4} \right)^{1/5} \left(\frac{f_e m_e}{\epsilon_e m_p} \frac{p-1}{p-2} \frac{1}{\Gamma} \right) (\sqrt{32\pi\epsilon_B n_0 m_p c^2 \Gamma})^{2/5} f_e^{3/5} n_0^{3/5} R^{3/5} \\ &= \left(\frac{2m_e c^7 \sigma_T^3}{72^3 \pi^2 e^4} \right)^{1/5} \left(\frac{f_e m_e}{\epsilon_e m_p} \frac{p-1}{p-2} \frac{1}{\Gamma} \right) (32\pi\epsilon_B n_0 m_p c^2)^{1/5} \Gamma^{2/5} f_e^{3/5} n_0^{3/5} R^{3/5} \\ &= \left(\frac{64m_e^6 c^9 \sigma_T^3}{72^3 \pi e^4 m_p^4} \right)^{1/5} \frac{p-1}{p-2} f_e^{8/5} \epsilon_e^{-1} \epsilon_B^{1/5} n_0^{4/5} \Gamma^{-3/5} R^{3/5}\end{aligned}\tag{A.115}$$

となる。観測者系に直すと、

$$\begin{aligned}\nu_a &= \frac{\Gamma}{1+z} \nu'_a \\ &= \frac{1}{1+z} \left(\frac{64m_e^6 c^9 \sigma_T^3}{72^3 \pi e^4 m_p^4} \right)^{1/5} \frac{p-1}{p-2} f_e^{8/5} \epsilon_e^{-1} \epsilon_B^{1/5} n_0^{4/5} \Gamma^{2/5} R^{3/5}\end{aligned}\tag{A.116}$$

断熱減速膨張期間の場合、

$$\begin{aligned}
\nu_a &= \frac{1}{1+z} \left(\frac{64m_e^6 c^9 \sigma_T^3}{72^3 \pi e^4 m_p^4} \right)^{1/5} \frac{p-1}{p-2} f_e^{8/5} \epsilon_e^{-1} \epsilon_B^{1/5} n_0^{4/5} \Gamma^{2/5} \left(\frac{3E_0}{4\pi n_0 m_p c^2} \right)^{1/5} \Gamma^{-2/5} \\
&= \frac{1}{1+z} \left(\frac{m_e^6 c^7 \sigma_T^3}{7776 \pi^2 e^4 m_p^5} \right)^{1/5} \frac{p-1}{p-2} f_e^{8/5} \epsilon_e^{-1} \epsilon_B^{1/5} E_0^{1/5} n_0^{3/5} \\
&= 1.39 \text{ GHz} \left(\frac{f_e}{1} \right)^{\frac{8}{5}} \left(\frac{\epsilon_e}{0.1} \right)^{-1} \left(\frac{\epsilon_B}{0.1} \right)^{\frac{1}{5}} \left(\frac{E_0}{10^{52} \text{ erg}} \right)^{\frac{1}{5}} \left(\frac{n_0}{1 \text{ cm}^{-3}} \right)^{\frac{3}{5}}
\end{aligned} \tag{A.117}$$

となり、時間に依存せず一定となることがわかる。ただし、 $p = 2.5$ 、 $z = 1$ とした値である。

次に、 $\max[\gamma'_a, \min(\gamma'_c, \gamma'_m)] = \gamma'_c$ すなわち、fast cooling の時、図A.3の左側の分布になっているはずなので、全方位への自然放射係数 $j_{\nu'_a}^{\text{syn}}$ は

$$\begin{aligned}
j_{\nu'_a}^{\text{syn}} &= P'_{\nu, \text{max}} \left(\frac{\nu'_a}{\nu'_c} \right)^{1/3} \\
&= \frac{1}{3e} m_e c^2 \sigma_T B' \nu_a'^{1/3} \left(\frac{eB'}{2\pi m_e c} \gamma_c'^2 \right)^{-1/3} \\
&= \frac{m_e c^2 \sigma_T}{3e} \left(\frac{2\pi m_e c}{e} \right)^{1/3} \gamma_c'^{-2/3} B'^{2/3} \nu_a'^{1/3}
\end{aligned} \tag{A.118}$$

である。これを用いて、先ほどと同様の議論から、 ν'_a について解いていくと、

$$\begin{aligned}
2\gamma'_c m_e \nu_a'^2 &\sim \frac{j_{\nu'_a}^{\text{syn}}}{4\pi} \rho' \Delta R' \\
2\gamma'_c m_e \nu_a'^2 &\sim \frac{m_e c^2 \sigma_T}{12\pi e} \left(\frac{2\pi m_e c}{e} \right)^{1/3} \gamma_c'^{-2/3} B'^{2/3} \nu_a'^{1/3} \frac{f_e n_0 R}{3} \\
\nu_a'^{5/3} &= \frac{c^2 \sigma_T}{72\pi e} \left(\frac{2\pi m_e c}{e} \right)^{1/3} \gamma_c'^{-5/3} B'^{2/3} f_e n_0 R \\
&= \left(\frac{2\pi m_e c^7 \sigma_T^3}{72^3 \pi^3 e^4} \right)^{1/3} \left(\frac{6\pi m_e c}{\sigma_T B'^2 \Gamma T} \right)^{-5/3} B'^{2/3} f_e n_0 R \\
&= \left(\frac{2m_e c^7 \sigma_T^3}{72^3 \pi^2 e^4} \right)^{1/3} \left(\frac{\sigma_T B'^2 \Gamma T}{6\pi m_e c} \right)^{5/3} B'^{2/3} f_e n_0 R \\
\nu_a' &= \left(\frac{2m_e c^7 \sigma_T^3}{72^3 \pi^2 e^4} \right)^{1/5} \left(\frac{\sigma_T B'^2 \Gamma T}{6\pi m_e c} \right) B'^{2/5} f_e^{3/5} n_0^{3/5} R^{3/5} \\
&= \left(\frac{2m_e c^7 \sigma_T^3}{72^3 \pi^2 e^4} \right)^{1/5} \left(\frac{\sigma_T}{6\pi m_e c} \right) B'^{12/5} f_e^{3/5} n_0^{3/5} R^{3/5} \Gamma T
\end{aligned} \tag{A.119}$$

となる。観測者系に直すと、

$$\begin{aligned}
\nu_a &= \frac{\Gamma}{1+z} \nu'_a \\
&= \frac{1}{1+z} \left(\frac{2m_e c^7 \sigma_T^3}{72^3 \pi^2 e^4} \right)^{1/5} \left(\frac{\sigma_T}{6\pi m_e c} \right) B'^{12/5} f_e^{3/5} n_0^{3/5} R^{3/5} \Gamma^2 T \\
&= \frac{1}{1+z} \left(\frac{2c^2 \sigma_T^8}{72^3 \times 6^5 \pi^7 e^4 m_e^4} \right)^{1/5} (32\pi \epsilon_B n_0 m_p c^2)^{6/5} \Gamma^{12/5} f_e^{3/5} n_0^{3/5} R^{3/5} \Gamma^2 T \\
&= \frac{1}{1+z} \left(\frac{2 \times 32^6 c^{14} \sigma_T^8 m_p^6}{72^3 \times 6^5 \pi e^4 m_e^4} \right)^{1/5} f_e^{3/5} \epsilon_B^{6/5} n_0^{9/5} R^{3/5} \Gamma^{22/5} T
\end{aligned} \tag{A.120}$$

断熱減速膨張期間の場合、

$$\begin{aligned}
\nu_a &= \frac{1}{1+z} \left(\frac{2 \times 32^6 c^{14} \sigma_T^8 m_p^6}{72^3 \times 6^5 \pi e^4 m_e^4} \right)^{1/5} f_e^{3/5} \epsilon_B^{6/5} n_0^{9/5} \left(\frac{3E_0}{4\pi n_0 m_p c^2 \Gamma^2} \right)^{1/5} \Gamma^{22/5} T \\
&= \frac{1}{1+z} \left(\frac{6 \times 32^6 c^{12} \sigma_T^8 m_p^5}{4 \times 72^3 \times 6^5 \pi^2 e^4 m_e^4} \right)^{1/5} f_e^{3/5} \epsilon_B^{6/5} n_0^{8/5} E_0^{1/5} \Gamma^4 T \\
&= \frac{1}{1+z} \left(\frac{6 \times 32^6 c^{12} \sigma_T^8 m_p^5}{4 \times 72^3 \times 6^5 \pi^2 e^4 m_e^4} \right)^{1/5} f_e^{3/5} \epsilon_B^{6/5} n_0^{8/5} E_0^{1/5} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{3E_0}{\pi n_0 m_p c^5} \right)^{1/8} T^{-3/8} \right]^4 T \\
&= \frac{1}{1+z} \left(\frac{6 \times 32^6 c^{12} \sigma_T^8 m_p^5}{4 \times 2^{20} \times 72^3 \times 6^5 \pi^2 e^4 m_e^4} \right)^{1/5} f_e^{3/5} \epsilon_B^{6/5} n_0^{8/5} E_0^{1/5} \left(\frac{3E_0}{\pi n_0 m_p c^5} \right)^{1/2} T^{-1/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+z}} \left(\frac{6 \times 3^{5/2} \times 32^6 \sigma_T^8 m_p^{5/2}}{4 \times 2^{20} \times 72^3 \times 6^5 \pi^{9/2} e^4 c^{1/2} m_e^4} \right)^{1/5} f_e^{3/5} \epsilon_B^{6/5} n_0^{11/10} E_0^{7/10} T^{-1/2} \\
&= 2.26 \times 10^7 \text{ Hz} \frac{1}{\sqrt{1+z}} \left(\frac{f_e}{1} \right)^{3/5} \left(\frac{\epsilon_B}{0.1} \right)^{6/5} \left(\frac{n_0}{1 \text{ cm}^{-3}} \right)^{11/10} \left(\frac{E_0}{10^{52} \text{ erg}} \right)^{7/10} \left(\frac{T}{100 \text{ s}} \right)^{-1/2}
\end{aligned} \tag{A.121}$$

となる。ここで、 $z = 1.0$ である。

次に、 $\max[\gamma'_a, \min(\gamma'_c, \gamma'_m)] = \gamma'_a$ すなわち、図A.2や図A.3の右側の分布になっている場合を考える。まず、図A.2のような Slow Cooling の場合について、自然放射係数 $j_{\nu'_a}^{\text{syn}}$ はこれまでと同様に

$$\begin{aligned}
j_{\nu'_a}^{\text{syn}} &= P'_{\nu, \max} \left(\frac{\nu'_a}{\nu'_m} \right)^{-\frac{p-1}{2}} \\
&= \frac{1}{3e} m_e c^2 \sigma_T B' \nu_a'^{-\frac{p-1}{2}} \left(\frac{eB'}{2\pi m_e c} \gamma_m'^2 \right)^{\frac{p-1}{2}} \\
&= \frac{\sigma_T}{3e} c^{\frac{5-p}{2}} m_e^{\frac{3-p}{2}} B'^{\frac{p+1}{2}} \nu_a'^{-\frac{p-1}{2}} \left(\frac{e}{2\pi} \gamma_m'^2 \right)^{\frac{p-1}{2}}
\end{aligned} \tag{A.122}$$

とかける。従って式 (A.109) にそれぞれ代入すると

$$\begin{aligned}
2\gamma'_a m_e \nu_a'^2 &\sim \frac{j_{\nu_a'}^{\text{syn}}}{4\pi} \rho' \Delta R' \\
2\gamma'_a m_e \nu_a'^2 &= \frac{j_{\nu_a'}^{\text{syn}}}{4\pi} \frac{f_e n_0 R}{3} \\
\sqrt{\frac{2\pi m_e c \nu_a'}{e B'}} m_e \nu_a'^2 &= \frac{f_e n_0 R}{24\pi} \frac{\sigma_T}{3e} c^{\frac{5-p}{2}} m_e^{\frac{3-p}{2}} B'^{\frac{p+1}{2}} \nu_a'^{-\frac{p-1}{2}} \left(\frac{e}{2\pi} \gamma_m'^2 \right)^{\frac{p-1}{2}} \\
\nu_a'^{\frac{p+4}{2}} &= \frac{f_e n_0 \sigma_T R}{72\pi e} c^{\frac{4-p}{2}} m_e^{-\frac{p}{2}} B'^{\frac{p+2}{2}} \left(\frac{e}{2\pi} \right)^{\frac{p}{2}} \gamma_m'^{p-1} \\
\nu_a'^{\frac{p+4}{2}} &= \frac{f_e n_0 \sigma_T R}{72\pi e} c^{\frac{4-p}{2}} m_e^{-\frac{p}{2}} (32\pi \epsilon_B n_0 m_p c^2)^{\frac{p+2}{4}} \Gamma^{\frac{p+2}{2}} \left(\frac{e}{2\pi} \right)^{\frac{p}{2}} \left(\frac{\epsilon_e m_p}{f_e m_e} \frac{p-2}{p-1} \Gamma \right)^{p-1} \\
\nu_a'^{\frac{p+4}{2}} &= \frac{(32\pi)^{\frac{p+2}{4}} \sigma_T c^3 m_e^{\frac{3-3p}{2}} m_p^{\frac{5p-2}{4}}}{72\pi e} \left(\frac{e}{2\pi} \right)^{\frac{p}{2}} \left(\frac{p-2}{p-1} \right)^{p-1} \epsilon_B^{\frac{p+2}{4}} \epsilon_e^{p-1} f_e^{2-p} n_0^{\frac{p+6}{4}} R \Gamma^{\frac{3p}{2}}
\end{aligned} \tag{A.123}$$

となる。観測者系に直すと、

$$\begin{aligned}
\nu_a^{\frac{p+4}{2}} &= \left(\frac{\Gamma}{1+z} \nu_a' \right)^{\frac{p+4}{2}} \\
\nu_a^{\frac{p+4}{2}} &= \left(\frac{1}{1+z} \right)^{\frac{p+4}{2}} \frac{(32\pi)^{\frac{p+2}{4}} \sigma_T c^3 m_e^{\frac{3-3p}{2}} m_p^{\frac{5p-2}{4}}}{72\pi e} \left(\frac{e}{2\pi} \right)^{\frac{p}{2}} \left(\frac{p-2}{p-1} \right)^{p-1} \epsilon_B^{\frac{p+2}{4}} \epsilon_e^{p-1} f_e^{2-p} n_0^{\frac{p+6}{4}} R \Gamma^{2p+2} \\
\nu_a &= \frac{1}{1+z} \left[\frac{2^{\frac{3p+10}{4}} \sigma_T c^3 m_e^{\frac{3-3p}{2}} m_p^{\frac{5p-2}{4}}}{72 \times \pi^{\frac{p+2}{4}} e^{\frac{2-p}{2}}} \right]^{\frac{2}{p+4}} \left(\frac{p-2}{p-1} \right)^{\frac{2p-2}{p+4}} \epsilon_B^{\frac{p+2}{2p+8}} \epsilon_e^{\frac{2p-2}{p+4}} f_e^{\frac{4-2p}{p+4}} n_0^{\frac{p+6}{2p+8}} R^{\frac{2}{p+4}} \Gamma^{\frac{4p+4}{p+4}}
\end{aligned} \tag{A.124}$$

とかける。断熱減速膨張気の場合、

$$\begin{aligned}
\nu_a &= (1+z)^{-1} \left[\frac{3^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{9p+22}{12}} \sigma_T c^{\frac{7}{3}} m_e^{\frac{3-3p}{2}} m_p^{\frac{15p-10}{12}}}{72\pi^{\frac{3p+10}{12}} e^{\frac{2-p}{2}}} \right]^{\frac{2}{p+4}} \left(\frac{p-2}{p-1} \right)^{\frac{2p-2}{p+4}} \\
&\times \epsilon_B^{\frac{p+2}{2p+8}} \epsilon_e^{\frac{2p-2}{p+4}} f_e^{\frac{4-2p}{p+4}} n_0^{\frac{3p+14}{6(p+4)}} E_0^{\frac{2}{3(p+4)}} \Gamma^{\frac{12p+8}{3(p+4)}} \\
&= (1+z)^{\frac{p-6}{2(p+4)}} \left[\frac{3^{\frac{p+2}{4}} \times 2^{\frac{2-5p}{4}} \sigma_T c^{\frac{6-5p}{4}} m_e^{\frac{3-3p}{2}} m_p^{p-1}}{72\pi^{\frac{p+2}{2}} e^{\frac{2-p}{2}}} \right]^{\frac{2}{p+4}} \left(\frac{p-2}{p-1} \right)^{\frac{2p-2}{p+4}} \\
&\times \epsilon_B^{\frac{p+2}{2p+8}} \epsilon_e^{\frac{2p-2}{p+4}} f_e^{\frac{4-2p}{p+4}} n_0^{\frac{2}{p+4}} E_0^{\frac{p+2}{2(p+4)}} T^{-\frac{3p+2}{2(p+4)}} \\
&= 1.78 \times 10^6 \text{ Hz} (1+z)^{\frac{p-6}{2(p+4)}} \\
&\times \left(\frac{\epsilon_B}{0.01} \right)^{\frac{p+2}{2(p+4)}} \left(\frac{\epsilon_e}{0.1} \right)^{\frac{2p-2}{p+4}} \left(\frac{f_e}{1} \right)^{\frac{4-2p}{p+4}} \left(\frac{n_0}{1 \text{ cm}^{-3}} \right)^{\frac{2}{p+4}} \left(\frac{E_0}{10^{52} \text{ erg}} \right)^{\frac{p+2}{2(p+4)}} \left(\frac{T}{10^5 \text{ s}} \right)^{-\frac{3p+2}{2(p+4)}}
\end{aligned} \tag{A.125}$$

次に、図A.3のような Fast Cooling の場合について、自然放射係数 $j_{\nu'_a}^{\text{syn}}$ はこれまでと同様に

$$\begin{aligned}
j_{\nu'_a}^{\text{syn}} &= P'_{\nu, \max} \left(\frac{\nu'_a}{\nu'_c} \right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{3e} m_e c^2 \sigma_T B' \nu_a'^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{eB'}{2\pi m_e c} \gamma_c'^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{3\sqrt{2}e\pi} m_e^{1/2} c^{3/2} \sigma_T B'^{3/2} \nu_a'^{-\frac{1}{2}} \gamma_c'
\end{aligned} \tag{A.126}$$

とかける。従って式 (A.109) にそれぞれ代入すると

$$\begin{aligned}
2\gamma'_a m_e \nu_a'^2 &\sim \frac{j_{\nu'_a}^{\text{syn}}}{4\pi} \rho' \Delta R' \\
2\gamma'_a m_e \nu_a'^2 &= \frac{j_{\nu'_a}^{\text{syn}}}{4\pi} \frac{f_e n_0 R}{3} \\
\sqrt{\frac{2\pi m_e c \nu_a'}{eB'}} m_e \nu_a'^2 &= \frac{f_e n_0 R}{36\sqrt{2}e\pi^{3/2}} m_e^{1/2} c^{3/2} \sigma_T B'^{3/2} \nu_a'^{-\frac{1}{2}} \gamma_c' \\
\nu_a'^3 &= \frac{c\sigma_T}{72\pi^2 m_e} f_e n_0 R B'^2 \gamma_c' \\
\nu_a'^3 &= \frac{c\sigma_T}{72\pi^2 m_e} f_e n_0 R B'^2 \left(\frac{6\pi m_e c}{\sigma_T B'^2 \Gamma T} \right) \\
\nu_a'^3 &= \frac{c^2}{12\pi} f_e n_0 R \Gamma^{-1} T^{-1}
\end{aligned} \tag{A.127}$$

となる。観測者系に直すと、

$$\begin{aligned}
\nu_a^3 &= \left(\frac{\Gamma}{1+z} \right)^3 \nu_a'^3 \\
\nu_a^3 &= \left(\frac{\Gamma}{1+z} \right)^3 \frac{c^2}{12\pi} f_e n_0 R \Gamma^{-1} T^{-1} \\
\nu_a^3 &= \frac{1}{(1+z)^3} \frac{c^2}{12\pi} f_e n_0 R \Gamma^2 T^{-1} \\
\nu_a &= \frac{1}{1+z} \left(\frac{c^2}{12\pi} \right)^{1/3} f_e^{1/3} n_0^{1/3} R^{1/3} \Gamma^{2/3} T^{-1/3}
\end{aligned} \tag{A.128}$$

とかける。断熱減速膨張期の場合、

$$\begin{aligned}
\nu_a &= \frac{1}{1+z} \left(\frac{c^2}{12\pi} \right)^{1/3} f_e^{1/3} n_0^{1/3} \left(\frac{3E_0}{4\pi n_0 m_p c^2 \Gamma^2} \right)^{1/9} \Gamma^{2/3} T^{-1/3} \\
&= \frac{1}{1+z} \left(\frac{c^4}{2304\pi^4 m_p} \right)^{1/9} f_e^{1/3} n_0^{2/9} E_0^{1/9} \Gamma^{4/9} T^{-1/3} \\
&= \frac{1}{1+z} \left(\frac{c^4}{2304\pi^4 m_p} \right)^{1/9} f_e^{1/3} n_0^{2/9} E_0^{1/9} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{3E_0}{\pi n_0 m_p c^5} \right)^{1/8} T^{-3/8} \right]^{4/9} T^{-1/3} \\
&= (1+z)^{-2/3} \left(\frac{\sqrt{3}c^{3/2}}{2^{12} \times 12^2 \pi^{9/2} m_p^{3/2} c^{5/2}} \right)^{1/9} f_e^{1/3} n_0^{1/6} E_0^{1/6} T^{-1/3}
\end{aligned} \tag{A.129}$$

となる。

A.5 コンプトン散乱

静止している電子に光子が衝突することを考える。ここで、光子の入射方向 $\vec{n}_i$ と散乱方向 $\vec{n}_f$ を次のように、それぞれ仮定する。

$$\vec{n}_{pi} = (\cos \theta_{pi}, \sin \theta_{pi} \cos \phi_{pi}, \sin \theta_{pi} \sin \phi_{pi}) = (1, 0, 0) \quad (\text{A.130})$$

$$\vec{n}_{pf} = (\cos \theta_{pf}, \sin \theta_{pf} \cos \phi_{pf}, \sin \theta_{pf} \sin \phi_{pf}) = (\cos \theta_{pf}, \sin \theta_{pf}, 0) \quad (\text{A.131})$$

衝突前の光子と電子の四元運動量ベクトル P_{pi}^μ, P_{ei}^μ をそれぞれ

$$P_{pi}^\mu = \left(\frac{\epsilon_i}{c}, \frac{\epsilon_i}{c}, 0, 0 \right) = \left(\frac{\epsilon_i}{c}, \frac{\epsilon_i}{c} \vec{n}_{pi} \right) \quad (\text{A.132})$$

$$P_{ei}^\mu = (m_e c, 0, 0, 0) = (m_e c, \vec{0}) \quad (\text{A.133})$$

衝突後の光子と電子の四元運動量ベクトル P_{pf}^μ, P_{ef}^μ をそれぞれ

$$P_{pf}^\mu = \left(\frac{\epsilon_f}{c}, \frac{\epsilon_f \cos \theta_{pf}}{c}, \frac{\epsilon_f \sin \theta_{pf}}{c}, 0 \right) = \left(\frac{\epsilon_f}{c}, \frac{\epsilon_f}{c} \vec{n}_{pf} \right) \quad (\text{A.134})$$

$$P_{ef}^\mu = (\gamma m_e c, -\gamma m_e v \cos \theta_e, -\gamma m_e v \sin \theta_e, 0) \quad (\text{A.135})$$

とする。ミンコフスキー時空 $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ とすれば、それぞれの共変ベクトルは、

$$P_{pi\ \mu} = \left(-\frac{\epsilon_i}{c}, \frac{\epsilon_i}{c}, 0, 0 \right) \quad (\text{A.136})$$

$$P_{ei\ \mu} = (-m_e c, 0, 0, 0) \quad (\text{A.137})$$

$$P_{pf\ \mu} = \left(-\frac{\epsilon_f}{c}, \frac{\epsilon_f \cos \theta_{pf}}{c}, \frac{\epsilon_f \sin \theta_{pf}}{c}, 0 \right) \quad (\text{A.138})$$

$$P_{ef\ \mu} = (-\gamma m_e c, -\gamma m_e v \cos \theta_e, -\gamma m_e v \sin \theta_e, 0) \quad (\text{A.139})$$

とかける。

以上の過程の元で、散乱後の光子のエネルギー ϵ_f を求める。まず、四元運動量保存則から、変形して両辺二乗（内積）をとると、

$$\begin{aligned} P_{pi}^\mu + P_{ei}^\mu &= P_{pf}^\mu + P_{ef}^\mu \\ P_{ef}^\mu &= P_{pi}^\mu + P_{ei}^\mu - P_{pf}^\mu \\ |P_{ef}^\mu|^2 &= |P_{pi}^\mu + P_{ei}^\mu - P_{pf}^\mu|^2 \\ P_{ef}^\mu P_{ef\ \mu} &= P_{pi}^\mu P_{pi\ \mu} + P_{ei}^\mu P_{ei\ \mu} + P_{pf}^\mu P_{pf\ \mu} \\ &\quad + 2P_{pi}^\mu P_{ei\ \mu} - 2P_{ei}^\mu P_{pf\ \mu} - 2P_{pf}^\mu P_{pi\ \mu} \end{aligned} \quad (\text{A.140})$$

と書き直すことができる。それぞれの項を計算すると

$$\begin{aligned}
P_{ef}^\mu P_{ef\ \mu} &= -\gamma^2 m_e^2 c^2 + \gamma^2 m_e^2 v^2 (\cos^2 \theta_e + \sin^2 \theta_e) + 0 \\
&= -\gamma^2 m_e^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \\
&= -m_e^2 c^2
\end{aligned} \tag{A.141}$$

$$P_{pi}^\mu P_{pi\ \mu} = -\frac{\epsilon_i^2}{c^2} + \frac{\epsilon_i^2}{c^2} + 0 + 0 = 0 \tag{A.142}$$

$$P_{ei}^\mu P_{ei\ \mu} = -m_e^2 c^2 \tag{A.143}$$

$$\begin{aligned}
P_{pf}^\mu P_{pf\ \mu} &= -\frac{\epsilon_f^2}{c^2} + \frac{\epsilon_f^2 \cos^2 \theta_{pf}}{c^2} + \frac{\epsilon_f^2 \sin^2 \theta_{pf}}{c^2} \\
&= \frac{\epsilon_f^2 (-1 + 1)}{c^2} = 0
\end{aligned} \tag{A.144}$$

$$P_{pi}^\mu P_{ei\ \mu} = -\epsilon m_e \tag{A.145}$$

$$P_{ei}^\mu P_{pf\ \mu} = -\epsilon_f m_e \tag{A.146}$$

$$\begin{aligned}
P_{pf}^\mu P_{pi\ \mu} &= \left(-\frac{\epsilon_i \epsilon_f}{c^2} + \frac{\epsilon_i \epsilon_f \cos \theta_{pf}}{c^2} \right) \\
&= -\frac{\epsilon_i \epsilon_f}{c^2} (1 - \cos \theta_{pf})
\end{aligned} \tag{A.147}$$

以上より、式 (A.140) は次のように式変形ができる。

$$\begin{aligned}
-m_e^2 c^2 &= 0 - m_e^2 c^2 + 0 - 2\epsilon_i m_e + 2\epsilon_f m_e + \frac{2\epsilon_i \epsilon_f}{c^2} (1 - \cos \theta_{pf}) \\
0 &= m_e^2 c^4 - m_e^2 c^4 - 2\epsilon_i m_e c^2 + 2\epsilon_f m_e c^2 + 2\epsilon_i \epsilon_f (1 - \cos \theta_{pf}) \\
0 &= \epsilon_f (m_e c^2 + \epsilon_i - \epsilon_i \cos \theta_{pf}) - \epsilon_i m_e c^2
\end{aligned} \tag{A.148}$$

以上より、

$$\begin{aligned}
\epsilon_f &= \frac{\epsilon_i m_e c^2}{m_e c^2 + \epsilon_i (1 - \cos \theta_{pf})} \\
&= \frac{\epsilon_i}{1 + \frac{\epsilon_i}{m_e c^2} (1 - \cos \theta_{pf})}
\end{aligned} \tag{A.149}$$

と、衝突後の光子のエネルギー ϵ_f を得ることができる。この関係を $\epsilon_i = h\nu_i = hc/\lambda_i$ で波長に置き換えてみる。

$$\begin{aligned}
\frac{hc}{\lambda_f} &= \frac{hc/\lambda_i}{1 + \frac{hc/\lambda_i}{m_e c^2} (1 - \cos \theta_{pf})} \\
\lambda_f &= \lambda_i + \frac{h\nu}{m_e c^2} (1 - \cos \theta_{pf}) \\
\lambda_f &= \lambda_i + \lambda_c (1 - \cos \theta_{pf})
\end{aligned} \tag{A.150}$$

ここで、 $\lambda_c \equiv (h\nu)/(m_e c^2)$ はコンプトン波長と呼び、

$$\begin{aligned}\lambda_c &\equiv \frac{h\nu}{m_e c^2} = \frac{2\pi\hbar c}{m_e c^2} \sim 6 \times \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{0.5 \text{ MeV}} \\ &\sim 2400 \text{ fm} = 2.4 \times 10^{-10} \text{ cm} = 0.024 \text{ \AA}\end{aligned}\quad (\text{A.151})$$

となる。式 (A.150) から、コンプトン散乱した光子の波長は、散乱する前に比べてコンプトン波長程度長くなることがわかる。元々、散乱を通して、光子が静止している電子にエネルギーを与えるのだから、散乱後の光子のエネルギーは小さくなり、波長が長くなるのは当然の結果である。

$\lambda \gg \lambda_c$ の時は、波長の変化が無視でき、散乱はほぼ弾性的であるので、トムソン散乱の取り扱いが良い近似となる。逆に、散乱前の光子の波長がコンプトン波長と同程度かそれ以下なら、光子のエネルギー変化が無視できなくなる。この場合、不確定性原理から電子の位置が光の波長程度で不確定なので、量子力学的取り扱いが必要となる。それだけでなく、この場合 1 回の散乱で、散乱後の電子が相対論的速度を持つ可能性があるので、相対論的量子力学を用いなければならない。相対論的量子力学を用いて、コンプトン散乱の散乱断面積を求めたクラインと仁科の公式が以下である。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} \frac{\epsilon_f^2}{\epsilon^2} \left(\frac{\epsilon_i}{\epsilon_f} + \frac{\epsilon_f}{\epsilon_i} - \sin^2 \theta_{pf} \right) \quad (\text{A.152})$$

A.6 逆コンプトン散乱

運動している電子による、光子の散乱を考える。電子が運動して見える系（実験室系；laboratory frame）を K 系、電子が静止して見える系（電子静止系；electron rest frame）を K' 系と呼び、 K' 系の物理量にはダッシュ「'」をつけることにする。

Energy Transfer

まず、光子が電子により散乱されることで、光子のエネルギーがどのように変化するかを議論する。電子が静止して見える、 K' 系では前節のコンプトン散乱と同様の議論ができる。ただし、ここでは K 系で電子が運動する方向を x 軸とし、 K' 系の x' 軸を x 軸方向にするので、光子の入射方向 $\vec{n}_i$ と散乱方向 $\vec{n}_f$ は次のようにおく。

$$\vec{n}_{pi}' = (\cos \theta_i', \sin \theta_i' \cos \phi_i', \sin \theta_i' \sin \phi_i') \quad (\text{A.153})$$

$$\vec{n}_{pf}' = (\cos \theta_f', \sin \theta_f' \cos \phi_f', \sin \theta_f' \sin \phi_f') \quad (\text{A.154})$$

この時の、散乱前と散乱後の電子と光子についての電子静止系での四元運動量とその共変成分は

$$P_{ei}'^\mu = (m_e c, 0, 0, 0), \quad P_{ei}'_\mu = (-m_e c, 0, 0, 0) \quad (\text{A.155})$$

$$P_{pi}'^\mu = \left(\frac{\epsilon_i'}{c}, \frac{\epsilon_i'}{c} \vec{n}_{pi}' \right), \quad P_{pi}'_\mu = \left(-\frac{\epsilon_i'}{c}, \frac{\epsilon_i'}{c} \vec{n}_{pi}' \right) \quad (\text{A.156})$$

$$P_{ef}'^\mu = \left(\frac{E'}{c}, \vec{p}_{ef}' \right), \quad P_{ef}'_\mu = \left(-\frac{E'}{c}, \vec{p}_{ef}' \right) \quad (\text{A.157})$$

$$P_{pf}^{\mu} = \left(\frac{\epsilon'_f}{c}, \frac{\epsilon'_f}{c} \vec{n}_{pf}' \right), \quad P_{pf\ \mu}' = \left(-\frac{\epsilon'_f}{c}, \frac{\epsilon'_f}{c} \vec{n}_{pf}' \right) \quad (\text{A.158})$$

とかける。コンプトン散乱の時と同様に四元運動量保存則を両辺二乗して変形すると

$$\begin{aligned} P_{ef}^{\mu} P_{ef\ \mu}' &= P_{pi}^{\mu} P_{pi\ \mu}' + P_{ei}^{\mu} P_{ei\ \mu}' + P_{pf}^{\mu} P_{pf\ \mu}' + 2P_{pi}^{\mu} P_{ei\ \mu}' - 2P_{ei}^{\mu} P_{pf\ \mu}' - 2P_{pf}^{\mu} P_{pi\ \mu}' \\ |p_{ef}'|^2 - \frac{E'^2}{c^2} &= \frac{\epsilon_i'^2}{c^2} (|\vec{n}_{pi}'|^2 - 1) - m_e^2 c^2 + \frac{\epsilon_f'^2}{c^2} (|\vec{n}_{pf}'|^2 - 1) - 2m_e \epsilon_i' + 2m_e \epsilon_f' - 2 \frac{\epsilon_i' \epsilon_f'}{c^2} (\vec{n}_{pf}' \cdot \vec{n}_{pi}' - 1) \\ 0 &= \frac{2\epsilon_i' \epsilon_f'}{c^2} (1 - \cos \Theta) - 2m_e \epsilon_i' + 2m_e \epsilon_f' \\ \epsilon_f' &= \frac{\epsilon_i'}{1 + \frac{\epsilon_i'}{m_e c^2} (1 - \cos \Theta)} \end{aligned} \quad (\text{A.159})$$

となる。ただし、ここでの Θ は光子の入射方向 $\vec{n}_{pi}'$ と散乱方向 $\vec{n}_{pf}'$ の成す角で、 $\cos \Theta$ はその内積であり、

$$\begin{aligned} \cos \Theta &= \cos \theta_i' \cos \theta_f' + \sin \theta_i' \cos \phi_i' \sin \theta_f' \cos \phi_f' + \sin \theta_i' \sin \phi_i' \sin \theta_f' \sin \phi_f' \\ &= \cos \theta_i' \cos \theta_f' + \sin \theta_i' \sin \theta_f' (\cos \phi_i' \cos \phi_f' + \sin \phi_i' \sin \phi_f') \end{aligned} \quad (\text{A.160})$$

である。式 (A.159) から、 $\epsilon_i' \ll m_e c^2 \sim 511\text{keV}$ の場合 $\epsilon_f' \sim \epsilon_i'$ であり、電子静止系では、ほぼ弾性衝突で散乱前後で光子のエネルギーに大きな変化はないことがわかる。

ここから、電子が速度 $\vec{v}$ を用いて $\vec{\beta} = \vec{v}/c$ で運動して見える系（実験室系= K 系）にいる観測者が観測するエネルギーを考えてみる。 K 系において観測者は無限遠にいることを考え、微小時間 dt の間に電子から観測者の方向を向く単位ベクトル $\vec{n}$ は変化しないものとする。実験室系と電子静止系の間に成り立ちエネルギーの関係式は

$$\begin{aligned} \epsilon &= h\nu = \frac{h}{dt_{\text{obs}}} \quad (dt \text{ は電磁波の 1 周期とした}) \\ &= \frac{h}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}) dt} \quad (\because \text{Doppler shift}) \\ &= \frac{h}{\gamma(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}) dt'} \quad (\because \text{Lorentz 変換}) \\ &= \frac{h\nu'}{\gamma(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} = \frac{\epsilon'}{\gamma(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \end{aligned} \quad (\text{A.161})$$

$$= \frac{\epsilon'}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)} \sim \frac{\epsilon'}{\gamma(1 - \beta)} \quad (\because \vec{n} \parallel \vec{\beta}) \quad (\text{A.162})$$

とかける。以上より

$$\begin{aligned} \epsilon_i' &= \gamma(1 - \beta \cos \theta_i) \epsilon_i \\ &\sim \gamma \left(1 - \cos \theta_i + \frac{\cos \theta_i}{2\gamma^2} \right) \epsilon_i \quad (\because \gamma \gg 1) \\ &\sim \gamma \epsilon_i \quad (\because |1 - \cos \theta_i| \sim 1) \end{aligned} \quad (\text{A.163})$$

また、

$$\begin{aligned}
\epsilon_f &= \frac{\epsilon'_f}{\gamma(1 - \beta \cos \theta_f)} \\
&= \frac{\epsilon'_f}{\gamma \left(1 - \beta \frac{\cos \theta'_f + \beta}{1 + \beta \cos \theta'_f} \right)} \\
&= \frac{1 + \beta \cos \theta'_f}{\gamma(1 - \beta^2)} \epsilon'_f \\
&= \gamma(1 + \beta \cos \theta'_f) \epsilon'_f \\
&\sim \gamma(1 + \beta \cos \theta'_f) \epsilon'_i \quad (\text{if } \epsilon'_i \ll m_e c^2 \quad \therefore (A.159)) \\
&\sim \gamma^2 \epsilon_i \left(1 + \cos \theta'_f - \frac{\cos \theta'_f}{2\gamma^2} \right) \quad (\because \gamma \gg 1) \\
&\sim \gamma^2 \epsilon_i \quad (\text{if } |1 + \cos \theta'_f| \sim 1)
\end{aligned} \tag{A.164}$$

以上より、大雑把に以下のようなエネルギーの関係性が導かれる。

$$\epsilon_i : \epsilon'_i : \epsilon'_f : \epsilon_f \sim 1 : \gamma : \gamma : \gamma^2 \tag{A.165}$$

つまり、実験系に静止する観測者にとって、散乱前の光子が逆コンプトン散乱を受けて電子のローレンツ因子の二乗 (γ^2) 倍に高エネルギーな光子に変化することがわかる。

Power for single scattering

これまで、1個の相対論的運動をする電子により1つの光子が散乱されたときのエネルギー変化を考えてきた。ここでは、等方的な速度分布を持つローレンツ因子の電子群により、等方的に入射した光子が散乱される場合の、平均的な電磁波の「放射強度（エネルギーフラックス：単位時間・単位面積あたりの通過エネルギー）」を導く。（厳密には「放射」ではないから「」付き）ここでは、Rybicki et al. (1979) に基づき、Blumenthal & Gould (1970) による方法をとる。

単位時間あたりに散乱される光子の数は、単位時間あたりの入射光子の数と散乱体（電子群）の散乱断面積の積だろう。 $d\epsilon'_i$ のエネルギー帯域の入射光子の運動量空間での数密度を $v'd\epsilon'_i$ とすれば、単位時間あたりの入射光子の数は、電子静止系で等方的に入射する仮定の元では単に運動量空間での光子の数密度に光速 c をかけたものになるから、 $cv'd\epsilon'_i$ である。従って、単位時間あたりに散乱される光子の数は $c\sigma_T v'd\epsilon'_i$ とかける。

入射光子のエネルギーが ϵ'_i である光子の散乱後のエネルギーを ϵ'_f とすれば、散乱後の全エネルギーは、これと散乱される光子の数の積を取れば良いので、 $c\sigma_T \epsilon'_f v'd\epsilon'_i$ となる。これを、さまざまなエネルギー範囲 $d\epsilon'_i$ で入射する光子分足し合わせれば良いので、電子静止系における散乱後の全放射強度は結局、

$$P'_f = c\sigma_T \int \epsilon'_f v'd\epsilon'_i \quad [\text{erg s}^{-1}] \tag{A.166}$$

とかける。

次に、電子の慣性系（電子が運動して見える系：K系）での物理量で書き直すために、以下のようにローレンツ変換の関係を考える。光子の位相空間（運動量空間）における光子の数密度を $n(p)$ (位

相空間分布関数) とし、 $d\epsilon$ の範囲のエネルギーをもつ光子の数密度を $vd\epsilon$ とすると、

$$vd\epsilon = nd^3p \quad (\text{A.167})$$

が成り立つ。位相空間における単位体積あたりの光子の数 n はローレンツ不変量であるから、

$$n = \frac{vd\epsilon}{d^3p} = \frac{v'd\epsilon'}{d^3p'} \quad (\text{A.168})$$

という関係が成り立つ。また、位相空間での微小体積 d^3p とエネルギー ϵ はどちらもローレンツ変換のもとでは $d^3p = \gamma d^3p'$, $\epsilon = \gamma\epsilon'$ という関係であるから、

$$\gamma = \frac{d^3p}{d^3p'} = \frac{\epsilon}{\epsilon'} \quad (\text{A.169})$$

従って、

$$\frac{vd\epsilon}{\epsilon} = \frac{v'd\epsilon'}{\epsilon'} \quad (\text{A.170})$$

が成り立つ。エネルギー放射率はローレンツ変換において不変である (なぜなら、 $P = dE/dt$, $P' = dE'/dt'$ であり、 $dE = \gamma dE'$, $dt = \gamma dt'$.) から、 $P' = P$ であることと上記のローレンツ変換の関係を用いて式 (A.166) は次のように変形できる。

$$P_f = P'_f = c\sigma_T \int \epsilon'_f v' d\epsilon'_i = c\sigma_T \int \epsilon'^2 \frac{v' d\epsilon'_i}{\epsilon'_i} = c\sigma_T \int \epsilon'^2 \frac{vd\epsilon_i}{\epsilon_i} \quad (\text{A.171})$$

ここで、式 (A.165) から、 $\epsilon'_i = \epsilon'_f = \epsilon'$ とした。式 (A.161) より、 $\epsilon' = \gamma(1 - \beta \cos \theta_i)\epsilon_i$ だから、

$$\begin{aligned} P_f &= c\sigma_T \int \gamma^2 (1 - \beta \cos \theta_i)^2 \epsilon_i^2 \frac{vd\epsilon_i}{\epsilon_i} \\ &= c\sigma_T \int \gamma^2 (1 - \beta \cos \theta_i)^2 \epsilon_i vd\epsilon_i \end{aligned} \quad (\text{A.172})$$

ここで、入射光子がやって来る方向は等方的 (isotropic) である場合を考えると、確率密度関数は $P(\theta) = \sin \theta/2$ だから、

$$\langle \cos \theta_i \rangle = \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos \theta_i \sin \theta_i d\theta_i = 0 \quad (\text{A.173})$$

$$\langle \cos^2 \theta_i \rangle = \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos^2 \theta_i \sin \theta_i d\theta_i = \frac{1}{3} \quad (\text{A.174})$$

なので、

$$\langle (1 - \beta \cos \theta_i)^2 \rangle = 1 + \frac{1}{3}\beta^2 \quad (\text{A.175})$$

となる。したがって、逆コンプトン散乱による放射強度は

$$\begin{aligned} P_f &= c\sigma_T \gamma^2 \left(1 + \frac{1}{3}\beta^2\right) \int \epsilon_i vd\epsilon_i \\ &= c\sigma_T \gamma^2 \left(1 + \frac{1}{3}\beta^2\right) U_{\text{ph}} \end{aligned} \quad (\text{A.176})$$

となる。ここで、 U_{ph} は初期 (散乱前) の光子エネルギー密度である。ところで、入射光子による散乱前の放射強度 P_{ini} は

$$P_{\text{ini}} = c\sigma_T \int \epsilon_i v d\epsilon_i = c\sigma_T U_{\text{ph}} \quad (\text{A.177})$$

なので、放射強度のうち、逆コンプトン散乱による増加分を逆コンプトン強度 P_{compt} は、

$$\begin{aligned} P_{\text{compt}} &= P_f - P_{\text{ini}} \\ &= c\sigma_T U_{\text{ph}} \left[\gamma^2 \left(1 + \frac{1}{3}\beta^2 \right) - 1 \right] \\ &= c\sigma_T U_{\text{ph}} \left[\frac{1}{3}\gamma^2\beta^2 + \gamma^2 - 1 \right] \\ &= c\sigma_T U_{\text{ph}} \left[\frac{1}{3}\gamma^2\beta^2 + \gamma^2\beta^2 \right] \\ &= \frac{4}{3}c\sigma_T \gamma^2 \beta^2 U_{\text{ph}} \end{aligned} \quad (\text{A.178})$$

となる。例えば、相対論的電子からのシンクロトロン放射と、逆コンプトン散乱が同じローレンツ因子を持つ電子を起源とする場合がある。逆コンプトン散乱による放射強度がシンクロトロン放射の放射強度に対してどれだけの大きさとなるかは、式 (2.112) と式 (A.178) より、

$$\frac{P_{\text{sync}}}{P_{\text{compt}}} = \frac{4}{3}\sigma_T c [\gamma^2 \beta^2 U_B] \times \frac{3}{4} \frac{1}{c\sigma_T \gamma^2 \beta^2 U_{\text{ph}}} = \frac{U_B}{U_{\text{ph}}} \quad (\text{A.179})$$

とかけ、放射領域の磁場のエネルギー密度と光子のエネルギー密度の比に対応することがわかる。磁場のエネルギー密度が大きい場合、シンクロトロン放射が支配的になるが、光子のエネルギー密度が大きい場合は逆コンプトン散乱が支配的になる。

A.7 非相対論的衝撃波

ここでは、非相対論的な衝撃波による物理量の変化と衝撃波の構造についてレビューする。このレビューは主に教科書「宇宙流体力学 (坂下志郎 et al. 2012)」に従う。

衝撃波面静止系において、物質は定常的に前方から波面に向かって速度 v_1 で流れ込み、波面後方からは速度 v_2 で流れ出ていくことを考える。波面前後の流体の質量フラックス、運動量フラックス、エネルギーフラックスは保存するので、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (\text{A.180})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial \pi_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (\text{A.181})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left(\frac{1}{2}v^2 + \epsilon + \phi \right) \right\} + \nabla \cdot \left\{ \rho \vec{v} \left(\frac{1}{2}v^2 + h + \phi \right) \right\} = 0 \quad (\text{A.182})$$

が成り立つ。ただし、 ρ は流体の質量密度、 v は流体の速度、 ϵ は他に質量あたりの内部エネルギー、 h は単質量あたりのエンタルピー、 ϕ はポテンシャルを表している。 $\pi_{i,k}$ は k 軸に垂直な単位断面積

をとって単位時間に運ばれる運動量の i 成分を表す運動量流速テンソルであり、 $\pi_{i,k} = p\delta_{i,k} + \rho v_i v_k$ で書き表される。定常な流れを考える場合、時間についての偏微分の項は無視できるので、

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (\text{A.183})$$

$$\frac{\partial \pi_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (\text{A.184})$$

$$\nabla \cdot \left\{ \rho \vec{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + h + \phi \right) \right\} = 0 \quad (\text{A.185})$$

が成り立つ。ここで、垂直衝撃波（流体が波面に垂直に流れ込む状況）を考える。式 (A.183) より、

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \quad (\text{A.186})$$

式 (A.184) より、

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2 \quad (\text{A.187})$$

式 (A.185) より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} v_1^2 + h_1 + \phi &= \frac{1}{2} v_2^2 + h_2 + \phi \\ \frac{1}{2} v_1^2 + h_1 &= \frac{1}{2} v_2^2 + h_2 \\ \frac{1}{2} v_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} &= \frac{1}{2} v_2^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} \end{aligned} \quad (\text{A.188})$$

となる。ただし、流体は理想気体だと仮定し、断熱比 γ を用いてエンタルピー h を書き直した。式 (A.186)、式 (A.187)、式 (A.188) の3つの式は「Rankine-Hugoniot の関係式」と呼び、上流の物理量が与えられると下流の物理量を与える式になっている。ここで、

$$x = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2}, \quad y = \frac{p_2}{p_1}, \quad a_1^2 = \frac{\gamma p_1}{\rho_1}, \quad M_1 = \frac{v_1}{a_1} \quad (\text{A.189})$$

とおき式 (A.187) を書き換えると、

$$\begin{aligned} \frac{v_1^2}{a_1^2} \rho_1 + \frac{p_1}{a_1^2} &= \frac{1}{a_1^2} (\rho_2 v_2^2 + p_2) \\ \frac{v_1^2}{a_1^2} + \frac{1}{a_1^2} \frac{p_1}{\rho_1} &= \frac{1}{a_1^2} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} v_2^2 + \frac{p_2}{\rho_1} \right) \\ \frac{v_1^2}{a_1^2} + \frac{1}{a_1^2} \frac{a_1^2}{\gamma} &= \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{v_1^2}{a_1^2} \frac{v_2^2}{v_1^2} + \frac{1}{a_1^2} \frac{p_1}{\rho_1} \frac{p_2}{p_1} \\ M_1^2 + \frac{1}{\gamma} &= x M_1^2 \frac{1}{x^2} + \frac{1}{a_1^2} \frac{a_1^2}{\gamma} y \\ M_1^2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) &= \frac{y-1}{\gamma} \end{aligned} \quad (\text{A.190})$$

となり、同様に式 (A.188) についても書き換えると、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{v_1^2}{a_1^2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} \frac{1}{a_1^2} &= \frac{1}{2} \frac{v_2^2}{a_1^2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} \frac{1}{a_1^2} \\
\frac{1}{2} \frac{v_1^2}{a_1^2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} \frac{1}{a_1^2} &= \frac{1}{2} \frac{v_1^2 v_2^2}{a_1^2 v_1^2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\rho_1 p_2 p_1}{\rho_2 p_1 \rho_1 a_1^2} \\
\frac{1}{2} M_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{a_1^2}{\gamma} \frac{1}{a_1^2} &= \frac{1}{2} M_1^2 \frac{1}{x^2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{y}{x} \frac{a_1^2}{\gamma} \frac{1}{a_1^2} \\
\frac{1}{2} M_1^2 + \frac{1}{\gamma-1} &= \frac{1}{2} \frac{M_1^2}{x^2} + \frac{1}{\gamma-1} \frac{y}{x} \\
M_1^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) &= \frac{2(yx^{-1} - 1)}{\gamma-1}
\end{aligned} \tag{A.191}$$

となる。ここで、 M_1 は上流のマッハ数である。 $x \neq 1, y \neq 1$ として、この2式から x と y について解くと

$$x = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{(\gamma-1)M_1^2 + 2} \tag{A.192}$$

$$y = \frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}{\gamma+1} \tag{A.193}$$

とかける。さらに、波面前後での温度の関係と波面後方の Mach 数を求めると

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2} = \frac{[2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)][(\gamma-1)M_1^2 + 2]}{(\gamma+1)^2 M_1^2} \tag{A.194}$$

$$M_2^2 = \left(\frac{v_2}{a_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1 v_1 v_2}{a_2 a_1 v_1}\right)^2 = \frac{(\gamma-1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)} \tag{A.195}$$

となる。式 (A.195) の分子と分母の差をとると、

$$\{(\gamma-1)M_1^2 + 2\} - \{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)\} = (\gamma+1)(1 - M_1^2) \tag{A.196}$$

であるから、 $M_1^2 > 1$ のとき、 $M_2^2 < 1$ となることがわかる。つまり、衝撃波面に超音速 (super-sonic: 媒質中で移動する物体と媒質の相対速度が媒質の音速を超える速度) で流入した流体は波面から亜音速 (sub-sonic: 媒質中の音速に近い速度) で流出することがわかる。

次に、 M_1 が十分に大きい場合の物理量の変化を調べる。(A.192) 式より、

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1 + 2/M_1^2} \xrightarrow{M_1 \gg 1} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \tag{A.197}$$

となり、比熱比 $\gamma = 5/3$ とすると $\rho_2 \sim 4\rho_1$ となり、粒子数密度については上流に対して下流では4倍に圧縮されることがわかる。一方、式 (A.193) より

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \xrightarrow{M_1 \gg 1} \propto M_1^2 \tag{A.198}$$

となり、圧力については上流に対して下流は M_1^2 に比例して（いくらでも）大きくなることがわかる。また、式 (A.194) より

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{y}{x} \xrightarrow{M_1 \gg 1} \propto M_1^2 \quad (\text{A.199})$$

となり、温度についても上流に対して下流では M_1^2 に比例して（いくらでも）大きくなる。例えば、 $\gamma = 5/3$ 、 $M_1 = 100$ とすると、 $T_2/T_1 \sim 3 \times 10^3$ になる。 $T_1 \sim 100$ K とすると、 $T_2 \sim 3 \times 10^5$ K となり、衝撃波後方（下流）では超高温になることがわかる。ここで、状態方程式は、粒子の一個の質量 $m = \mu H$ で書き換えると、

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{k}{\mu H} \rho_i T_i = \frac{k}{m} \rho_i T_i \\ \therefore kT_i &= m \frac{p_i}{\rho_i} \end{aligned} \quad (\text{A.200})$$

という関係式を得る。下流において、この式を適用し (A.194) を代入すると

$$\begin{aligned} kT_2 &= m \frac{p_i}{\rho_i} \\ &= m \frac{[2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)][(\gamma - 1)M_1^2 + 2]}{(\gamma + 1)^2 M_1^2} \frac{p_1}{\rho_1} \\ &= m \frac{[2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)][(\gamma - 1)M_1^2 + 2]}{(\gamma + 1)^2 M_1^2} \frac{a_1^2}{\gamma} \left(\because \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{a_1^2}{\gamma} \right) \\ &= m \frac{[2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)][(\gamma - 1)M_1^2 + 2]}{(\gamma + 1)^2 M_1^2} \frac{1}{\gamma} \frac{v_1^2}{M_1^2} \left(\because a_1 = \frac{v_1}{M_1} \right) \\ &= \frac{2\gamma(\gamma - 1)M_1^4 - (\gamma^2 - 6\gamma + 1)M_1^2 - 2(\gamma - 1)}{\gamma(\gamma + 1)^2 M_1^4} m v_1^2 \\ &= \left[\frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} - \frac{\gamma^2 - 6\gamma + 1}{\gamma(\gamma + 1)^2 M_1^2} - \frac{2(\gamma - 1)}{\gamma(\gamma + 1)^2 M_1^4} \right] m v_1^2 \\ &\xrightarrow{M_1 \rightarrow \infty} \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} m v_1^2 \end{aligned} \quad (\text{A.201})$$

$$= \frac{3}{16} m v_1^2 \quad (\text{if } \gamma = 5/3) \quad (\text{A.202})$$

となる。これは左辺が下流の熱エネルギーを、右辺は上流の運動エネルギーを表している。つまり、強い衝撃波である時、上流の運動エネルギーの一部が衝撃波により下流の熱エネルギーに転換されていると理解することができる。

2つの流体が衝突をすると、その流体の境界に「接触不連続面」が形成され、その境界の前方と後方にそれぞれ「順行衝撃波」と「逆行衝撃波」が生じる。ここまで、それぞれの流体静止系での粒子数密度と圧力を定義して、shock jump condition を考えてきたが、超新星爆発などの現象を取り扱うときには、実験室系（順行衝撃波上流での静止系）で物理量を扱えるようにしたい。実験室系での衝撃波の構造を図A.4に示す。

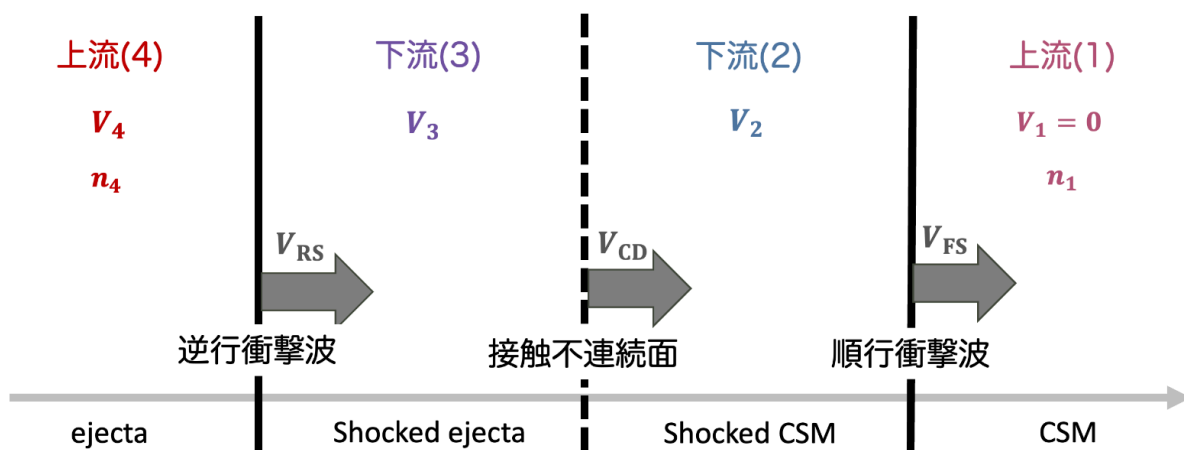


図 A.4: 実験室系 (星間空間静止系・中心エンジン静止系) から見た衝撃波の構造。

順行衝撃波が通過していない領域が「上流 (1)」であり、超新星残骸などの文脈においては星周物質 (CSM) に対応する。一方で、順行衝撃波が通過した領域が「下流 (2)」であり、これは衝撃波が通過した星周物質 (Shocked CSM) に対応する。逆行衝撃波は噴出物 (ejecta) を通過することで発生する shock であり、ejecta を通過した領域が「下流 (3)」で Shocked ejecta に対応し、ejecta のまだ通過していない領域が「上流 (4)」で、ejecta に対応する。順行衝撃波と逆行衝撃波を境にした上流と下流の物理量は、それぞれ shock jump condition を満たしている。ただし、 V_i は領域 (1) 静止系で定義した領域 (i) の流体の速度である。一方で、 n_i と p_i はそれぞれの領域静止系で定義した粒子数密度である。

接触不連続面は領域 (2) と (3) の流体に静止して運動しているはずなので、 $V_{CD} = V_2 = V_3$ である。実験室系 (順行衝撃波上流での静止系) に対する流体の速度が V_i とした時の、実験室系での順行衝撃波の速度 V_{FS} 、逆行衝撃波の速度 V_{RS} を求める。

まず、shock jump condition を扱って関係式を立てるために、衝撃波静止系での流体の物理量を検討する。順行衝撃波は上流 (1) 静止系で速度 V_{FS} で運動していたので、順行衝撃波静止系では上流 (1) が速度 $V_1 - V_{FS} = -V_{FS}$ で順行衝撃波の前方 (進行方向) から向かってくることになる。一方、ejecta である上流 (4) は上流 (1) 静止系で速度 V_4 で運動していたので、逆行衝撃波静止系では上流 (4) が速度 $V_4 - V_{RS}$ で逆行衝撃波の前方 (進行方向) から向かってくることになる。以上から、順行衝撃波と逆行衝撃波それぞれの静止系での衝撃波の構造は図A.5のようになる。波面前後で shock jump condition が成り立つので、下流 (2) と (3) に示した衝撃波面静止系での流体の速度と流体静止系での密度は上流の物理量を用いて書き表した。

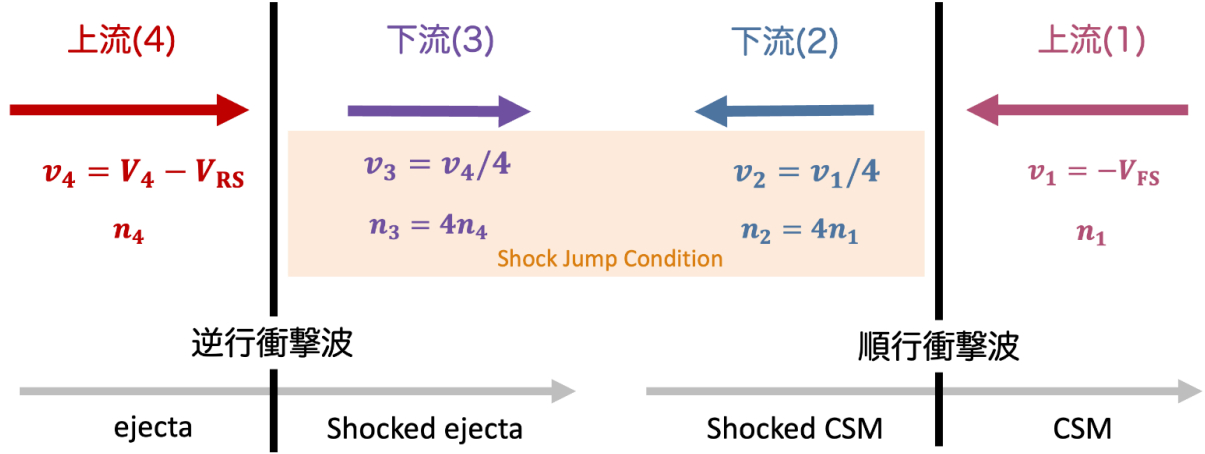


図 A.5: 領域 (1) と (2) に対しては順行衝撃波静止系、領域 (3) と (4) に対しては逆行衝撃波静止系から見た衝撃波の構造。順行衝撃波と逆行衝撃波を境にした上流と下流の物理量は、それぞれ shock jump condition を満たしている。ただし、 v_i は領域 (1) 静止系で定義した領域 (i) の流体の速度である。一方で、 n_i と p_i はそれぞれの領域静止系で定義した粒子数密度である。

順行衝撃波下流である、領域 (2) の圧力は

$$\begin{aligned}
 p_2 &= n_2 k T_2 \\
 &= (4n_1) \times \frac{3}{16} m v_1^2 \quad \because n_2 \sim 4n_1, \quad (A.201) \\
 &= \frac{3}{4} n_1 m V_{FS}^2 \quad \because v_1 = -V_{FS} \quad (A.203)
 \end{aligned}$$

同様に、逆行衝撃波の下流の圧力は

$$\begin{aligned}
 p_3 &= n_3 k T_3 \\
 &= (4n_4) \times \frac{3}{16} m v_4^2 \\
 &= \frac{3}{4} n_4 m (V_4 - V_{RS})^2 \quad (A.204)
 \end{aligned}$$

となる。接触不連続面で $p_2 = p_3$ を満たしているはずなので、

$$\begin{aligned}
 p_2 &= p_3 \\
 \frac{3}{4} n_1 m V_{FS}^2 &= \frac{3}{4} n_4 m (V_4 - V_{RS})^2 \\
 n_1 V_{FS}^2 &= n_4 (V_4 - V_{RS})^2 \quad (A.205)
 \end{aligned}$$

また、 $V_{CD} = V_2 = V_3$ が成り立つので

$$\begin{aligned}
V_2 &= V_3 \\
v_2 + V_{FS} &= v_3 + V_{RS} \\
\frac{1}{4}v_1 + V_{FS} &= \frac{1}{4}v_4 + V_{RS} \\
-\frac{1}{4}V_{FS} + V_{FS} &= \frac{1}{4}(V_4 - V_{RS}) + V_{RS} \\
\therefore \frac{3}{4}V_{FS} &= \frac{1}{4}V_4 + \frac{3}{4}V_{RS}
\end{aligned} \tag{A.206}$$

式 (A.205) と式 (A.206) から、 V_{FS} と V_{RS} は V_4 と ejecta、CSM の粒子数密度 n_4 , n_1 のみを用いて以下のように書き下せる。

$$V_{RS} = V_4 \times \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{\frac{n_1}{n_4}}}{3 \left(\sqrt{\frac{n_1}{n_4}} + 1 \right)} & 1 \text{ つ目の解} \\ \frac{3 + \sqrt{\frac{n_1}{n_4}}}{3 \left(1 - \sqrt{\frac{n_1}{n_4}} \right)} & 2 \text{ つ目の解} \end{cases} \tag{A.207}$$

$$V_{FS} = V_4 \times \begin{cases} \frac{4}{3 \left(\sqrt{\frac{n_1}{n_4}} + 1 \right)} & 1 \text{ つ目の解} \\ \frac{4}{3 \left(1 - \sqrt{\frac{n_1}{n_4}} \right)} & 2 \text{ つ目の解} \end{cases} \tag{A.208}$$

はじめは $n_4 \gg n_1$ であり $V_{RS} > 0$ で外側に広がっていく。膨張とともに $n_4 \propto R^{-3}$ で減少していくが、2 つ目の解の場合、 $n_1 \sim n_4$ で発散してしまうため、物理的に非整合である。一方、1 つ目の解の場合では、 $\sqrt{n_1/n_4} \sim 3$ となる半径で $V_{RS} < 0$ となり、逆行衝撃波は内側に進むという直感とも整合的な描像を示す。また、接触不連続面上流静止系から見た速度 V_{CD} は

$$\begin{aligned}
V_{CD} &= V_2 = \frac{3}{4}V_{12} \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{n_1}{n_4}} + 1 \right)} V_4
\end{aligned} \tag{A.209}$$

とかける。以上から、順行衝撃波、接触不連続面、逆行衝撃波の上流 (= 領域 (1)) 静止系から見た速度は

$$V_{FS} : V_{CD} : V_{RS} = 1 : \frac{3}{4} : \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{n_1}{n_4}} \right) \tag{A.210}$$

という関係性を満たすことがわかる。

A.8 相対論的衝撃波

相対論的衝撃波における衝撃波面静止系での上流と下流の速度 (式 (2.38) と式 (2.39)) の詳細な導出を示す。式 (2.36) と式 (2.37) から、上流と下流の速度 $\beta_1 = v_1/c$, $\beta_2 = v_2/c$ をそれぞれの熱力

学量 (ϵ_i, p_i) で表すことができる。式 (2.36) と式 (2.37) を β_i を用いて書き下すと、

$$(\epsilon_1 + p_1) \frac{\beta_1}{1 - \beta_1^2} = (\epsilon_2 + p_2) \frac{\beta_2}{1 - \beta_2^2} \quad (\text{A.211})$$

$$(\epsilon_1 + p_1) \frac{\beta_1^2}{1 - \beta_1^2} + p_1 = (\epsilon_2 + p_2) \frac{\beta_2^2}{1 - \beta_2^2} + p_2 \quad (\text{A.212})$$

となる。式 (A.212) より、

$$\frac{\beta_2^2}{1 - \beta_2^2} = \frac{\epsilon_1 + p_1}{\epsilon_2 + p_2} \frac{\beta_1^2}{1 - \beta_1^2} + \frac{p_1 - p_2}{\epsilon_2 + p_2} \equiv a \quad (\text{A.213})$$

と計算をしやすいように a を導入する。すると、 β_2 は a を用いて

$$\beta_2 = \sqrt{\frac{a}{1 + a}} \quad (\text{A.214})$$

とかける。これを式 (A.211) に代入すると

$$\begin{aligned} (\epsilon_1 + p_1) \frac{\beta_1}{1 - \beta_1^2} &= (\epsilon_2 + p_2) a \sqrt{\frac{1 + a}{a}} \\ (\epsilon_1 + p_1)^2 \frac{\beta_1^2}{(1 - \beta_1^2)^2} &= (\epsilon_2 + p_2)^2 a (1 + a) \end{aligned} \quad (\text{A.215})$$

となる。見通しをつけるために、 $\beta_1^2 = x$ とおくと、

$$(\epsilon_1 + p_1)^2 \frac{x}{(1 - x)^2} = (\epsilon_2 + p_2)^2 a (1 + a) \quad (\text{A.216})$$

となる。この右辺にある a を x を用いて消去することで、 x についての方程式の形にしてみる。この右辺は式 (A.213) を用いて、

$$\begin{aligned} (\epsilon_2 + p_2)^2 a (1 + a) &= (\epsilon_2 + p_2)^2 \left[\frac{\epsilon_1 + p_1}{\epsilon_2 + p_2} \frac{x}{1 - x} + \frac{p_1 - p_2}{\epsilon_2 + p_2} \right] \left[1 + \frac{\epsilon_1 + p_1}{\epsilon_2 + p_2} \frac{x}{1 - x} + \frac{p_1 - p_2}{\epsilon_2 + p_2} \right] \\ &= \left[(\epsilon_1 + p_1) \frac{x}{1 - x} + (p_1 - p_2) \right] \left[(\epsilon_2 + p_2) + (\epsilon_1 + p_1) \frac{x}{1 - x} + p_1 - p_2 \right] \\ &= \left[(\epsilon_1 + p_1) \frac{x}{1 - x} + (p_1 - p_2) \right] \left[(\epsilon_1 + p_1) \frac{x}{1 - x} + p_1 + \epsilon_2 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.217})$$

となり、さらに

$$\begin{aligned} &(\epsilon_2 + p_2)^2 a (1 + a) (1 - x)^2 \\ &= [(\epsilon_1 + p_1)x + (p_1 - p_2)(1 - x)] [(\epsilon_1 + p_1)x + (p_1 + \epsilon_2)(1 - x)] \\ &= (\epsilon_1 + p_1)^2 x^2 + (\epsilon_1 + p_1)(2p_1 - p_2 + \epsilon_2)(1 - x)x + (p_1 - p_2)(p_1 + \epsilon_2)(1 - x)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.218})$$

とかけるから、式 (A.216) は

$$\begin{aligned} (\epsilon_1 + p_1)^2 x &= (\epsilon_2 + p_2)^2 a (1 + a) (1 - x)^2 \\ &= (\epsilon_1 + p_1)^2 x^2 + (\epsilon_1 + p_1)(2p_1 - p_2 + \epsilon_2)(1 - x)x + (p_1 - p_2)(p_1 + \epsilon_2)(1 - x)^2 \\ (\epsilon_1 + p_1)^2 x(1 - x) &= (\epsilon_1 + p_1)(2p_1 - p_2 + \epsilon_2)(1 - x)x + (p_1 - p_2)(p_1 + \epsilon_2)(1 - x)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.219})$$

$x = \beta_1^2 \neq 1$ であることに注意して、 $(1-x)$ で両辺割り、 x について解く。

$$\begin{aligned}
(\epsilon_1 + p_1)^2 x &= (\epsilon_1 + p_1)(2p_1 - p_2 + \epsilon_2)x + (p_1 - p_2)(p_1 + \epsilon_2)(1-x) \\
(\epsilon_1 + p_1)x(\epsilon_1 + p_1 - 2p_1 + p_2 - \epsilon_2) &= (p_1 - p_2)(p_1 + \epsilon_2)(1-x) \\
(\epsilon_1 + p_1)(\epsilon_1 - \epsilon_2 - p_1 + p_2)x &= (p_1 - p_2)(p_1 + \epsilon_2)(1-x) \\
(\epsilon_1 + p_2)(\epsilon_1 - \epsilon_2)x &= (p_1 - p_2)(p_1 + \epsilon_2) \\
x &= \frac{(p_1 - p_2)(p_1 + \epsilon_2)}{(\epsilon_1 + p_2)(\epsilon_1 - \epsilon_2)} \tag{A.220}
\end{aligned}$$

従って。

$$\beta_1 = \frac{v_1}{c} = \sqrt{\frac{(p_2 - p_1)(\epsilon_2 + p_1)}{(\epsilon_2 - \epsilon_1)(\epsilon_1 + p_2)}} \tag{A.221}$$

また、同様に

$$\beta_2 = \frac{v_2}{c} = \sqrt{\frac{(p_2 - p_1)(\epsilon_1 + p_2)}{(\epsilon_2 - \epsilon_1)(\epsilon_2 + p_1)}} \tag{A.222}$$

となる。

次に、相対論的衝撃波の場合のランキン・ユゴニオの関係式の詳細な導出を示す。式 (2.36) の両辺に $c^2/(\epsilon_1 + p_1)\gamma_1^2 v_2$ をかけ、式 (2.44) の両辺に $1/n_1\gamma_1 v_2$ をかけると次のように書き表せる。

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\epsilon_2 + p_2}{\epsilon_1 + p_1} \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2} \tag{A.223}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2 \gamma_2}{n_1 \gamma_1} \tag{A.224}$$

従って、 v_1/v_2 を消去し

$$\begin{aligned}
\frac{\epsilon_2 + p_2}{\epsilon_1 + p_1} \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2} &= \frac{n_2 \gamma_2}{n_1 \gamma_1} \\
\frac{n_2}{n_1} &= \frac{\epsilon_2 + p_2}{\epsilon_1 + p_1} \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \\
\frac{(\epsilon_1 + p_1)\gamma_1}{n_1} &= \frac{(\epsilon_2 + p_2)\gamma_2}{n_2} \tag{A.225}
\end{aligned}$$

一方で、 γ_1 や γ_2 は式 (2.40) や式 (2.41) で書き下せていたので、

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{n_2 v_2}{n_1 v_1} \gamma_2 \\
&= \frac{n_2}{n_1} \frac{v_2}{c} \frac{c}{v_1} \sqrt{\frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)(\epsilon_2 + p_1)}{(\epsilon_2 + p_2)(\epsilon_2 - \epsilon_1 - p_2 + p_1)}} \\
&= \frac{n_2}{n_1} \sqrt{\frac{(p_2 - p_1)(\epsilon_1 + p_2)}{(\epsilon_2 - \epsilon_1)(\epsilon_2 + p_1)}} \sqrt{\frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)(\epsilon_1 + p_2)}{(p_2 - p_1)(\epsilon_2 + p_1)}} \sqrt{\frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)(\epsilon_2 + p_1)}{(\epsilon_2 + p_2)(\epsilon_2 - \epsilon_1 - p_2 + p_1)}} \\
&= \frac{\epsilon_1 + p_2}{n_1} n_2 \sqrt{\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{(\epsilon_2 + p_1)(\epsilon_2 + p_2)(\epsilon_2 - \epsilon_1 - p_2 + p_1)}} \tag{A.226}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= \frac{n_1 v_1}{n_2 v_2} \gamma_1 \\
&= \frac{n_1}{n_2} \frac{v_1}{c} \frac{c}{v_2} \sqrt{\frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)(\epsilon_1 + p_2)}{(\epsilon_1 + p_1)(\epsilon_2 - \epsilon_1 - p_2 + p_1)}} \\
&= \frac{n_1}{n_2} \sqrt{\frac{(p_2 - p_1)(\epsilon_2 + p_1)}{(\epsilon_2 - \epsilon_1)(\epsilon_1 + p_2)}} \sqrt{\frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)(\epsilon_2 + p_1)}{(p_2 - p_1)(\epsilon_1 + p_2)}} \sqrt{\frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)(\epsilon_1 + p_2)}{\sqrt{(\epsilon_1 + p_1)(\epsilon_2 - \epsilon_1 - p_2 + p_1)}}} \\
&= \frac{\epsilon_2 + p_1}{n_2} n_1 \sqrt{\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{(\epsilon_1 + p_2)(\epsilon_1 + p_1)(\epsilon_2 - \epsilon_1 - p_2 + p_1)}} \tag{A.227}
\end{aligned}$$

従って、式 (A.225) の γ_1 と γ_2 を消去して、

$$\begin{aligned}
\frac{(\epsilon_1 + p_1)(\epsilon_1 + p_2)}{n_1^2} \frac{n_2}{\sqrt{(\epsilon_2 + p_1)(\epsilon_2 + p_2)}} &= \frac{(\epsilon_2 + p_2)(\epsilon_2 + p_1)}{n_2^2} \frac{n_1}{(\epsilon_1 + p_2)(\epsilon_1 + p_1)} \\
\frac{[(\epsilon_1 + p_1)(\epsilon_1 + p_2)]^{3/2}}{n_1^3} &= \frac{[(\epsilon_2 + p_2)(\epsilon_2 + p_1)]^{3/2}}{n_2^3} \\
\frac{(\epsilon_1 + p_1)(\epsilon_1 + p_2)}{n_1^2} &= \frac{(\epsilon_2 + p_2)(\epsilon_2 + p_1)}{n_2^2} \tag{A.228}
\end{aligned}$$

と書き換えられる。これが、相対論的衝撃波の場合のランキン・ユゴニオの関係式である。

A.9 MCMC 法と CNS 法の比較

本研究で使用した、GRB 残光の光度曲線の計算コード `afterglowpy` を用いて、3つの周波数帯 (3×10^{14} Hz、 5×10^{14} Hz、 1×10^{18} Hz) の模擬データを作成し、この模擬データに対して、MCMC 法 (`emcee`) と Clustered Nested Sampling 法 (`Multinest`) のそれぞれの方法でベイズ推定を行い比較することで、両者のベイズ推定ツールの評価能力を確かめるとともに、両者の間に生じる違いや特徴をまとめる。

いずれの計算においても、青山学院大学山崎研究室が保持・運用している計算機サーバー (`astro6`) を使用し (4.4 節を参照)、16 コアの並列計算の結果である。また、`emcee` を用いたサンプリングでは、連鎖の長さを 1×10^5 step、並列に探索する数を 32 walker、最大対数尤度の収束判定に用いる許容誤差を 1×10^{-5} 、自己相関時間を計算するときの許容誤差係数を `tol` = 10、サンプルの間引き間隔を `thin` = 100、初期ステップを捨てる長さを、全ステップの自己相関時間の 2 倍、と設定した。これらの数値は経験値に基づくものであり、収束しない場合はこれらの値を調整することで、定常分布を得るための試行錯誤が必要となる。一方で、`MultiNest` を用いたサンプリングでは、ライブポイント (live point) 数を 500、ベイズ証拠の不確かさの許容範囲を $\Delta Z < 0.5$ と設定した。これらの数値も経験値に基づくものであり、自動的に終了判定を行わない場合には、適宜調整する必要がある。

それぞれの計算ツールを用いてベイズ推定を行い、得られた事後分布の中央値と分散と、それぞれの計算にかかった時間を表 A.2 に示す。模擬データの作成の際に仮定したモデルパラメータ値を “Answer” の列に示した。また、模擬データとその理論線の光度曲線は図 A.8 に示した。

表 A.2: `afterglowpy` によって作成した模擬観測データに対して、`afterglowpy` のモデル (GEM) を仮定し、MCMC 法 (`emcee`) と CNS 法 (`MultiNest`) を用いたベイズ推量により得られた 1 次元事後分布の中央値と分散をまとめた表。括弧の中は探索パラメータの数。

Model	Answer	<code>emcee</code> (7)	<code>MultiNest</code> (7)	<code>MultiNest</code> (6)	<code>emcee</code> (5)	<code>MultiNest</code> (5)
$\log(E_0[\text{erg}])$	53	$53.00^{+0.23}_{-0.17}$	$53.02^{+0.52}_{-0.31}$	$53.03^{+0.48}_{-0.31}$	$53.00^{+0.05}_{-0.05}$	$53.00^{+0.11}_{-0.09}$
$\log(\Gamma_0)$	2	$1.99^{+0.18}_{-0.14}$	$2.02^{+0.39}_{-0.25}$	$2.03^{+0.37}_{-0.26}$	$2.00^{+0.02}_{-0.01}$	$2.00^{+0.03}_{-0.03}$
$\theta_c[\text{erg}]$	0.05	$0.05^{+0.02}_{-0.02}$	$0.05^{+0.04}_{-0.05}$	$0.05^{+0.03}_{-0.03}$	$0.05^{+0.00}_{-0.00}$	$0.05^{+0.00}_{-0.00}$
$\alpha = \theta_j/\theta_c$	2	2 fixed	2 fixed	2 fixed	2 fixed	2 fixed
$\beta = \theta_{\text{obs}}/\theta_c$	0.5	0.5 fixed	0.5 fixed	0.5 fixed	0.5 fixed	0.5 fixed
$\log(n_0[\text{cm}^{-3}])$	0	$0.05^{+0.92}_{-1.2}$	$-0.09^{+1.64}_{-2.55}$	$-0.18^{+1.64}_{-2.41}$	0 fixed	0 fixed
p	2.2	$2.20^{+0.01}_{-0.01}$	$2.20^{+0.02}_{-0.02}$	2.2 fixed	2.2 fixed	2.2 fixed
$\log(\epsilon_e)$	-1	$-0.99^{+0.2}_{-0.24}$	$-1.02^{+0.32}_{-0.52}$	$-1.04^{+0.33}_{-0.48}$	$-1.00^{+0.03}_{-0.04}$	$-1.00^{+0.07}_{-0.08}$
$\log(\epsilon_B)$	-2	-2.03^{+0}_{-0}	$-1.95^{+1.52}_{-1.01}$	$-1.89^{+1.43}_{-1.00}$	$-2.00^{+0.0}_{-0.0}$	$-2.00^{+0.05}_{-0.05}$
$\log(f_e)$	0	0 fixed	0 fixed	0 fixed	0 fixed	0 fixed
time [s]	-	8.3×10^4	1849	1208	8.3×10^4	912
$\ln Z$	-	-	543.4	546.6	-	549.2

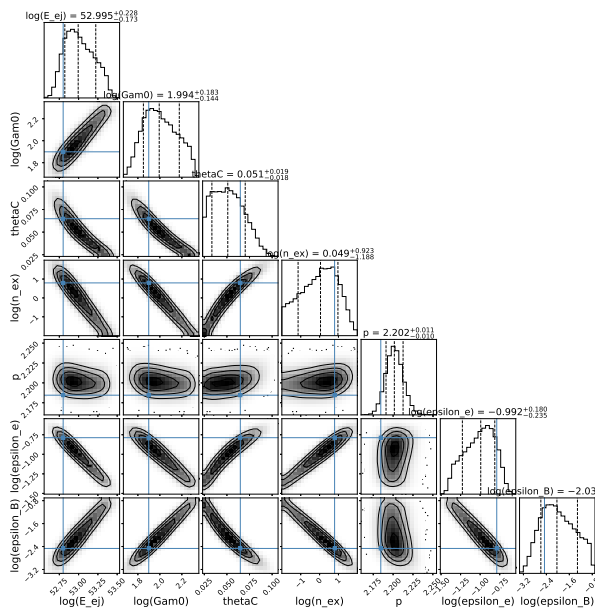
表A.2 から、`emcee` と `MultiNest` の両方で、正解の値を中央値に示す事後分布を得られたことが確認できる。一方で、計算時間には大きな差があり、`MultiNest` の方が `emcee` に比べて 2 桁程度の計算時間の短縮が表れている。尤度の計算時間は、同じ `afterglowpy` を用いているため両者で変わらない。したがって、計算が終了するまでの試行回数の違いによるものだと考えられる。実際、`emcee` は指定した連鎖の長さ分の 1×10^5 回、尤度を計算しているが、`MultiNest` は表A.3 に示したように、 6.4×10^4 回に達しないサンプル数で計算を終了しており、計算数自体が少ない。`emcee` の場合、収束に必要な連鎖の長さは、計算を走らせてみないとわからないことがほとんどであるため、`MultiNest` に比べて長い時間をかけて結果が出るのを待っても、収束条件を満たしていないが故に、結果が出力されない、ということもある。その場合、連鎖の長さや、間引き間隔、許容誤差などの複数のパラメータを調整する必要がある。

`MultiNest` の結果から、探索パラメータの減少に応じて収束までにかかる計算時間が短縮されていることがわかる。これは、探索するパラメータ空間の減少に伴い、収束判定に必要なサンプル数が減り、尤度の計算回数が少なくなっているからだと考えられる。実際、それぞれの計算での全サンプル数 (Total Sample) や、最後のサンプルの採択率 (Acceptance Rate) とともに表 A.3 に示すと、

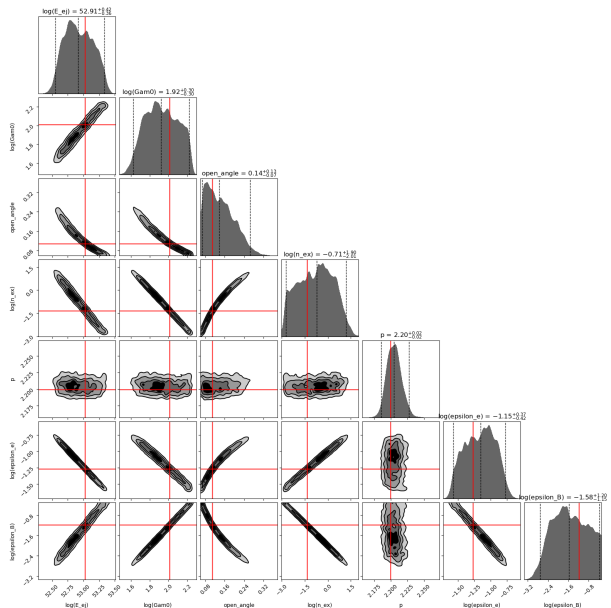
表 A.3: 計算条件とそれぞれの収束までの計算時間と全サンプル数および最終採択率の整理

パラメータ数	並列数	所要時間	Total Sample	Acceptance Rate
7	16	1849 秒	63539	0.228
6	16	1208 秒	41485	0.314
5	16	912 秒	31276	0.414

となる。探査パラメータ数が少ない方が全サンプル数は少なくなるだけでなく、サンプリング効率も高い状態で探査が終了していることがわかる。MultiNest のアルゴリズムからもわかる通り (3.4 節参照)、探査が進むにつれて、サンプルの採択率が低下する。極端に採択率が低いと、大量に尤度を計算しているにもかかわらず、サンプル数がたまらず、収束条件を満たせないため、計算が終わらないことがある。こういう場合は、一度計算を止めて、ライブポイント数やベイズ証拠の不確かさの数値を変化させるなどの試行錯誤が必要になる。

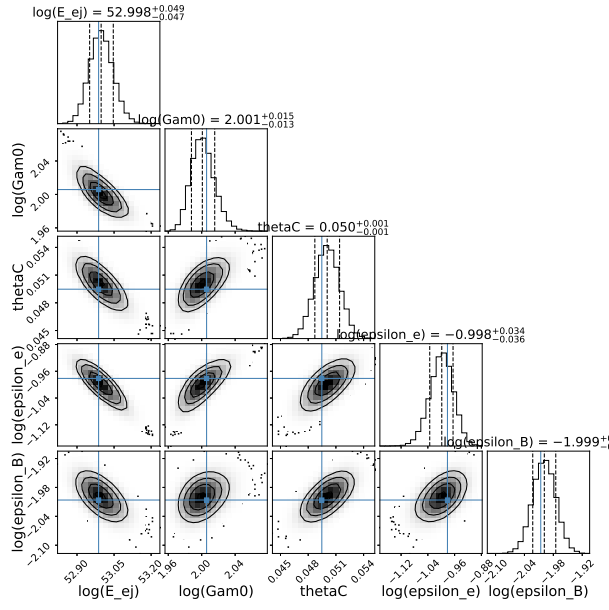


(a) emcee の結

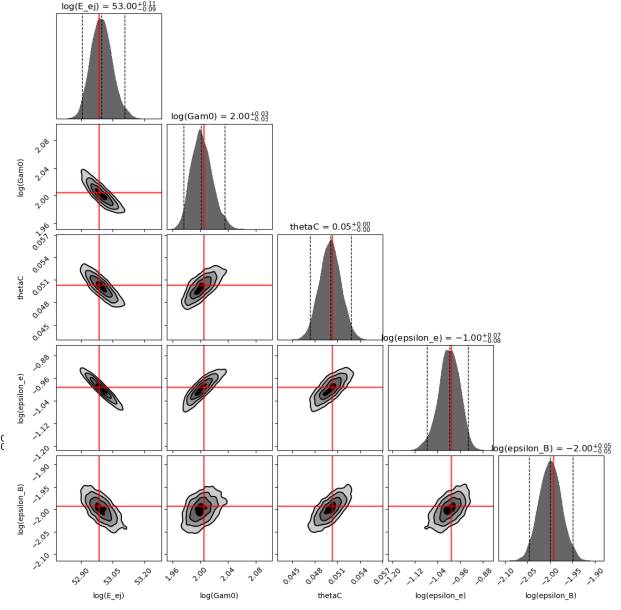


(b) MultiNest の結果

図 A.6: 7つ (E_0 , Γ_0 , θ_c , n_0 , p , ϵ_e , ϵ_B) のパラメータ推定により得られた事後分布 (コーナプロット)



(a) emcee の結果



(b) MultiNest の結果

図 A.7: 5 つ (E_0 , Γ_0 , θ_c , ϵ_e , ϵ_B) の パラメータ推定により得られた事後分布 (コーナープロット)

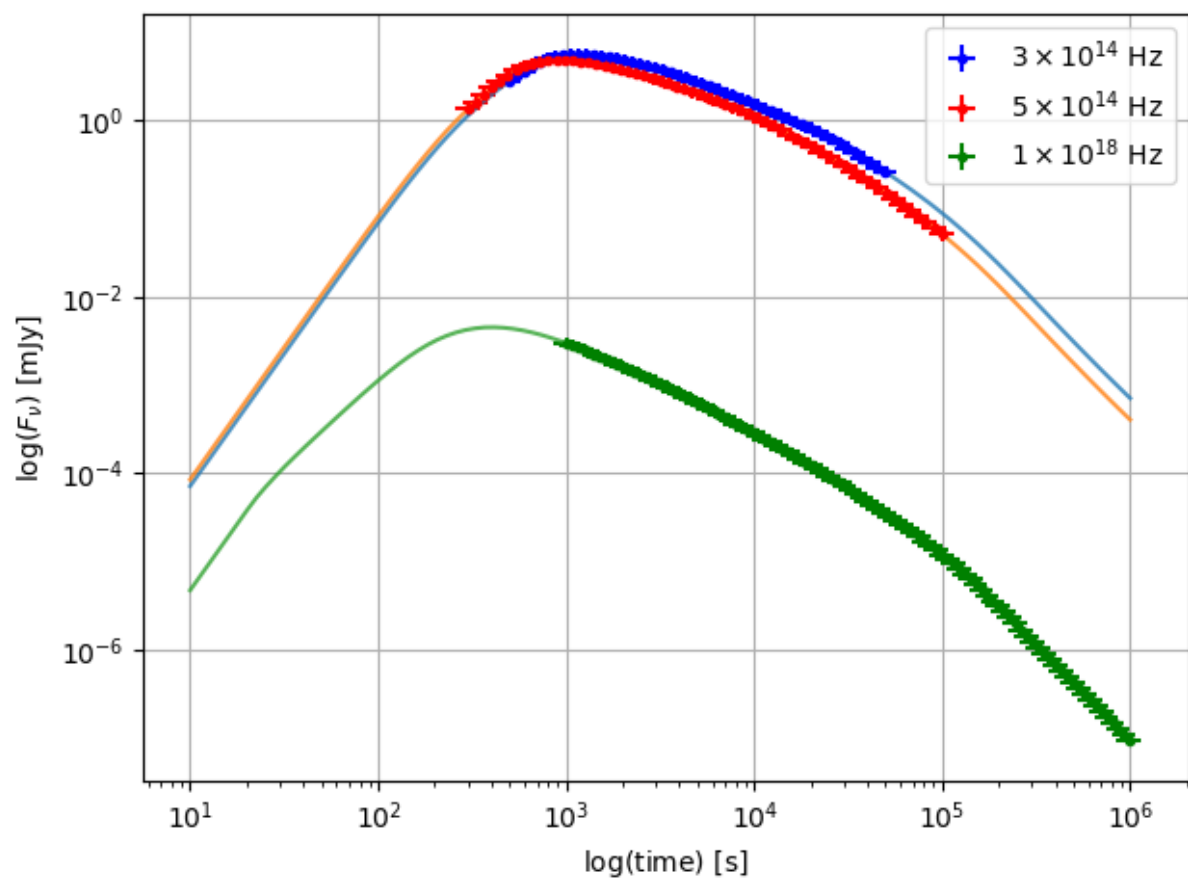


図 A.8: 模擬データとその理論線の光度曲線

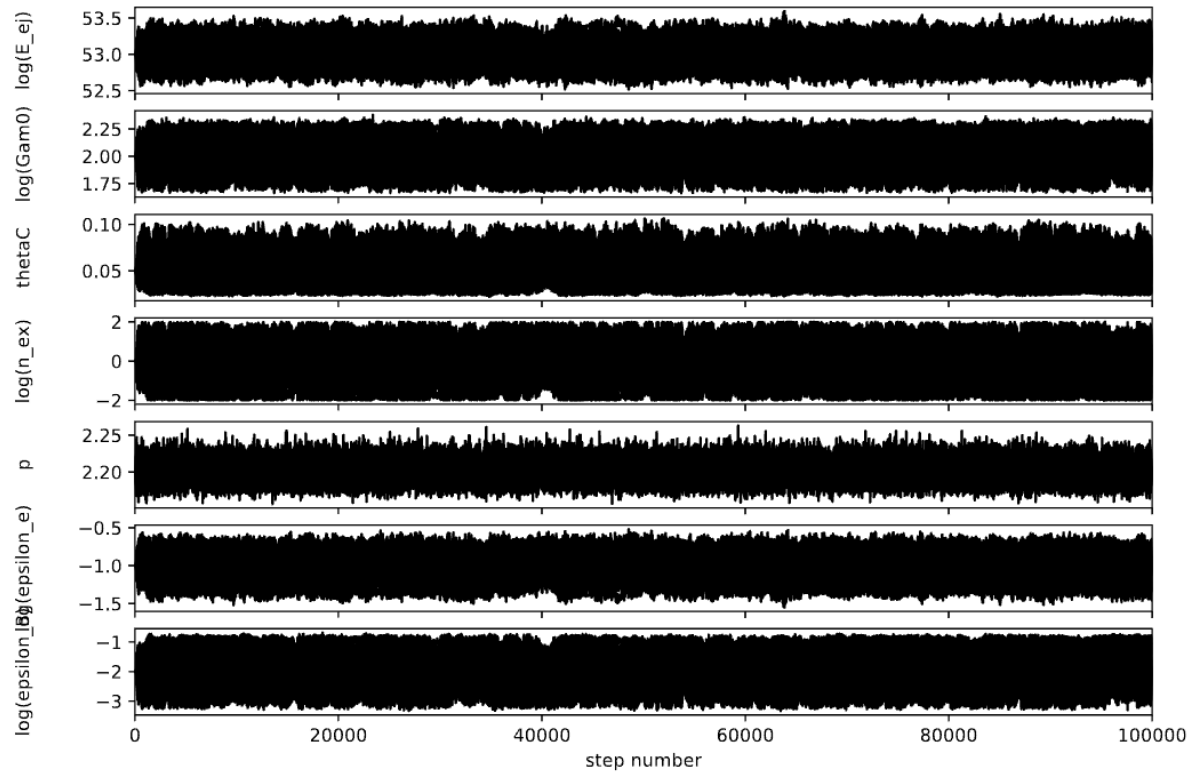


図 A.9: 7つ ($E_0, \Gamma_0, \theta_C, n_0, p, \epsilon_e, \epsilon_B$) の emcee によるパラメータ推定のトレースプロット

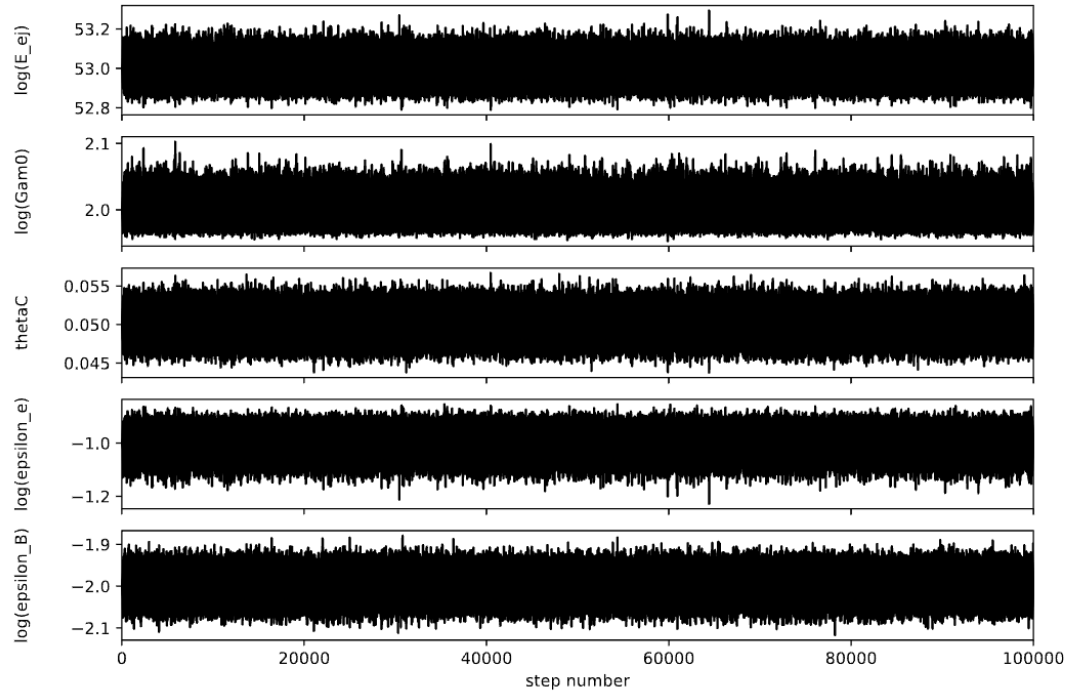
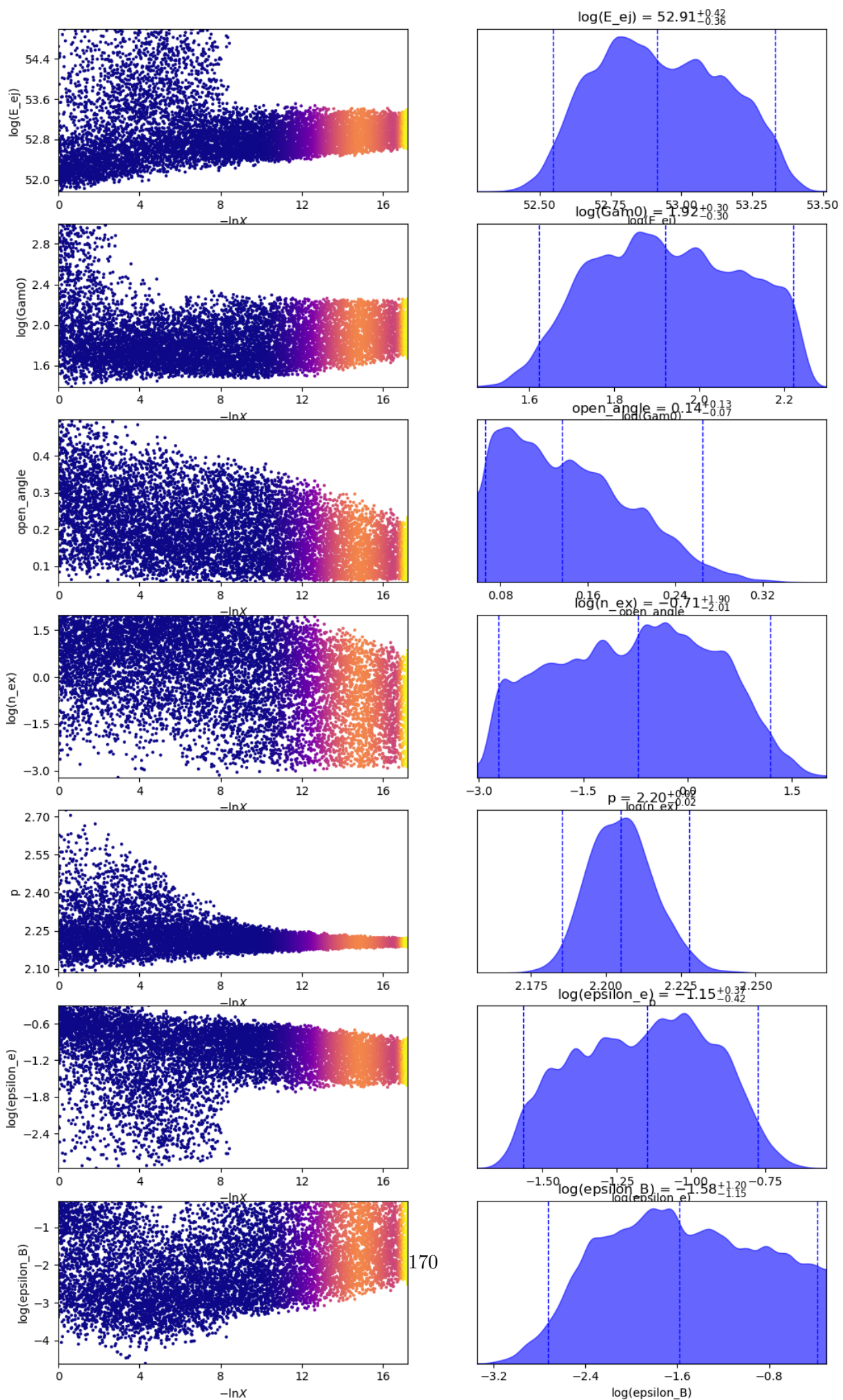


図 A.10: 5 つ $(E_0, \Gamma_0, \theta_c, \epsilon_e, \epsilon_B)$ の emcee パラメータ推定のトレースプロット



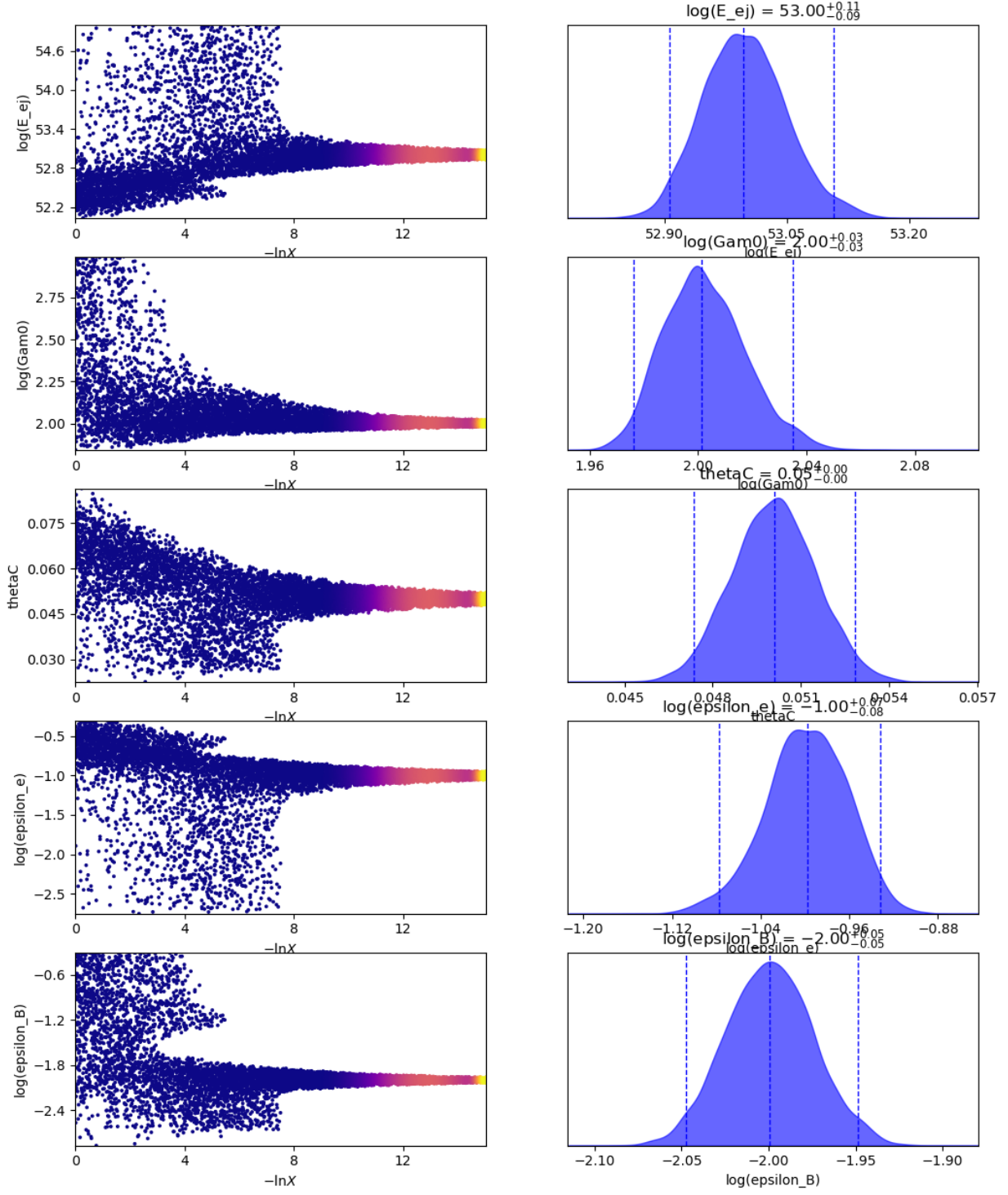


図 A.12: 5 つ (E_0 , Γ_0 , θ_c , ϵ_e , ϵ_B) の MultiNest パラメータ推定のトレースプロット

参考文献

- Abbott, B. P. et al. (Oct. 2017). "GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral". *Physical Review Letters* **119**.16, 161101, p. 161101.
- Abdo, A. A. et al. (Mar. 2009). "Fermi Observations of High-Energy Gamma-Ray Emission from GRB 080916C". *Science* **323**.5922, p. 1688.
- Abe, K. et al. (Aug. 2025). "GRB 221009A: Observations with LST-1 of CTAO and Implications for Structured Jets in Long Gamma-Ray Bursts". *The Astrophysical Journal Letter* **988**.2, L42, p. L42.
- Amati, L., F. Frontera, M. Tavani, J. J. M. in't Zand, A. Antonelli, E. Costa, M. Feroci, C. Guidorzi, J. Heise, N. Masetti, E. Montanari, L. Nicastro, E. Palazzi, E. Pian, L. Piro, P. Soffitta (July 2002). "Intrinsic spectra and energetics of BeppoSAX Gamma-Ray Bursts with known redshifts". *Astronomy and Astrophysics* **390**, pp. 81–89.
- Band, D., J. Matteson, L. Ford, B. Schaefer, D. Palmer, B. Teegarden, T. Cline, M. Briggs, W. Paciesas, G. Pendleton, G. Fishman, C. Kouveliotou, C. Meegan, R. Wilson, P. Lestrade (Aug. 1993). "BATSE Observations of Gamma-Ray Burst Spectra. I. Spectral Diversity". *The Astrophysical Journal* **413**, p. 281.
- Basak, Rupal, A. R. Rao (Dec. 2013). "Pulse-wise Amati correlation in Fermi gamma-ray bursts". *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **436**.4, pp. 3082–3088.
- Bell, A. R. (Jan. 1978a). "The acceleration of cosmic rays in shock fronts - I.". *Monthly Notice of the Royal Astronomical Society* **182**, pp. 147–156.
- (Feb. 1978b). "The acceleration of cosmic rays in shock fronts - II.". *Monthly Notice of the Royal Astronomical Society* **182**, pp. 443–455.
- Beniamini, Paz, Jonathan Granot, Ramandeep Gill (Apr. 2020). "Afterglow light curves from misaligned structured jets". *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **493**.3, pp. 3521–3534.
- Berger, E., P. A. Price, S. B. Cenko, A. Gal-Yam, A. M. Soderberg, M. Kasliwal, D. C. Leonard, P. B. Cameron, D. A. Frail, S. R. Kulkarni, D. C. Murphy, W. Krzeminski, T. Piran, B. L. Lee, K. C. Roth, D.-S. Moon, D. B. Fox, F. A. Harrison, S. E. Persson, B. P. Schmidt, B. E. Penprase, J. Rich, B. A. Peterson, L. L. Cowie (Dec. 2005). "The afterglow and elliptical host galaxy of the short γ -ray burst GRB 050724". *Nature* **438**.7070, pp. 988–990.

- Beuermann, K., F. V. Hessman, K. Reinsch, H. Nicklas, P. M. Vreeswijk, T. J. Galama, E. Rol, J. van Paradijs, C. Kouveliotou, F. Frontera, N. Masetti, E. Palazzi, E. Pian (Dec. 1999). "VLT observations of GRB 990510 and its environment". *Astronomy & Astrophysics* **352**, pp. L26–L30.
- Blandford, R. D., C. F. McKee (Aug. 1976). "Fluid dynamics of relativistic blast waves". *Physics of Fluids* **19**, pp. 1130–1138.
- Blandford, R. D., J. P. Ostriker (Apr. 1978). "Particle acceleration by astrophysical shocks". *The Astrophysical Journal Letter* **221**, pp. L29–L32.
- Buchner, Johannes (June 2016). "PyMultiNest: Python interface for MultiNest". Astrophysics Source Code Library, record ascl:1606.005.
- Burrows, D. N., A. Falcone, G. Chincarini, D. Morris, P. Romano, J. E. Hill, O. Godet, A. Moretti, H. Krimm, J. P. Osborne, J. Racusin, V. Mangano, K. Page, M. Perri, M. Stroh, Swift XRT Team (May 2007). "X-ray flares in early GRB afterglows". *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A* **365**.1854, pp. 1213–1226.
- Cardelli, Jason A., Geoffrey C. Clayton, John S. Mathis (Oct. 1989). "The Relationship between Infrared, Optical, and Ultraviolet Extinction". *Astrophysical Journal* **345**, p. 245.
- Castor, J. I., D. C. Abbott, R. I. Klein (Jan. 1975). "Radiation-driven winds in Of stars.". *The Astrophysical Journal* **195**, pp. 157–174.
- Chand, Vikas, Ankush Banerjee, Rahul Gupta, Dimple, Partha Sarathi Pal, Jagdish C. Joshi, Bin-Bin Zhang, R. Basak, P. H. T. Tam, Vidushi Sharma, S. B. Pandey, Amit Kumar, Yi-Si Yang (July 2020). "Peculiar Prompt Emission and Afterglow in the H.E.S.S.-detected GRB 190829A". *The Astrophysical Journal* **898**.1, 42, p. 42.
- Chandra, Poonam, Dale A. Frail (Feb. 2012). "A Radio-selected Sample of Gamma-Ray Burst Afterglows". *The Astrophysical Journal* **746**.2, 156, p. 156.
- Chevalier, Roger A., Zhi-Yun Li (July 1999). "Gamma-Ray Burst Environments and Progenitors". *The Astrophysical Journal* **520**.1, pp. L29–L32.
- (June 2000). "Wind Interaction Models for Gamma-Ray Burst Afterglows: The Case for Two Types of Progenitors". *The Astrophysical Journal* **536**.1, pp. 195–212.
- Costa, E., F. Frontera, J. Heise, M. Feroci, J. in't Zand, F. Fiore, M. N. Cinti, D. Dal Fiume, L. Nicastro, M. Orlandini, E. Palazzi, M. Rapisarda#, G. Zavattini, R. Jager, A. Parmar, A. Owens, S. Molendi, G. Cusumano, M. C. Maccarone, S. Giarrusso, A. Coletta, L. A. Antonelli, P. Giommi, J. M. Muller, L. Piro, R. C. Butler (June 1997). "Discovery of an X-ray afterglow associated with the γ -ray burst of 28 February 1997". *Nature* **387**.6635, pp. 783–785.
- Covino, S., P. D'Avanzo, A. Klotz, D. A. Perley, L. Amati, S. Campana, G. Chincarini, A. Cucchiara, V. D'Elia, D. Guetta, C. Guidorzi, D. A. Kann, A. Küpcü Yoldaş, K. Misra, G. Olofsson,

G. Tagliaferri, L. A. Antonelli, E. Berger, J. S. Bloom, M. Böer, C. Clemens, F. D’Alessio, M. Della Valle, S. di Serego Alighieri, A. V. Filippenko, R. J. Foley, D. B. Fox, D. Fugazza, J. Fynbo, B. Gendre, P. Goldoni, J. Greiner, D. Kocevski, E. Maiorano, N. Masetti, E. Meurs, M. Modjaz, E. Molinari, A. Moretti, E. Palazzi, S. B. Pandey, S. Piranomonte, D. Poznanski, N. Primak, P. Romano, E. Rossi, R. Roy, J. M. Silverman, L. Stella, G. Stratta, V. Testa, S. D. Vergani, F. Vitali, F. Zerbi (July 2008). "The complex light curve of the afterglow of GRB071010A". *Monthly Notice of the Royal Astronomical Society* **388**.1, pp. 347–356.

Cucchiara, A., S. B. Cenko, J. S. Bloom, A. Melandri, A. Morgan, S. Kobayashi, R. J. Smith, D. A. Perley, W. Li, J. L. Hora, R. L. da Silva, J. X. Prochaska, P. A. Milne, N. R. Butler, B. Cobb, G. Worsack, C. G. Mundell, I. A. Steele, A. V. Filippenko, M. Fumagalli, C. R. Klein, A. Stephens, A. Bluck, R. Mason (Dec. 2011). "Constraining Gamma-Ray Burst Emission Physics with Extensive Early-time, Multiband Follow-up". *Astrophysical Journal* **743**.2, 154, p. 154.

de Ugarte Postigo, A., T. A. Fatkhullin, G. Jóhannesson, J. Gorosabel, V. V. Sokolov, A. J. Castro-Tirado, Yu. Yu. Balega, O. I. Spiridonova, M. Jelínek, S. Guziy, D. Pérez-Ramírez, J. Hjorth, P. Laursen, D. Bersier, S. B. Pandey, M. Bremer, A. Monfardini, K. Y. Huang, Y. Urata, W. H. Ip, T. Tamagawa, D. Kinoshita, T. Mizuno, Y. Arai, H. Yamagishi, T. Soyano, F. Usui, M. Tashiro, K. Abe, K. Onda, Z. Aslan, I. Khamitov, T. Ozisik, U. Kiziloglu, I. Bikmaev, N. Sakhibullin, R. Burenin, M. Pavlinsky, R. Sunyaev, D. Bhattacharya, A. P. Kamble, C. H. Ishwara Chandra, S. A. Trushkin (Feb. 2007). "Extensive multiband study of the X-ray rich GRB 050408. A likely off-axis event with an intense energy injection". *Astronomy and Astrophysics* **462**.3, pp. L57–L60.

Deng, Q., Z.-B. Zhang, X.-J. Li, H.-Y. Chang, X.-L. Zhang, H.-Y. Zhen, H. Sun, Q. Pan, X.-F. Dong (Nov. 2022). "Reclassifying Swift Gamma-Ray Bursts with Diverse Duration Distributions". *The Astrophysical Journal* **940**.1, 5, p. 5.

Dichiara, S., M. G. Bernardini, D. N. Burrows, P. D’Avanzo, C. Gronwall, J. D. Gropp, J. A. Kennea, N. J. Klingler, H. A. Krimm, N. P. M. Kuin, S. J. LaPorte, A. Melandri, K. L. Page, D. M. Palmer, M. H. Siegel, K. K. Simpson, A. Tohuvavohu, Neil Gehrels Swift Observatory Team (Aug. 2019). "GRB 190829A: Swift detection of a burst consistent with a galaxy at $z=0.08$ ". *GRB Coordinates Network* **25552**, p. 1.

Eichler, David, Amir Levinson (Oct. 2004). "An Interpretation of the $h\nu_{peak}$ - E_{iso} Correlation for Gamma-Ray Bursts". *The Astrophysical Journal Letter* **614**.1, pp. L13–L16.

Eichler, David, Eli Waxman (July 2005). "The Efficiency of Electron Acceleration in Collisionless Shocks and Gamma-Ray Burst Energetics". *The Astrophysical Journal* **627**.2, pp. 861–867.

Falcone, A. D., D. N. Burrows, D. Lazzati, S. Campana, S. Kobayashi, B. Zhang, P. Mészáros, K. L. Page, J. A. Kennea, P. Romano, C. Pagani, L. Angelini, A. P. Beardmore, M. Capalbi, G. Chincarini, G. Cusumano, P. Giommi, M. R. Goad, O. Godet, D. Grupe, J. E. Hill, V. La Parola, V. Mangano, A. Moretti, J. A. Nousek, P. T. O’Brien, J. P. Osborne, M. Perri, G. Tagliaferri, A. A. Wells, N. Gehrels (Apr. 2006). "The Giant X-Ray Flare of GRB 050502B: Evidence for Late-Time Internal Engine Activity". *The Astrophysical Journal* **641**.2, pp. 1010–1017.

- Farinelli, Ruben, Rupal Basak, Lorenzo Amati, Cristiano Guidorzi, Filippo Frontera (Mar. 2021). "A numerical jet model for the prompt emission of gamma-ray bursts". *Monthly Notice of the Royal Astronomical Society* **501**.4, pp. 5723–5732.
- Fenimore, E. E., J. P. Conner, R. I. Epstein, R. W. Klebesadel, J. G. Laros, A. Yoshida, M. Fujii, K. Hayashida, M. Itoh, T. Murakami, J. Nishimura, Y. Yamagami, I. Kondo, N. Kawai (Dec. 1988). "Interpretation of Multiple Absorption Features in a Gamma-Ray Burst Spectrum". *The Astrophysical Journal* **335**, p. L71.
- Feroz, F., M. P. Hobson (Feb. 2008). "Multimodal nested sampling: an efficient and robust alternative to Markov Chain Monte Carlo methods for astronomical data analyses". *Monthly Notice of the Royal Astronomical Society* **384**.2, pp. 449–463.
- Feroz, F., M. P. Hobson, M. Bridges (Oct. 2009). "MULTINEST: an efficient and robust Bayesian inference tool for cosmology and particle physics". *Monthly Notice of the Royal Astronomical Society* **398**.4, pp. 1601–1614.
- Feroz, Farhan, Michael P. Hobson, Ewan Cameron, Anthony N. Pettitt (Nov. 2019). "Importance Nested Sampling and the MultiNest Algorithm". *The Open Journal of Astrophysics* **2**.1, 10, p. 10.
- Fishman, Gerald J., Charles A. Meegan (Jan. 1995). "Gamma-Ray Bursts". *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **33**, pp. 415–458.
- Foreman-Mackey, Daniel, David W. Hogg, Dustin Lang, Jonathan Goodman (Mar. 2013). "emcee: The MCMC Hammer". *Publication of the Astronomical Society of the Pacific* **125**.925, p. 306.
- Fulton, M. D., S. J. Smartt, L. Rhodes, M. E. Huber, V. A. Villar, T. Moore, S. Srivastav, A. S. B. Schultz, K. C. Chambers, L. Izzo, J. Hjorth, T.-W. Chen, M. Nicholl, R. J. Foley, A. Rest, K. W. Smith, D. R. Young, S. A. Sim, J. Bright, Y. Zenati, T. de Boer, J. Bulger, J. Fairlamb, H. Gao, C.-C. Lin, T. Lowe, E. A. Magnier, I. A. Smith, R. Wainscoat, D. A. Coulter, D. O. Jones, C. D. Kilpatrick, P. McGill, E. Ramirez-Ruiz, K.-S. Lee, G. Narayan, V. Ramakrishnan, R. Ridden-Harper, A. Singh, Q. Wang, A. K. H. Kong, C.-C. Ngeow, Y.-C. Pan, S. Yang, K. W. Davis, A. L. Piro, C. Rojas-Bravo, J. Sommer, S. K. Yadavalli (Mar. 2023). "The Optical Light Curve of GRB 221009A: The Afterglow and the Emerging Supernova". *The Astrophysical Journal Letter* **946**.1, L22, p. L22.
- Galanti, Giorgio, Lara Nava, Marco Roncadelli, Fabrizio Tavecchio, Giacomo Bonnoli (Dec. 2023). "Observability of the Very-High-Energy Emission from GRB 221009A". *Physical Review Letters* **131**.25, 251001, p. 251001.
- Gao, He, Wei-Hua Lei, Yuan-Chuan Zou, Xue-Feng Wu, Bing Zhang (Dec. 2013). "A complete reference of the analytical synchrotron external shock models of gamma-ray bursts". *New Astronomy Reviews* **57**.6, pp. 141–190.

- Goldstein, Adam, J. Michael Burgess, Robert D. Preece, Michael S. Briggs, Sylvain Guiriec, Alexander J. van der Horst, Valerie Connaughton, Colleen A. Wilson-Hodge, William S. Paciesas, Charles A. Meegan, Andreas von Kienlin, P. N. Bhat, Elisabetta Bissaldi, Vandiver Chaplin, Roland Diehl, Gerald J. Fishman, Gerard Fitzpatrick, Suzanne Foley, Melissa Gibby, Misty Giles, Jochen Greiner, David Gruber, R. Marc Kippen, Chryssa Kouveliotou, Sheila McBreen, Sinéad McGlynn, Arne Rau, Dave Tierney (Mar. 2012). "The Fermi GBM Gamma-Ray Burst Spectral Catalog: The First Two Years". *Astrophysical Journal Supplements* **199.1**, 19, p. 19.
- Goodman, J. (1986). "Are gamma-ray bursts optically thick?". *Astrophysical Journal* **308**, pp. L47–L50.
- Gottlieb, Ore, Ehud Nakar, Omer Bromberg (Jan. 2021). "The structure of hydrodynamic γ -ray burst jets". *Monthly Notice of the Royal Astronomical Society* **500.3**, pp. 3511–3526.
- Granot, Jonathan (Oct. 2005). "Afterglow Light Curves from Impulsive Relativistic Jets with an Unconventional Structure". *The Astrophysical Journal* **631.2**, pp. 1022–1031.
- Granot, Jonathan, Ramandeep Gill, Dafne Guetta, Fabio De Colle (Dec. 2018). "Off-axis emission of short GRB jets from double neutron star mergers and GRB 170817A". *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **481.2**, pp. 1597–1608.
- Graziani, C., D. Q. Lamb, T. Q. Donaghy (May 2006). "Gamma-Ray Burst Jet Profiles And Their Signatures". Gamma-Ray Bursts in the Swift Era. Ed. by S. S. Holt, N. Gehrels, J. A. Nousek. Vol. 836. American Institute of Physics Conference Series. AIP, pp. 117–120.
- Greiner, J., W. Bornemann, C. Clemens, M. Deuter, G. Hasinger, M. Honsberg, H. Huber, S. Huber, M. Krauss, T. Krühler, A. Küpcü Yoldaş, H. Mayer-Hasselwander, B. Mican, N. Primak, F. Schrey, I. Steiner, G. Szokoly, C. C. Thöne, A. Yoldaş, S. Klose, U. Laux, J. Winkler (Apr. 2008). "GROND—a 7-Channel Imager". *Publication of the Astronomical Society of the Pacific* **120.866**, p. 405.
- Guidorzi, C., C. Clemens, S. Kobayashi, J. Granot, A. Melandri, P. D’Avanzo, N. P. M. Kuin, A. Klotz, J. P. U. Fynbo, S. Covino, J. Greiner, D. Malesani, J. Mao, C. G. Mundell, I. A. Steele, P. Jakobsson, R. Margutti, D. Bersier, S. Campana, G. Chincarini, V. D’Elia, D. Fugazza, F. Genet, A. Gomboc, T. Krühler, A. Küpcü Yoldaş, A. Moretti, C. J. Mottram, P. T. O’Brien, R. J. Smith, G. Szokoly, G. Tagliaferri, N. R. Tanvir, N. Gehrels (May 2009). "Rise and fall of the X-ray flash 080330: an off-axis jet?". *Astronomy & Astrophysics* **499.2**, pp. 439–453.
- Guidorzi, C., S. Kobayashi, D. A. Perley, G. Vianello, J. S. Bloom, P. Chandra, D. A. Kann, W. Li, C. G. Mundell, A. Pozanenko, J. X. Prochaska, K. Antoniuk, D. Bersier, A. V. Filippenko, D. A. Frail, A. Gomboc, E. Klunko, A. Melandri, S. Mereghetti, A. N. Morgan, P. T. O’Brien, V. Rumyantsev, R. J. Smith, I. A. Steele, N. R. Tanvir, A. Volnova (Nov. 2011). "A faint optical flash in dust-obscured GRB 080603A: implications for GRB prompt emission mechanisms". *Monthly Notice of the Royal Astronomical Society* **417.3**, pp. 2124–2143.

H. E. S. S. Collaboration et al. (June 2021). "Revealing x-ray and gamma ray temporal and spectral similarities in the GRB 190829A afterglow". *Science* **372**.6546, pp. 1081–1085.

Hakkila, Jon, Timothy W. Giblin, Jay P. Norris, P. Chris Fragile, Jerry T. Bonnell (Apr. 2008). "Correlations between Lag, Luminosity, and Duration in Gamma-Ray Burst Pulses". *The Astrophysical Journal Letter* **677**.2, p. L81.

Hastings, W. K. (Apr. 1970). "Monte Carlo Sampling Methods using Markov Chains and their Applications". *Biometrika* **57**.1, pp. 97–109.

Heise, John, Jean In't. Zand, R. Marc Kippen, Peter M. Woods (Jan. 2001). "X-Ray Flashes and X-Ray Rich Gamma Ray Bursts". *Gamma-ray Bursts in the Afterglow Era*. Ed. by Enrico Costa, Filippo Frontera, Jens Hjorth, p. 16.

Hjorth, Jens, Jesper Sollerman, Palle Møller, Johan P. U. Fynbo, Stan E. Woosley, Chryssa Kouveliotou, Nial R. Tanvir, Jochen Greiner, Michael I. Andersen, Alberto J. Castro-Tirado, José María Castro Cerón, Andrew S. Fruchter, Javier Gorosabel, Páll Jakobsson, Lex Kaper, Sylvio Klose, Nicola Masetti, Holger Pedersen, Kristian Pedersen, Elena Pian, Eliana Palazzi, James E. Rhoads, Evert Rol, Edward P. J. van den Heuvel, Paul M. Vreeswijk, Darach Watson, Ralph A. M. J. Wijers (June 2003). "A very energetic supernova associated with the γ -ray burst of 29 March 2003". *Nature* **423**.6942, pp. 847–850.

Hjorth, Jens, Darach Watson, Johan P. U. Fynbo, Paul A. Price, Brian L. Jensen, Uffe G. Jørgensen, Daniel Kubas, Javier Gorosabel, Páll Jakobsson, Jesper Sollerman, Kristian Pedersen, Chryssa Kouveliotou (Oct. 2005). "The optical afterglow of the short γ -ray burst GRB 050709". *Nature* **437**.7060, pp. 859–861.

Hoeflich, P., J. C. Wheeler, L. Wang (July 1998). "SN 1998bw/GRB 980425: Hypernova or Aspherical Explosion?". *arXiv e-prints*, astro-ph/9807345, astro-ph/9807345.

Horváth, I. (Sept. 2002). "A further study of the BATSE Gamma-Ray Burst duration distribution". *Astronomy and Astrophysics* **392**, pp. 791–793.

Huang, Y. F., L. J. Gou, Z. G. Dai, T. Lu (Nov. 2000). "Overall Evolution of Jetted Gamma-Ray Burst Ejecta". *The Astrophysical Journal* **543**.1, pp. 90–96.

Ioka, Kunihito, Takashi Nakamura (Aug. 2019). "Spectral puzzle of the off-axis gamma-ray burst in GW170817". *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **487**.4, pp. 4884–4889.

Jiang, Shuai-Qing, Dong Xu, Agnes P. C. van Hoof, Wei-Hua Lei, Yuan Liu, Hao Zhou, Yong Chen, Shao-Yu Fu, Jun Yang, Xing Liu, Zi-Pei Zhu, Alexei V. Filippenko, Peter G. Jonker, A. S. Pozanenko, He Gao, Xue-Feng Wu, Bing Zhang, Gavin P. Lamb, Massimiliano De Pasquale, Shiho Kobayashi, Franz Erik Bauer, Hui Sun, Giovanna Pugliese, Jie An, Valerio D'Elia, Johan P. U. Fynbo, WeiKang Zheng, Alberto J. Castro-Tirado, Yi-Han Iris Yin, Yuan-Chuan Zou, Adam T. Deller, N. S. Pankov, A. A. Volnova, A. S. Moskvitin, O. I. Spiridonova, D. V. Oparin, V.

Rumyantsev, O. A. Burkhonov, Sh. A. Egamberdiyev, V. Kim, M. Krugov, A. M. Tatarnikov, R. Inasaridze, Andrew J. Levan, Daniele Bjørn Malesani, Maria E. Ravasio, Jonathan Quirola-Vásquez, Joyce N. D. van Dalen, Javi Sánchez-Sierras, Daniel Mata Sánchez, Stuart P. Littlefair, Jennifer A. Chacón, Manuel A. P. Torres, Ashley A. Chrimes, Nikhil Sarin, Antonio Martin-Carrillo, Vik Dhillon, Yi Yang, Thomas G. Brink, Rebecca L. Davies, Sheng Yang, Amar Aryan, Ting-Wan Chen, Albert K. H. Kong, Wen-Xiong Li, Rui-Zhi Li, Jirong Mao, Ignacio Pérez-García, Emilio J. Fernández-García, Moira Andrews, Joseph Farah, Zhou Fan, Estefania Padilla Gonzalez, D. Andrew Howell, Dieter Hartmann, Jing-Wei Hu, Páll Jakobsson, Cheng-Kui Li, Zhi-Xing Ling, Curtis McCully, Megan Newsome, Benjamin Schneider, Kaew Samaporn Tinyanont, Ning-Chen Sun, Giacomo Terreran, Qing-Wen Tang, Wen-Xin Wang, Jing-Jing Xu, Wei-Min Yuan, Bin-Bin Zhang, Hai-Sheng Zhao, Juan Zhang (July 2025). "EP240801a/XRF 240801B: An X-Ray Flash Detected by the Einstein Probe and the Implications of Its Multiband Afterglow". *The Astrophysical Journal* **988**.1, L34, p. L34.

Klebesadel, Ray W., Ian B. Strong, Roy A. Olson (June 1973). "Observations of Gamma-Ray Bursts of Cosmic Origin". *The Astrophysical Journal* **182**, p. L85.

Kouveliotou, Chryssa, Charles A. Meegan, Gerald J. Fishman, Narayana P. Bhat, Michael S. Briggs, Thomas M. Koshut, William S. Paciesas, Geoffrey N. Pendleton (Aug. 1993). "Identification of Two Classes of Gamma-Ray Bursts". *The Astrophysical Journal Letter* **413**, p. L101.

Krühler, T., J. Greiner, P. Afonso, D. Burlon, C. Clemens, R. Filgas, D. A. Kann, S. Klose, A. Küpcü Yoldaş, S. McBreen, F. Olivares, A. Rau, A. Rossi, S. Schulze, G. P. Szokoly, A. Utdike, A. Yoldaş (Dec. 2009a). "The bright optical/NIR afterglow of the faint GRB 080710 - evidence of a jet viewed off-axis". *Astronomy & Astrophysics* **508**.2, pp. 593–598.

Krühler, T., J. Greiner, S. McBreen, S. Klose, A. Rossi, P. Afonso, C. Clemens, R. Filgas, A. Küpcü Yoldaş, G. P. Szokoly, A. Yoldaş (May 2009b). "Correlated Optical and X-Ray Flares in the Afterglow of XRF 071031". *Astrophysical Journal* **697**.1, pp. 758–768.

Kusafuka, Yo, Katsuaki Asano (Jan. 2025a). "Ejecta width and magnetization reflected in gamma-ray burst early afterglows: implication for reverse shock component and shallow decay phase". *Monthly Notice of the Royal Astronomical Society* **536**.2, pp. 1822–1837.

— (July 2025b). "TeV afterglow of BOAT GRB without jet break". *Monthly Notice of the Royal Astronomical Society* **540**.3, pp. 2098–2101.

Kusafuka, Yo, Katsuaki Asano, Takumi Ohmura, Tomohisa Kawashima (Nov. 2023). "Dynamical energy dissipation of relativistic magnetic bullets". *Monthly Notice of the Royal Astronomical Society* **526**.1, pp. 512–522.

Kusafuka, Yo, Kaori Obayashi, Katsuaki Asano, Ryo Yamazaki (Nov. 2025c). "Double-peaked optical afterglow in GRB 110213A inferring a magnetized thick shell ejecta". *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **544**.4, pp. 3115–3123. ISSN: 0035-8711. URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/staf1923>.

Lamb, D. Q., T. Q. Donaghy, C. Graziani (Feb. 2005). "A Unified Jet Model of X-Ray Flashes, X-Ray-rich Gamma-Ray Bursts, and Gamma-Ray Bursts. I. Power-Law-shaped Universal and Top-Hat-shaped Variable Opening Angle Jet Models". *The Astrophysical Journal* **620**.1, pp. 355–378.

Laskar, Tanmoy, Kate D. Alexander, Raffaella Margutti, Tarraneh Eftekhari, Ryan Chornock, Edo Berger, Yvette Cendes, Anne Duerr, Daniel A. Perley, Maria Edvige Ravasio, Ryo Yamazaki, Eliot H. Ayache, Thomas Barclay, Rodolfo Barniol Duran, Shivani Bhandari, Daniel Brethauer, Collin T. Christy, Deanne L. Coppejans, Paul Duffell, Wen-fai Fong, Andreja Gomboc, Cristiano Guidorzi, Jamie A. Kennea, Shiho Kobayashi, Andrew Levan, Andrei P. Lobanov, Brian D. Metzger, Eduardo Ros, Genevieve Schroeder, P. K. G. Williams (Mar. 2023). "The Radio to GeV Afterglow of GRB 221009A". *The Astrophysical Journal Letter* **946**.1, L23, p. L23.

Lazzati, Davide, Rosalba Perna (Feb. 2007). "X-ray flares and the duration of engine activity in gamma-ray bursts". *Monthly Notice of the Royal Astronomical Society* **375**.1, pp. L46–L50.

Lesage, S. et al. (Aug. 2023). "Fermi-GBM Discovery of GRB 221009A: An Extraordinarily Bright GRB from Onset to Afterglow". *The Astrophysical Journal Letter* **952**.2, L42, p. L42.

LHAASO Collaboration et al. (June 2023). "A tera-electron volt afterglow from a narrow jet in an extremely bright gamma-ray burst.". *Science* **380**.6652, pp. 1390–1396.

Liang, En-Wei, Liang Li, He Gao, Bing Zhang, Yun-Feng Liang, Xue-Feng Wu, Shuang-Xi Yi, Zi-Gao Dai, Qing-Wen Tang, Jie-Min Chen, Hou-Jun Lü, Jin Zhang, Rui-Jing Lu, Lian-Zhong Lü, Jian-Yan Wei (Sept. 2013). "A Comprehensive Study of Gamma-Ray Burst Optical Emission. II. Afterglow Onset and Late Re-brightening Components". *Astrophysical Journal* **774**.1, 13, p. 13.

Liang, En-Wei, Judith L. Racusin, Bing Zhang, Bin-Bin Zhang, David N. Burrows (Mar. 2008). "A Comprehensive Analysis of Swift XRT Data. III. Jet Break Candidates in X-Ray and Optical Afterglow Light Curves". *Astrophysical Journal* **675**.1, pp. 528–552.

Lien, Amy, Takanori Sakamoto, Scott D. Barthelmy, Wayne H. Baumgartner, John K. Cannizzo, Kevin Chen, Nicholas R. Collins, Jay R. Cummings, Neil Gehrels, Hans A. Krimm, Craig. B. Markwardt, David M. Palmer, Michael Stamatikos, Eleonora Troja, T. N. Ukwatta (Sept. 2016). "The Third Swift Burst Alert Telescope Gamma-Ray Burst Catalog". *The Astrophysical Journal* **829**.1, 7, p. 7.

Lü, Hou-Jun, Lin Lan, Bing Zhang, En-Wei Liang, David Alexander Kann, Shen-Shi Du, Jun Shen (Aug. 2018). "Gamma-Ray Burst/Supernova Associations: Energy Partition and the Case of a Magnetar Central Engine". *The Astrophysical Journal* **862**.2, 130, p. 130.

Ma, Yinuo, He Gao (Aug. 2025). "Comparative Statistical Analysis of Prompt and Afterglow X-Ray Flares in Gamma-Ray Bursts: Insights into Extended Central Engine Activity". *The Astrophysical Journal* **989**.1, 113, p. 113.

MacFadyen, A. I., S. E. Woosley (Oct. 1999). "Collapsars: Gamma-Ray Bursts and Explosions in "Failed Supernovae"". *The Astrophysical Journal* **524**.1, pp. 262–289.

MAGIC Collaboration et al. (Nov. 2019a). "Observation of inverse Compton emission from a long γ -ray burst". *Nature* **575**.7783, pp. 459–463.

MAGIC Collaboration et al. (Nov. 2019b). "Teraelectronvolt emission from the γ -ray burst GRB 190114C". *Nature* **575**.7783, pp. 455–458.

Mangano, V., S. T. Holland, D. Malesani, E. Troja, G. Chincarini, B. Zhang, V. La Parola, P. J. Brown, D. N. Burrows, S. Campana, M. Capalbi, G. Cusumano, M. Della Valle, N. Gehrels, P. Giommi, D. Grupe, C. Guidorzi, T. Mineo, A. Moretti, J. P. Osborne, S. B. Pandey, M. Perri, P. Romano, P. W. A. Roming, G. Tagliaferri (July 2007). "Swift observations of GRB 060614: an anomalous burst with a well behaved afterglow". *Astronomy and Astrophysics* **470**.1, pp. 105–118.

Mazets, E. P., S. V. Golenetskii, V. N. Il'Inskii, V. N. Panov, R. L. Aptekar', Yu. A. Gur'yan, I. A. Sokolov, Z. Ya. Sokolova, T. V. Kharitonova (Apr. 1979). "A flaring x-ray pulsar in Dorado". *Soviet Astronomy Letters* **5**, p. 163.

Meegan, Charles A., Geoffrey N. Pendleton, Michael S. Briggs, Chryssa Kouveliotou, Thomas M. Koshut, John Patrick Lestrade, William S. Paciesas, Michael L. McCollough, Jerome J. Brainerd, John M. Horack, Jon Hakkila, William Henze, Robert D. Preece, Robert S. Mallozzi, Gerald J. Fishman (Sept. 1996). "The Third BATSE Gamma-Ray Burst Catalog". *The Astrophysical Journal Supplement Series* **106**, p. 65.

Melandri, A., C. Guidorzi, S. Kobayashi, D. Bersier, C. G. Mundell, P. Milne, A. Pozanenko, W. Li, A. V. Filippenko, Y. Urata, M. Ibrahimov, I. A. Steele, A. Gomboc, R. J. Smith, N. R. Tanvir, E. Rol, K. Huang (June 2009). "Evidence for energy injection and a fine-tuned central engine at optical wavelengths in GRB 070419A". *Monthly Notice of the Royal Astronomical Society* **395**.4, pp. 1941–1949.

Melandri, A., F. J. Virgili, C. Guidorzi, M. G. Bernardini, S. Kobayashi, C. G. Mundell, A. Gomboc, B. Dintinjana, V.-P. Hentunen, J. Japelj, D. Kopač, D. Kuroda, A. N. Morgan, I. A. Steele, U. Quadri, G. Arici, D. Arnold, R. Girelli, H. Hanayama, N. Kawai, H. Mikuž, M. Nissinen, T. Salmi, R. J. Smith, L. Strabla, M. Toninelli, A. Quadri (Dec. 2014). "The nature of the late achromatic bump in GRB 120326A". *Astronomy and Astrophysics* **572**, A55, A55.

Metropolis, Nicholas, Arianna W. Rosenbluth, Marshall N. Rosenbluth, Augusta H. Teller, Edward Teller (June 1953). "Equation of State Calculations by Fast Computing Machines". *Journal of Chemical Physics* **21**.6, pp. 1087–1092.

Metzger, M. R., S. G. Djorgovski, S. R. Kulkarni, C. C. Steidel, K. L. Adelberger, D. A. Frail, E. Costa, F. Frontera (June 1997). "Spectral constraints on the redshift of the optical counterpart to the γ -ray burst of 8 May 1997". *Nature* **387**.6636, pp. 878–880.

- Mimica, P., D. Giannios (Nov. 2011). "Gamma-ray burst afterglow light curves from realistic density profiles". *Monthly Notice of the Royal Astronomical Society* **418**.1, pp. 583–590.
- Minaev, P. Y., A. S. Pozanenko (Feb. 2020). "The $E_{p,I}$ - E_{iso} correlation: type I gamma-ray bursts and the new classification method". *Monthly Notice of the Royal Astronomical Society* **492**.2, pp. 1919–1936.
- Mizuta, Akira, Kunihito Ioka (Nov. 2013). "Opening Angles of Collapsar Jets". *The Astrophysical Journal* **777**.2, 162, p. 162.
- Mooley, K. P., A. T. Deller, O. Gottlieb, E. Nakar, G. Hallinan, S. Bourke, D. A. Frail, A. Horesh, A. Corsi, K. Hotokezaka (Sept. 2018a). "Superluminal motion of a relativistic jet in the neutron-star merger GW170817". *Nature* **561**.7723, pp. 355–359.
- Mooley, K. P., E. Nakar, K. Hotokezaka, G. Hallinan, A. Corsi, D. A. Frail, A. Horesh, T. Murphy, E. Lenc, D. L. Kaplan, K. de, D. Dobie, P. Chandra, A. Deller, O. Gottlieb, M. M. Kasliwal, S. R. Kulkarni, S. T. Myers, S. Nissanke, T. Piran, C. Lynch, V. Bhalerao, S. Bourke, K. W. Bannister, L. P. Singer (Feb. 2018b). "A mildly relativistic wide-angle outflow in the neutron-star merger event GW170817". *Nature* **554**.7691, pp. 207–210.
- Mooley, Kunal P., Jay Anderson, Wenbin Lu (Oct. 2022). "Optical superluminal motion measurement in the neutron-star merger GW170817". *Nature* **610**.7931, pp. 273–276.
- Morsony, Brian J., Davide Lazzati, Mitchell C. Begelman (Aug. 2007). "Temporal and Angular Properties of Gamma-Ray Burst Jets Emerging from Massive Stars". *The Astrophysical Journal* **665**.1, pp. 569–598.
- Murakami, T., H. Inoue, J. Nishimura, J. van Paradijs, E. E. Fenimore (Apr. 1991). "A γ -ray burst preceded by X-ray activity". *Nature* **350**.6319, pp. 592–594.
- Nicuesa Guelbenzu, A., S. Klose, T. Krühler, J. Greiner, A. Rossi, D. A. Kann, F. Olivares, A. Rau, P. M. J. Afonso, J. Elliott, R. Filgas, A. Küpcü Yoldaş, S. McBreen, M. Nardini, P. Schady, S. Schmidl, V. Sudilovsky, A. C. Updike, A. Yoldaş (Feb. 2012). "The late-time afterglow of the extremely energetic short burst GRB 090510 revisited". *Astronomy & Astrophysics* **538**, L7, p. L7.
- Norris, J. P., J. T. Bonnell, D. Kazanas, J. D. Scargle, J. Hakkila, T. W. Giblin (July 2005). "Long-Lag, Wide-Pulse Gamma-Ray Bursts". *The Astrophysical Journal* **627**.1, pp. 324–345.
- Norris, J. P., R. J. Nemiroff, J. T. Bonnell, J. D. Scargle, C. Kouveliotou, W. S. Paciesas, C. A. Meegan, G. J. Fishman (Mar. 1996). "Attributes of Pulses in Long Bright Gamma-Ray Bursts". *The Astrophysical Journal* **459**, p. 393.
- Nousek, J. A., C. Kouveliotou, D. Grupe, K. L. Page, J. Granot, E. Ramirez-Ruiz, S. K. Patel, D. N. Burrows, V. Mangano, S. Barthelmy, A. P. Beardmore, S. Campana, M. Capalbi, G. Chincarini, G. Cusumano, A. D. Falcone, N. Gehrels, P. Giommi, M. R. Goad, O. Godet, C. P. Hurkett, J. A. Kennea, A. Moretti, P. T. O'Brien, J. P. Osborne, P. Romano, G. Tagliaferri, A. A. Wells

(May 2006). "Evidence for a Canonical Gamma-Ray Burst Afterglow Light Curve in the Swift XRT Data". *The Astrophysical Journal* **642**.1, pp. 389–400.

O'Brien, P. T., R. Willingale, J. Osborne, M. R. Goad, K. L. Page, S. Vaughan, E. Rol, A. Beardmore, O. Godet, C. P. Hurkett, A. Wells, B. Zhang, S. Kobayashi, D. N. Burrows, J. A. Nousek, J. A. Kennea, A. Falcone, D. Grupe, N. Gehrels, S. Barthelmy, J. Cannizzo, J. Cummings, J. E. Hill, H. Krimm, G. Chincarini, G. Tagliaferri, S. Campana, A. Moretti, P. Giommi, M. Perri, V. Mangano, V. LaParola (Aug. 2006). "The Early X-Ray Emission from GRBs". *The Astrophysical Journal* **647**.2, pp. 1213–1237.

O'Connor, Brendan, Eleonora Troja, Geoffrey Ryan, Paz Beniamini, Hendrik van Eerten, Jonathan Granot, Simone Dichiara, Roberto Ricci, Vladimir Lipunov, James H. Gillanders, Ramandeep Gill, Michael Moss, Shreya Anand, Igor Andreoni, Rosa L. Becerra, David A. H. Buckley, Nathaniel R. Butler, Stephen B. Cenko, Aristarkh Chasovnikov, Joseph Durbak, Carlos Francile, Erica Hammerstein, Alexander J. van der Horst, Mansi M. Kasliwal, Chryssa Kouveliotou, Alexander S. Kuttyrev, William H. Lee, Gokul P. Srinivasaragavan, Vladislav Topolev, Alan M. Watson, Yuhang Yang, Kirill Zhirkov (June 2023). "A structured jet explains the extreme GRB 221009A". *Science Advances* **9**.23, eadi1405, eadi1405.

Obayashi, Kaori, Ayumu Toriyama, Mayu Murakoshi, Yuri Sato, Shuta J. Tanaka, Takanori Sakamoto, Ryo Yamazaki (Mar. 2024). "GRB 080710: A narrow, structured jet showing a late, achromatic peak in the optical and infrared afterglow?". *Journal of High Energy Astrophysics* **41**, pp. 1–12.

Paciesas, William S., Charles A. Meegan, Geoffrey N. Pendleton, Michael S. Briggs, Chryssa Kouveliotou, Thomas M. Koshut, John Patrick Lestrade, Michael L. McCollough, Jerome J. Brainerd, Jon Hakkila, William Henze, Robert D. Preece, Valerie Connaughton, R. Marc Kippen, Robert S. Mallozzi, Gerald J. Fishman, Georgia A. Richardson, Maitrayee Sahi (June 1999). "The Fourth BATSE Gamma-Ray Burst Catalog (Revised)". *The Astrophysical Journal Supplement Series* **122**.2, pp. 465–495.

Paczynski, B. (1986). "Gamma-ray bursts from relativistic fireballs". *Astrophysical Journal* **308**, pp. L43–L46.

Paczyński, Bohdan (Feb. 1998). "Are Gamma-Ray Bursts in Star-Forming Regions?". *The Astrophysical Journal Letter* **494**.1, pp. L45–L48.

Piran, Tsvi (Oct. 2004). "The physics of gamma-ray bursts". *Reviews of Modern Physics* **76**.4, pp. 1143–1210.

Poolakkil, S., R. Preece, C. Fletcher, A. Goldstein, P. N. Bhat, E. Bissaldi, M. S. Briggs, E. Burns, W. H. Cleveland, M. M. Giles, C. M. Hui, D. Kocevski, S. Lesage, B. Mailyan, C. Malacaria, W. S. Paciesas, O. J. Roberts, P. Veres, A. von Kienlin, C. A. Wilson-Hodge (May 2021). "The Fermi-GBM Gamma-Ray Burst Spectral Catalog: 10 yr of Data". *The Astrophysical Journal* **913**.1, 60, p. 60.

Preece, R. D., M. S. Briggs, T. W. GIBLIN, R. S. Mallozzi, G. N. Pendleton, W. S. Paciesas, D. L. Band (Dec. 2002). "On the Consistency of Gamma-Ray Burst Spectral Indices with the Synchrotron Shock Model". *The Astrophysical Journal* **581**.2, pp. 1248–1255.

Ror, Amit K., S. B. Pandey, S. R. Oates, R. Gupta, A. Aryan, A. J. Castro-Tirado, Sudhir Kumar (Nov. 2025). "Investigating temporal features in Swift GRB afterglows: a comparative study of UVOT and XRT data". *Monthly Notice of the Royal Astronomical Society* **543**.3, pp. 2404–2441.

Ruderman, M. (1975). "Theories of gamma-ray bursts". Seventh Texas Symposium on Relativistic Astrophysics. Vol. 262, pp. 164–180.

Ryan, Geoffrey, Hendrik van Eerten, Luigi Piro, Eleonora Troja (June 2020). "Gamma-Ray Burst Afterglows in the Multimessenger Era: Numerical Models and Closure Relations". *The Astrophysical Journal* **896**.2, 166, p. 166.

Rybicki, George B., Alan P. Lightman (1979). "Radiative Processes in Astrophysics". New York: Wiley-VCH. ISBN: 978-0471035489.

Sakamoto, T., D. Hullinger, G. Sato, R. Yamazaki, L. Barbier, S. D. Barthelmy, J. R. Cummings, E. E. Fenimore, N. Gehrels, H. A. Krimm, D. Q. Lamb, C. B. Markwardt, J. P. Osborne, D. M. Palmer, A. M. Parsons, M. Stamatikos, J. Tueller (May 2008). "Global Properties of X-Ray Flashes and X-Ray-Rich Gamma-Ray Bursts Observed by Swift". *The Astrophysical Journal* **679**.1, pp. 570–586.

Sakamoto, T., D. Q. Lamb, C. Graziani, T. Q. Donaghy, M. Suzuki, G. Ricker, J. -L. Atteia, N. Kawai, A. Yoshida, Y. Shirasaki, T. Tamagawa, K. Torii, M. Matsuoka, E. E. Fenimore, M. Galassi, T. Tavenner, J. Doty, R. Vanderspek, G. B. Crew, J. Villasenor, N. Butler, G. Prigozhin, J. G. Jernigan, C. Barraud, M. Boer, J. -P. Dezalay, J. -F. Olive, K. Hurley, A. Levine, G. Monnelly, F. Martel, E. Morgan, S. E. Woosley, T. Cline, J. Braga, R. Manchanda, G. Pizzichini, K. Takagishi, M. Yamauchi (Feb. 2004). "High Energy Transient Explorer 2 Observations of the Extremely Soft X-Ray Flash XRF 020903". *The Astrophysical Journal* **602**.2, pp. 875–885.

Sakamoto, T., D. Q. Lamb, N. Kawai, A. Yoshida, C. Graziani, E. E. Fenimore, T. Q. Donaghy, M. Matsuoka, M. Suzuki, G. Ricker, J. -L. Atteia, Y. Shirasaki, T. Tamagawa, K. Torii, M. Galassi, J. Doty, R. Vanderspek, G. B. Crew, J. Villasenor, N. Butler, G. Prigozhin, J. G. Jernigan, C. Barraud, M. Boer, J. -P. Dezalay, J. -F. Olive, K. Hurley, A. Levine, G. Monnelly, F. Martel, E. Morgan, S. E. Woosley, T. Cline, J. Braga, R. Manchanda, G. Pizzichini, K. Takagishi, M. Yamauchi (Aug. 2005). "Global Characteristics of X-Ray Flashes and X-Ray-Rich Gamma-Ray Bursts Observed by HETE-2". *The Astrophysical Journal* **629**.1, pp. 311–327.

Sari, Re'em, Tsvi Piran (Dec. 1995). "Hydrodynamic Time Scales and Temporal Structure in GRBs". *arXiv e-prints*, astro-ph/9512125, astro-ph/9512125.

Sato, Yuri, Kohta Murase, Yutaka Ohira, Ryo Yamazaki (June 2023). "Two-component jet model for multiwavelength afterglow emission of the extremely energetic burst GRB 221009A". *Monthly Notice of the Royal Astronomical Society* **522**.1, pp. L56–L60.

Sato, Yuri, Kaori Obayashi, Ryo Yamazaki, Kohta Murase, Yutaka Ohira (July 2021). "Off-axis jet scenario for early afterglow emission of low-luminosity gamma-ray burst GRB 190829A". *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **504**.4, pp. 5647–5655.

Savchenko, V., C. Ferrigno, E. Kuulkers, A. Bazzano, E. Bozzo, S. Brandt, J. Chenevez, T. J.-L. Courvoisier, R. Diehl, A. Domingo, L. Hanlon, E. Jourdain, A. von Kienlin, P. Laurent, F. Lebrun, A. Lutovinov, A. Martin-Carrillo, S. Mereghetti, L. Natalucci, J. Rodi, J.-P. Roques, R. Sunyaev, P. Ubertini (Oct. 2017). "INTEGRAL Detection of the First Prompt Gamma-Ray Signal Coincident with the Gravitational-wave Event GW170817". *The Astrophysical Journal Letter* **848**.2, L15, p. L15.

Schady, P., T. Dwelly, M. J. Page, T. Krühler, J. Greiner, S. R. Oates, M. de Pasquale, M. Nardini, P. W. A. Roming, A. Rossi, M. Still (Jan. 2012). "The dust extinction curves of gamma-ray burst host galaxies". *Astronomy & Astrophysics* **537**, A15, A15.

Schlafly, Edward F., Douglas P. Finkbeiner (Aug. 2011). "Measuring Reddening with Sloan Digital Sky Survey Stellar Spectra and Recalibrating SFD". *Astrophysical Journal* **737**.2, 103, p. 103.

Stanek, K. Z., T. Matheson, P. M. Garnavich, P. Martini, P. Berlind, N. Caldwell, P. Challis, W. R. Brown, R. Schild, K. Krisciunas, M. L. Calkins, J. C. Lee, N. Hathi, R. A. Jansen, R. Windhorst, L. Echevarria, D. J. Eisenstein, B. Pindor, E. W. Olszewski, P. Harding, S. T. Holland, D. Bersier (July 2003). "Spectroscopic Discovery of the Supernova 2003dh Associated with GRB 030329". *The Astrophysical Journal Letter* **591**.1, pp. L17–L20.

Tiengo, A., S. Mereghetti, G. Ghisellini, E. Rossi, G. Ghirlanda, N. Schartel (Oct. 2003). "The X-ray afterglow of GRB 030329". *Astronomy and Astrophysics* **409**, pp. 983–987.

Toma, Kenji, Ryo Yamazaki, Takashi Nakamura (Dec. 2005). " E_p -Eiso Correlation in a Multiple Subjet Model of Gamma-Ray Bursts". *The Astrophysical Journal* **635**.1, pp. 481–486.

Troja, E., L. Piro, G. Ryan, H. van Eerten, R. Ricci, M. H. Wieringa, S. Lotti, T. Sakamoto, S. B. Cenko (July 2018). "The outflow structure of GW170817 from late-time broad-band observations". *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **478**.1, pp. L18–L23.

Urata, Yuji, Kuiyun Huang, Ryo Yamazaki, Takanori Sakamoto (June 2015). "Extremely Soft X-Ray Flash as the Indicator of Off-axis Orphan GRB Afterglow". *The Astrophysical Journal* **806**.2, 222, p. 222.

van Paradijs, J., P. J. Groot, T. Galama, C. Kouveliotou, R. G. Strom, J. Telting, R. G. M. Rutten, G. J. Fishman, C. A. Meegan, M. Pettini, N. Tanvir, J. Bloom, H. Pedersen, H. U. Nørdgaard-Nielsen, M. Linden-Vørnle, J. Melnick, G. Van der Steene, M. Bremer, R. Naber, J. Heise, J. in't

- Zand, E. Costa, M. Feroci, L. Piro, F. Frontera, G. Zavattini, L. Nicastro, E. Palazzi, K. Bennett, L. Hanlon, A. Parmar (Apr. 1997). "Transient optical emission from the error box of the γ -ray burst of 28 February 1997". *Nature* **386**.6626, pp. 686–689.
- Veres, P., C. Meegan, Fermi GBM Team (Dec. 2022). "GRB 221226A: Fermi GBM detection". *GRB Coordinates Network* **33125**, p. 1.
- Waxman, Eli (Dec. 1997). "Angular Size and Emission Timescales of Relativistic Fireballs". *The Astrophysical Journal Letter* **491**.1, pp. L19–L22.
- Weiler, Kurt W., Nino Panagia, Marcos J. Montes (Dec. 2001). "SN 1998bw/GRB 980425 and Radio Supernovae". *The Astrophysical Journal* **562**.2, pp. 670–678.
- Williams, Maia A., Jamie A. Kennea, S. Dichiara, Kohei Kobayashi, Wataru B. Iwakiri, Andrew P. Beardmore, P. A. Evans, Sebastian Heinz, Amy Lien, S. R. Oates, Hitoshi Negoro, S. Bradley Cenko, Douglas J. K. Buisson, Dieter H. Hartmann, Gaurava K. Jaisawal, N. P. M. Kuin, Stephen Lesage, Kim L. Page, Tyler Parsotan, Dheeraj R. Pasham, B. Sbarufatti, Michael H. Siegel, Satoshi Sugita, George Younes, Elena Ambrosi, Zaven Arzoumanian, M. G. Bernardini, S. Campana, Milvia Capalbi, Regina Caputo, Antonino D’Aì, P. D’Avanzo, V. D’Elia, Massimiliano De Pasquale, R. A. J. Eyles-Ferris, Elizabeth Ferrara, Keith C. Gendreau, Jeffrey D. Gropp, Nobuyuki Kawai, Noel Klingler, Sibasish Laha, A. Melandri, Tatehiro Mihara, Michael Moss, Paul O’Brien, Julian P. Osborne, David M. Palmer, Matteo Perri, Motoko Serino, E. Sonbas, Michael Stamatikos, Rhaana Starling, G. Tagliaferri, Aaron Tohuvavohu, Silvia Zane, Houri Ziaepour (Mar. 2023). "GRB 221009A: Discovery of an Exceptionally Rare Nearby and Energetic Gamma-Ray Burst". *The Astrophysical Journal Letters* **946**.1, L24, p. L24.
- Woosley, S. E. (Mar. 1993). "Gamma-Ray Bursts from Stellar Mass Accretion Disks around Black Holes". *The Astrophysical Journal* **405**, p. 273.
- Woosley, S. E., J. S. Bloom (Sept. 2006). "The Supernova Gamma-Ray Burst Connection". *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **44**.1, pp. 507–556.
- Yamazaki, Ryo, Kunihito Ioka, Takashi Nakamura (July 2003). "Delayed Flashes from Counterjets of Gamma-Ray Bursts". *The Astrophysical Journal* **591**.1, pp. 283–287.
- (May 2004). "Peak Energy-Isotropic Energy Relation in the Off-Axis Gamma-Ray Burst Model". *The Astrophysical Journal Letter* **606**.1, pp. L33–L36.
- Yaron, O., D. A. Perley, A. Gal-Yam, J. H. Groh, A. Horesh, E. O. Ofek, S. R. Kulkarni, J. Sollerman, C. Fransson, A. Rubin, P. Szabo, N. Sapir, F. Taddia, S. B. Cenko, S. Valenti, I. Arcavi, D. A. Howell, M. M. Kasliwal, P. M. Vreeswijk, D. Khazov, O. D. Fox, Y. Cao, O. Gnat, P. L. Kelly, P. E. Nugent, A. V. Filippenko, R. R. Laher, P. R. Wozniak, W. H. Lee, U. D. Rebbapragada, K. Maguire, M. Sullivan, M. T. Soumagnac (Feb. 2017). "Confined dense circumstellar material surrounding a regular type II supernova". *Nature Physics* **13**.5, pp. 510–517.

Yi, Shuang-Xi, Xue-Feng Wu, Zi-Gao Dai (Oct. 2013). "Early Afterglows of Gamma-Ray Bursts in a Stratified Medium with a Power-law Density Distribution". *The Astrophysical Journal* **776**.2, 120, p. 120.

Yonetoku, D., T. Murakami, T. Nakamura, R. Yamazaki, A. K. Inoue, K. Ioka (July 2004). "Gamma-Ray Burst Formation Rate Inferred from the Spectral Peak Energy-Peak Luminosity Relation". *The Astrophysical Journal* **609**.2, pp. 935–951.

Yonetoku, Daisuke, Toshio Murakami, Ryo Tsutsui, Takashi Nakamura, Yoshiyuki Morihara, Keitaro Takahashi (Dec. 2010). "Possible Origins of Dispersion of the Peak Energy-Brightness Correlations of Gamma-Ray Bursts". *Publications of the Astronomical Society of Japan* **62**, p. 1495.

Yoshida, A., T. Murakami (Jan. 1994). "A Spectral Study of an "X-Ray Rich" Gamma-Ray Burst". Gamma-Ray Bursts. Ed. by Gerald J. Fishman. Vol. 307. American Institute of Physics Conference Series. AIP, p. 333.

Zaninoni, E., M. G. Bernardini, R. Margutti, L. Amati (Jan. 2016). "Update on the GRB universal scaling $E_{X,iso}$ - $E_{\gamma,iso}$ - E_{pk} with 10 years of Swift data". *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **455**.2, pp. 1375–1384.

Zhang, B. Theodore, Kohta Murase, Péter Veres, Péter Mészáros (Oct. 2021a). "External Inverse-Compton Emission from Low-luminosity Gamma-Ray Bursts: Application to GRB 190829A". *The Astrophysical Journal* **920**.1, 55, p. 55.

Zhang, Bing (2019). "THE PHYSICS OF GAMMA-RAY BURSTS". New York: CAMBRIDGE. ISBN: 978-1-107-02761-9.

Zhang, Lu-Lu, Jia Ren, Xiao-Li Huang, Yun-Feng Liang, Da-Bin Lin, En-Wei Liang (Aug. 2021b). "Nearby SN-associated GRB 190829A: Environment, Jet Structure, and VHE Gamma-Ray Afterglows". *The Astrophysical Journal* **917**.2, 95, p. 95.

Zhang, Weiqun, S. E. Woosley, A. I. MacFadyen (Mar. 2003). "Relativistic Jets in Collapsars". *The Astrophysical Journal* **586**.1, pp. 356–371.

吉澤康和 (1989). 『新しい誤差論』. 東京: 共立出版株式会社.

坂下志郎, 池内了 (2012). 『宇宙流体力学』. 東京: 培風館.

姜興起 (2010). 『R で学ぶデータサイエンス 3 ベイズ統計データ解析』. 東京: 共立出版株式会社.

植村誠 (2023). 『物理のためのデータサイエンス入門』. 東京: 講談社.

河合誠之, 浅野勝晃 (2019). 『ガンマ線バースト』. 東京: 日本評論社.

福井康雄, 犬塚修一郎, 大西利和, 中井直正, 舞原俊憲, 水野亮 (2024). 『星間物質と星形成 シリーズ 現代の天文学第 6 巻 (第 2 版)』. 東京: 日本評論社.

舘山正見, 野本憲一, 二間瀬敏史 (2015). 『天体物理学の基礎 2 シリーズ現代の天文学第 12 巻』. 東京: 日本評論社.

野本憲一, 定金晃三, 佐藤勝彦 (2009). 『恒星 シリーズ現代の天文学第 7 巻』. 東京: 日本評論社.

高原文郎 (2005). 『天体高エネルギー現象』. 東京: 岩波書店.

— (2012). 『特殊相対論』. 東京: 培風館.